APPLICAZIONI DELLA GEOMETRIA DESCRITTIVA ALLE OMBRE, ...

Giuseppe Peri

Ross.
Cassig.
2/0
BIBLIOTECA NAZIONALE
CENTRALE FIRENZE

2481.

APPLICAZIONI

DELLA

GEOMETRIA DESCRITTIVA

ALLE OMBRE, ALLA PROSPETTIVA LINEARE E AEREA,

AL TAGLIO DELLE PIETRE E DEL LEGNAME.

LIBRI CINQUE

con Atlante di 266 Figure

DI G. PERI

Prezzo del Testo e Atlante
L. it. 13 50.

VOLUME DEL TESTO

FIRENZE
TIPOGRAFIA TORELLI
1859.

COLLEZIONE PISTOIESE
ROSSI-CASSIGOLI
270
BIBLIOTECA NAZIONALE
CENTRALE - FIRENZE

R. BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE
DI FIRENZE

COLLEZIONE PISTOIESE

RACCOLTA DAL

CAV. FILIPPO ROSSI-CASSIGOLI

nato a Pistoia il 28 Agosto 1855
morto a Pistoia il 18 Maggio 1890

Pergamene - Autografi - Manoscritti - Libri a stampa - Opuscoli - Incisioni - Disegni - Opere musicali - Facsimile d'iscrizioni - Editti - Manifesti - Proclami - Avvisi e Periodici

21 Dicembre 1891

APPLICAZIONI

DELLA

GEOMETRIA DESCRITTIVA

Google

Digitized by Google

APPLICAZIONI

DELLA

GEOMETRIA DESCRITTIVA

ALLE OMBRE, ALLA PROSPETTIVA LINEARE E AEREA, AL TAGLIO DELLE PIETRE E DEL LEGNAME.

LIBRI CINQUE

con Atlante di 266 Figure

DI G. PERI

DOTTORE IN SCIENZE FISICO-MATTEMATICHE, E IN MATTEMATICHE APPLICATE;
PROFESSORE DI GEOMETRIA DESCRITTIVA E ARCHITETTURA
NELL'I. E R. LICEO MILITARE ARCIDUCA FERDINANDO,
SOCIO SCIENZIATO DELL' I. E R. ACCADEMIA TOSCANA DI ARTI E MANIFATTURE;
SOCIO ORDINARIO DELL' I. E R. ATENEO ITALIANO, E DELL' I. E R. ACCADEMIA
DI SCIENZE, LETTERE E ARTI DI PISTOJA;
SOCIO CORRISPONDENTE DELL' I. E R. ACCADEMIA
DEI FISIOCRITICI DI SIENA.

VOLUME DEL TESTO

FIRENZE
TIPOGRAFIA TORELLI
1859.

Digitized by Google

L'Autore intende valersi della tutela che le vigenti leggi accordano alla proprietà letteraria, e perciò dichiarerà contraffatta tutte le copie della presente Opera non munite della sottoscritta sua firma.

G. Pari

AI MIEI SCOLARI

A voi, miei cari Giovani, che con tanto amore proseguite lo studio della Geometria Descrittiva dedico e raccomando questo tenue lavoro, in cui raccogliendo le principali Applicazioni di quella Scienza concernenti l'arte del costruttore ho procurato di dare un più esteso svolgimento alle Lezioni che da me riceveste finora autografate sopra tale materia.

Io ho diviso perciò l'opera in cinque Libri, discorrendo nel primo delle Ombre, nel secondo della Prospettiva lineare, nel terzo della Prospettiva aerea, del Taglio delle Pietre nel quarto e di quello del Legname nel quinto.

La Teorica delle Ombre ho svolta in tutta la sua generalità per le superficie piane, cilindriche, coniche e di rivoluzione, non che per quella della sfera e per le superficie rigate; e corredata di molti e svariati esercizi pratici tratti dagli elementi architettonici e dalle macchine. La teorica delle Penombre fa seguito ad essa e termina il Libro.

Alla Prospettiva lineare ho dato tutta la estensione conciliabile coi limiti che mi era imposti. È stato da me esposto il Metodo generale che riduce costantemente la soluzione di ogni quistione alla ricerca del punto d'incontro di una retta con una superficie, date sopra un medesimo foglio le proiezioni

di questa, del punto di vista e dell'oggetto; come pure il Metodo dei punti di concorso e i vantaggi di esso sul precedente: ma ho dovuto però convenire che la sua applicazione pura e semplice induce in gravi difficoltà tutte le volte in cui si abbia da costruire la Prospettiva di oggetti molto composti, quali sono per esempio i monumenti architettonici. Io mi sono quindi fatto debito di percorrere molti Trattati di Prospettiva pratica diretti all'ammaestramento degli Artisti; ho veduto essere possibile dare ordine e forma scientifica alle regole in tanto numero in quelli registrati, ed accettando le idee ampiamente svolte da Adhemar, ho ricondotto quelle regole ad avere il loro fondamento razionale nei processi grafici della Geometria Descrittiva. Di qui un terzo Metodo che elimina tutte le difficoltà proprie ai due precedenti, in mirabile modo prestandosi alla composizione di qualunque Prospettiva. Con un certo numero di esempi presi dagli elementi delle fabbriche, e di difficoltà progressivamente crescente, è stato illustrato quest'ultimo Metodo, ed applicato anche alla costruzione della prospettiva d'un grande monumento patrio; e nessuna considerazione ho trascurata che potesse essere a voi di sussidio per porvi in grado di fare un buon disegno prospettico.

Della Prospettiva aerea ho esposto quel tanto che geometricamente si può determinare al seguito delle osservazioni sperimentali da nessuno impugnate. La teoriea dei punti e delle immagini brillanti sulle linee e sulle superficie pulite dei corpi; la costruzione loro e quella dei luoghi di maggior chiarezza sulle parti illuminate delle superficie non pulite, pei casi più comuni della pratica, formano la maggior parte del terzo Libro. Gli effetti della luce aerea, quelli dovuti ai riflessi e le regole che ne conseguitano per l'acquarello a chiaro-scuro ne comprendono l'altra parte.

Più rapidamente ho trattate il Taglio delle Pietre e quello del Legnama: in primo luogo perchè mio speciale intendimento è stato di avviarvi allo studio delle grandi quistioni che all'uno e all'altro si riferiscono, secondariamente poi perchè sono convinto che le sole quistioni da me sciolte, quantunque in scarso numero, possono essere sufficienti pei bisogni ordinari del costruttore.

Ecco la sommaria rivista delle materie contenute nell' Opera. Per la esposizione loro ho avuto ricorso a tutti quei metodi che la esperienza acquisita nello insegnare mi ha fatto riconoscere atti a renderla chiara e di facile comprendimento. Questi metodi voi li avete veduti svolgere e rigorosamente dimostrare nelle mie Lezioni autografate di Geometria Descrittiva; altro lavoro che riordinato e reso più completo, ho pure in animo di pubblicare, se Dio mi accorda vita. Onde a ciò che in quella ho insegnato ho dovuto spesso appellarmi nel corso dell'Opera.

Se io sia pienamente riuscito nello scopo prefissomi non so; questo so bene che non sono state da me risparmiate nè fatiche nè spese per raccogliere in un solo volume e coordinare co' vostri studi tante e sì svariate dottrine, affinchè potessero con vero profitto esser da voi comprese. Imperocchè non l'ambizione di salire in fama mi ha indotto a scrivere e stampare, ma l'amore per la scienza che da molti anni professo e il desiderio vivissimo di esservi utile coll'agevolarvi lo studio di queste Applicazioni che disseminate si trovano in molti Trattati speciali, e non sempre con facili e semplici metodi spiegate.

LIBRO PRIMO.

OMBRE

CAPO I.

Definizioni.

1. La luce, qualunque ne sia la sorgente, si propaga in linea retta: alla Fisica le esperienze che lo provano. Un corpo o un punto che emani luce si considera come un centro da cui partono una infinità di linee rette in tutte le direzioni Queste linee rette diconsi *raggi luminosi*, e *luminoso* dicesi pure il corpo o il punto da cui emanano.

2. Quando un corpo non luminoso è posto in presenza di un altro che lo è, havvi sempre una certa quantità di raggi luminosi che incontrano il primo: la parte investita dal fascio di questi raggi dicesi *illuminata*.

3. La natura dei corpi non luminosi, il mezzo in cui essi si trovano, la loro posizione relativa sono altrettante cagioni che più o meno modificano gli effetti della luce. Noi però supporremo sempre che sieno perfettamente *opachi*, cioè tali che un raggio luminoso qualunque non possa attraversarli, quasi rimanesse assorbito là dove ha luogo il reciproco loro punto d' incontro.

4. La tinta più o meno oscura, di cui appariscono ricoperte le parti di un corpo non illuminate, dicesi *ombra* Ma

alcune di queste parti non ricevono luce perchè la posizione loro rispetto al corpo luminoso è tale che nessun raggio da esso emanato può incontrarle; altre non ricevono luce perchè il fascio dei raggi luminosi che investe il corpo opaco rimane intercettato dalle parti illuminate.

L'ombra delle prime dicesi *ombra pura;* quella delle seconde *ombra portata.* La linea che separa la parte illuminata di un corpo da quella che si trova nell'ombra pura dicesi *linea di separazione d'ombra e di luce;* quella che è limite della parte non illuminata per la intercezione dei raggi luminosi dicesi *linea d'ombra portata.*

Principj sui quali è fondata la teoria delle Ombre.

5. Abbiamo veduto *(Geom. Descritt.)* potersi la superficie di un corpo qualunque considerare in generale siccome composta di una infinità di faccette piane infinitamente piccole, e il piano tangente in un qualsivoglia punto di essa essere il prolungamento in tutte le direzioni della faccetta corrispondente.

Ora se quel corpo fosse luminoso, chiara cosa è che il fascio dei raggi emanati da ogni suo punto porterà luce su tutti i punti dello spazio che non sono situati al di sotto della faccetta su cui trovasi il punto luminoso, cioè a dire al disotto del piano tangente in questo punto al corpo stesso. Mentre per lo contrario un punto qualunque di un corpo opaco non potrà ricevere luce da un raggio luminoso, se questo raggio non può considerarsi come facente parte del fascio di quelli che sarebbero emanati dal punto in questione, quando il corpo opaco a cui appartiene divenisse alla sua volta luminoso.

6. Sia A il corpo luminoso e B il corpo opaco, ambedue qualunque ma convessi (*Fig. 1*). S'immagini un piano $N\,n$ tangente al primo nel punto n, al secondo nel punto N e collocato per modo da lasciare l'uno e l'altro corpo dalla medesima parte, per esempio alla sua destra: di poi si faccia muovere detto piano colla condizione di conservare il contatto con i due corpi, sempre però alla sua destra, fintanto che sia ritornato nella prima posizione $n\,N$. L'inviluppo delle successive posizioni di questo piano sarà una superficie sviluppabile (*Geom. Descritt.*);

e la linea di contatto *M N Z M* col corpo opaco sarà la curva di separazione d'ombra e di luce.

Infatti, di tutti i raggi formanti il fascio di luce emanata dal punto *n* non vi è che il raggio *n N* il quale illumini il punto *N;* e di tutte le rette condotte da quest' ultimo punto non vi ha che la retta *N n* secondo la quale possa essere inviata luce al punto *N* dal corpo *A* Consegue intanto da ciò che questo punto è illuminato da un solo raggio luminoso *n N*, e che lo stesso avviene per gli altri punti della linea *M N Z M*, potendo per ciascuno di essi ripetersi il medesimo ragionamento. Consideriamo ora un punto *p* situato sulla superficie del corpo *B*, al di qua della linea *M N Z M* per rapporto al corpo luminoso, e immaginiamo condotto per esso un piano *p s q* tangente a *B*: un tal piano lascerà al di sopra di sè una parte *q s t* del corpo luminoso, o tutto il corpo stesso se prenderemo il punto *p* assai vicino al punto *N;* onde si farà manifesto che dal punto *p* potrà essere condotta una infinità di rette situate al di sopra del piano *p s q* e intersecanti il corpo *A*. Queste rette indicano la direzione di altrettanti raggi luminosi che emanati dal corpo *A* possono incontrare in *p* il corpo opaco: dunque il punto *p* è illuminato da una infinità di raggi luminosi; e siccome lo stesso avviene per tutti i punti della callotta *M N Z M* per quanto vicini sieno alla linea *M N*, potremo inferirne che questa callotta è illuminata.

Consideriamo invece un punto qualunque *r* del corpo opaco situato per rapporto al corpo luminoso al di là della curva di contatto *M N Z M*. Il piano *u v* tangente al corpo opaco nel punto *r* lascia da una medesima parte, in questo caso al disotto di se, il corpo opaco e il corpo luminoso; quindi il punto *r* non potrà ricevere alcun raggio luminoso dal corpo *A*. E siccome lo stesso avviene per ogni altro punto del corpo opaco che sia situato per rapporto alla linea di contatto nella stessa guisa del punto *r*, noi potremo inferirne che tutti i punti della callotta *M N Y M* sono nell' ombra pura. Dunque la linea di contatto *M N Z M* divide il corpo *B* in due parti, delle quali una è intieramente illuminata, e l' altra è intieramente nell' ombra: sarà perciò la linea di separazione d' ombra e di luce, come si voleva dimostrare.

7. *Osservazione* — Se il piano tangente al corpo luminoso

e al corpo opaco lasciasse il primo da una parte e il secondo dall' altra, come avverrebbe per il piano *a b*, la superficie sviluppabile inviluppo delle diverse posizioni di quello darebbe luogo ad una linea di contatto, della quale ciascun punto *b* sarebbe illuminato da una infinità di raggi luminosi; essendo manifesto come per ciascuna posizione n *b* del notato piano tangente, dal punto di contatto *b* possa condursi infinito numero di rette tutte collocate al di sopra del piano stesso, e capaci di incontrare il corpo luminoso *A*. Dunque la linea di contatto ottenuta in simile caso troverebbesi al di qua della linea *M N Z M* rispetto al corpo luminoso, e fra questa e quella linea rimarrebbe compresa una zona di superficie illuminata.

Siamo pertanto in grado di stabilire i seguenti principj:

I. *La linea di separazione d' ombra e di luce sulla superficie di un corpo è in generale linea di contatto di una superficie sviluppabile inviluppo di quel piano tangente al corpo dato e al corpo luminoso, il quale lascia entrambi da una medesima parte.*

II. *È proprietà caratteristica delle linee di separazione d' ombra e di luce quella di essere illuminate, ma da un solo raggio luminoso, in ciascuno dei loro punti.*

8. Esaminiamo ora ciò che avviene se il corpo opaco *B* non è convesso (*Fig* 2). Essendo *M N R* la traccia di un piano tangente ad ambedue i corpi, la superficie sviluppabile generata dal movimento di questo piano toccherà il corpo opaco secondo una curva *M m*, e lo intersecherà secondo un' altra *R r*; per cui la parte *M E m* sarà illuminata, e la parte *M I R r i m* sarà nell' ombra.

Noi possiamo condurre un altro piano *n C P* che tocchi in un punto *n* il corpo *A* e in un punto *C* il corpo *B*: quindi avremo un' altra superficie sviluppabile che toccherà il corpo opaco secondo la linea *C c*, e lo taglierà secondo un' altra *P p*. Per cui la zona *R C o r* sarà illuminata dalla zona *N n o O*, l' altra *C P p c* sarà nell' ombra, e la rimanente *P D d p* sarà pure illuminata poichè la retta *P C* non taglia la linea *I E i*.

È agevole cosa il vedere 1.° che ogni punto delle linee di contatto *M m*, *C c* è illuminato da un solo raggio luminoso del corpo *A*: 2.° che le zone *i R r i*, *C c p P* del corpo *B* trovansi in ombra perchè le altre *M E m*, *C R r* e illu-

minate intercettano quei raggi luminosi che potrebbero ad esse arrivare; 3.° e che perciò le linee d'intersezione *R r*, *P p*, come limiti di quelle parti in ombra, sono linee di ombra portata.

9. *Osservazione I.* — Ciascun punto *P* d'una linea d'ombra portata è determinato sul corpo dalla intersezione del prolungamento di un raggio luminoso che ha servito a dare un punto *C* della linea di separazione d'ombra e di luce. La luce poi di questo raggio rimanendo assorbita nel punto *C*, è evidente che l'altro punto *P* sarà nell'ombra. Onde siamo in diritto di stabilire questi altri principj:

III. *Le linee d'ombra portata sopra un corpo opaco sono le intersezioni della sua superficie con la superficie sviluppabile, che determina la linea di separazione d'ombra e di luce.*

IV. *Le linee d'ombra portata non ricevono luce in alcuno dei loro punti: esse possono considerarsi come le ombre delle stesse linee di separazione d'ombra e di luce.*

10. *Osservazione II.* — Giova anche notare:

1.° che la superficie sviluppabile dalla quale si hanno i contorni delle ombre può comporsi di tante nappe quante sono le posizioni *O c*, *N M* del piano generatore, e che non rientrano le une nelle altre allorchè esso ruota attorno al corpo luminoso e al corpo opaco.

2.° Che ciascuna nappa di quella superficie sviluppabile dà in generale una curva di separazione d'ombra e di luce, e la sua ombra portata.

3.° Che il corpo è in generale illuminato al di qua delle curve di separazione d'ombra e di luce, e al di là delle curve d'ombra portata.

4.° Che i raggi luminosi arrestandosi alla prima superficie da essi incontrata, ciascun punto della linea di separazione d'ombra e di luce non può portare ombra che sopra una sola superficie e in un solo punto.

11. Noi abbiamo supposto che il corpo luminoso fosse ad una distanza finita dal corpo opaco. Quando si riducesse a un punto, la superficie sviluppabile si trasformerebbe in una superficie conica, o in quella di una piramide a seconda della forma del corpo opaco. E se il corpo luminoso fosse ad una distanza infinita, come può ritenersi allorchè la luce proviene

dal sole, la superficie sviluppabile si trasforma in un cilindro circoscritto al corpo opaco qualunque sia la forma di questo ultimo.

In questo caso, nel quale può dirsi il corpo opaco investito da una infinità di raggi luminosi paralleli, le costruzioni relative alla ricerca delle ombre sono molto più semplici che nei casi precedenti; e perciò nel Disegno, salvo circostanze speciali, suppongonsi sempre gli oggetti illuminati dal Sole.

Cominceremo quindi dall' esame di questo caso, dando agli esercizi relativi la maggiore estensione possibile.

CAPO II.

Raggi luminosi paralleli.

12. Due sono i metodi che possono praticarsi per determinare la linea di separazione d'ombra e di luce, e il contorno delle ombre portate sopra un corpo qualunque:

1.° Si possono condurre parallelamente alla direzione dei raggi luminosi tanti piani tangenti al corpo quanti crediamo necessarj, e il luogo geometrico dei punti di contatto sarà la linea di separazione d'ombra e di luce. Costruendo allora per ciascuno di quei punti una retta parallela alla direzione dei raggi luminosi, si troverà questa distesa sul piano tangente corrispondente, e sarà una delle generatrici di quella superficie cilindrica in cui trasformasi la superficie sviluppabile del N.° 10. 1.° Talchè unendo l'incontro di ognuna di quelle rette colla prima superficie che trovasi sulla sua direzione, otterremo altrettanti punti della linea d'ombra portata (N.° 10 4.°)

Questo metodo può denominarsi *Metodo dei Piani tangenti.*

2.° Immaginando condotta parallelamente alla direzione dei raggi luminosi una serie di piani secanti il corpo dato, si costruirà ogni sezione parziale, e si condurrà a questa una tan-

gente parallela alla direzione medesima prolungandola fino a intersecare la prima superficie che incontra. Il luogo geometrico di tutti i punti di contatto sarà la linea di separazione d'ombra e di luce, e quello di tutti i punti d'intersecazione sarà il contorno dell'ombra portata.

Questo metodo può denominarsi *Metodo dei piani secanti.*

13. Osservazione I. — Giova applicare il primo metodo in tutti quei casi in cui la costruzione del piano tangente alla superficie del corpo opaco riesce più semplice e spedita di quella della sezione piana; e principalmente quando è possibile ottenere il punto di contatto indipendentemente dalla rappresentazione completa del piano tangente, siccome d'ordinario avviene per le superficie di rivoluzione.

Allorchè poi si riconosca convenire piuttosto il metodo secondo, non dovremo trascurare di osservare che la unica condizione del parallelismo ad una retta data non determinando completamente la posizione di un piano, rimane in nostra facoltà di scegliere un sistema di piani secanti tale da produrre nel corpo dato le sezioni le più semplici possibili. Ordinariamente si prendono questi piani perpendicolari ad uno dei piani coordinati, riuscendo in tal caso le loro tracce su quel piano parallele alla proiezione corrispondente del raggio luminoso, e dispensandoci dalla costruzione della proiezione corrispondente della sezione. Ma bene spesso la semplice ispezione dei dati fa conoscere la natura dei contorni delle ombre; per lo che si manifestano immediatamente quei mezzi particolari di costruzione che conducono al resultato per le vie più brevi.

14. Osservazione II. — Non è inopportuno il notare fin d'ora che nel caso dei raggi luminosi paralleli i contorni delle ombre portate sono le proiezioni oblique delle linee di separazione d'ombra e di luce fatte sopra un piano o sopra un'altra superficie qualunque.

Ombre delle Linee e delle Figure piane.

15. Supponiamo che la retta *(A B, A' B')*, (*Fig.* 3) appartenga ad una linea di separazione d'ombra e di luce, e ricerchisi l'ombra portata da essa (N.° 9. IV) sui piani coordinati. Basterà condurre per gli estremi *(A, A')*; *(B, B')* due rette *(A a, A' a')*;

(B c, B a') parallele alla direzione dei raggi luminosi, e le tracce orizzontali *a*, *c* in uno con le verticali *a'*, *c'* di queste ultime somministreranno le ombre portate *a c*, *a' c'* su ciascheduno dei piani medesimi

16 *Osservazione I.* — Le rette *a c*, *a' c'* sono le tracce d'un piano parallelo alla direzione dei raggi luminosi condotto per *(A B, A' B')*; perciò dovranno passare per lo stesso punto *b* della linea di terra. Di più siccome il piano verticale si dee ritenere come rialzato, e riguardare al pari di quello orizzontale come una superficie opaca, la vera ombra cercata sarà la spezzata *a b a'*.

17. *Osservazione II.* — L'ombra portata dalla retta *(A B, A' B')* sopra un piano qualunque sarebbe la retta che congiunge i punti d'incontro di questo piano colle parallele ai raggi luminosi condotte per i suoi estremi.

E qui è da notarsi che questa retta, delle cui ombre si otterrebbero solo le proiezioni, potrebbe anche portare ombra in parte sopra uno o su tutti e due i piani coordinati. In tal caso queste nuove ombre e le proiezioni di quella cercata dovrebbero incontrarsi sulle tracce del piano dato

18 *Osservazione III.* — L'ombra portata sopra uno dei coordinati da una retta che sia ad esso perpendicolare è parallela alla proiezione della direzione del raggio luminoso su quel piano, e sull'altro piano è perpendicolare alla linea di terra.

Se la retta in questione fosse perpendicolare ad un piano qualunque, l'ombra da essa portata su quest'ultimo dovrebbe riescire parallela alla proiezione ausiliaria della direzione dei raggi luminosi sopra di quello.

19. *Osservazione IV.* — L'ombra portata sopra un piano da una retta che ad esso è parallela, resulta parallela ed eguale alla retta medesima.

20. *Osservazione V.* — Le ombre portate sopra un piano da due o più rette parallele fra loro, sono pure parallele fra loro: tali resultano ancora le ombre di una medesima retta sopra due o più piani paralleli.

21. L'ombra portata da una retta sopra una superficie curva sarà quella parte della sezione, fatta in questa superficie dal piano condotto per la retta data parallelamente alla direzione dei raggi luminosi, che rimane limitata dalle rette

parallele a quella direzione condotte per le due estremità della retta data.

Sia *(a b, a' b')* la retta data, ed *(A B C D, A' A'' C'' C')* un cilindro verticale (*Fig. 4*): una serie di piani secanti *b p, c n* . . . verticali e paralleli alla direzione dei raggi luminosi *(R, R')* taglieranno il cilindro secondo una o più generatrici, e la retta nei punti *(b, b')*; *(c, c')* . . . Condotte da questi altrettante parallele ad *(R, R')* si avranno sulle generatrici suddette i punti d'incontro *(p, p')* *(n, n')* . . . appartenenti all'ombra cercata.

Bisogna rammentarsi che non saranno punti di quest'ombra quelli che le parallele *(b p, b' p')*, *(c n, c' n')* . . . determinerebbero incontrando le generatrici opposte aventi per tracce i punti n_1 e p_1 (N.° 10, 4.°)

22. *Osservazione.* — Se la parallela ad *R* condotta per una delle estremità *(a, a')* della retta data, o quelle condotte per tutte e due le estremità, non incontrassero la traccia orizzontale del cilindro, come avviene per la *a q* nella (*Fig. 4,*) non tutta la retta data porterebbe ombra sulla superficie di esso. Quella parte che la produce sarebbe in questo caso determinata dalle tangenti *d m* alla traccia del cilindro e parallele ad *R*, siccome quelle che rappresentano le tracce di due piani tangenti paralleli alla direzione dei raggi luminosi

Se il cilindro non fosse verticale tornerebbe utile costruire un piano parallelo alla direzione dei raggi luminosi e alle generatrici del cilindro; e per i diversi punti della retta data condurre altrettanti piani ausiliari paralleli a quello. La costruzione precedente ripetuta per ciascheduno di questi ultimi somministrerà i diversi punti dell'ombra richiesta

23 L'ombra portata da una linea qualunque sopra i piani coordinati, o sopra un piano qualunque, o sopra qualsivoglia altra superficie è la traccia sulla superficie proposta del cilindro avente per direttrice la linea data e per generatrice una parallela alla direzione dei raggi luminosi La curva *m n p* (*Fig. 5*) sarebbe l'ombra portata dalla linea *(a b c, a' b' c')* sui piani coordinati, supposto che *(R, R')* sia la direzione dei raggi luminosi. Quest'ombra è situata tutta sul piano coordinato orizzontale non trovandosi generatrice del cilindro, la quale incontri il coordinato verticale.

24. *Osservazione.* — Quando un punto o una linea, facenti parte di una linea di separazione d'ombra e di luce, sono comuni tanto alla superficie del corpo a cui appartengono quanto ad un piano o ad un'altra superficie qualunque, quel punto e quella linea sono ad un tempo ombre di se sopra quel piano o quella superficie.

25. L'ombra portata da una figura piana qualunque si otterrebbe cercando l'ombra di ciascuno dei suoi vertici, se è poligona, e quella del maggior numero dei suoi punti se il suo contorno fosse curvilineo. In ogni caso se la superficie sulla quale l'ombra è portata fosse un piano, e il piano della figura fosse ad esso parallelo, l'ombra richiesta riuscirebbe evidentemente identica alla figura data. Talchè per un circolo basterà cercare il punto in cui il piano dato è incontrato dalla parallela alla direzione dei raggi luminosi condotta per il suo centro, e il circolo d'eguel raggio descritto col centro in quel punto sarà l'ombra cercata.

CAPO III.

Ombre dei Poliedri.

26. La superficie cilindrica rammentata al (N° 11) diviene un prisma circoscritto al poliedro dato, colle costole parallele alla direzione dei raggi luminosi. Di più tutte le facce del corpo essendo piane, ciascuna di esse sarà o intieramente illuminata o intieramente nell'ombra, eccettuato il caso in cui su qualche faccia illuminata sia portata l'ombra da alcuna delle parti del corpo che si considera. Consegue da ciò che la linea di separazione d'ombra e di luce sarà un poligono, ordinariamente non piano, avente per lati alcune delle costole del poliedro proposto.

Per riconoscere quali di esse fanno parte di quella linea bisogna tutte distinguerle nel modo seguente:

1.° Costole provenienti dalla intersezione di due facce illuminate; e queste saranno evidentemente illuminate.

2.° Costole provenienti dalla intersezione di due facce in ombra; e queste non ricevendo alcun raggio luminoso si troveranno pure nell'ombra.

3.° Costole provenienti dalla intersezione di una faccia illuminata con una faccia in ombra.

Solo queste ultime vengono illuminate da quei raggi il cui luogo geometrico è una delle facce del prisma circoscritto al poliedro dato. Ciascun punto di essa riceve un solo raggio luminoso, siccome ha luogo per ogni punto di quelle che sono comuni a due facce illuminate; talchè il Principio II stabilito al N.° 7 non avrebbe qui utile applicazione: ma come separano le facce illuminate del poliedro da quelle che sono in ombra, non può cader dubbio sulla loro appartenenza alla linea di separazione d'ombra e di luce.

27. Ordinariamente si distinguono subito nei poliedri le facce illuminate e quelle in ombra: ma può anche avvenire che rimanga incerta la posizione di qualche faccia rispetto alla direzione dei raggi luminosi. Conducesi allora un piano parallelo a questa direzione e tale che intersechi le costole per le quali ha luogo la incertezza; per ciascuno dei vertici della sezione si fa passare una retta parallela alla direzione dei raggi luminosi, e quelle fra queste rette il cui prolungamento non troversa la sezione determineranno le costole facenti parte della linea di separazione d'ombra e di luce, quelle il cui prolungamento la traversa faranno conoscere le costole illuminate; le altre infine che passano per i vertici della sezione dopo averla traversata faranno conoscere le costole in ombra.

Così il poligono *A* (*Fig.* 6), essendo la sezione di cui si tratta, ed *R* la proiezione ausiliaria della direzione dei raggi luminosi sul piano di essa (N.° 18), si vede che le costole dei punti *b* ed *c* appartengono alla linea di separazione d'ombra e di luce, la costola del punto *a* è illuminata, e quelle dei punti *c* e *d* sono nell'ombra.

PROBLEMA I. *Trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sui prismi, e la loro ombra portata sui piani coordinati.* (*Fig.* 7).

28 Abbiasi il prisma esagono ($A\,B\,C\,D\,E\,F$, $A'\,D'\,D''\,A''$), di cui le costole laterali sono perpendicolari al piano coordinato orizzontale, e le sue basi regolari hanno due lati paralleli al piano coordinato verticale: (R, R') sia la direzione dei raggi luminosi.

Linea di separazione d'ombra di luce. La semplice ispezione del corpo, considerato rispetto a quella parte dello spazio da cui proviene la luce, fa scorgere subito che la base superiore ($A\,B\,C\,D\,E\,F$, $A'\,D'$) è illuminata, che la base inferiore ($A\,B\,C\,D\,E\,F$, $A''\,D''$) è nella ombra, e che delle facce laterali sono illuminate soltanto quelle orizzontalmente proiettate in $B\,A$, $A\,F$, $F\,E$. Talchè dopo quello si è detto al N.° 26 puossi inferirne, essere la linea di separazione d'ombra e di luce composta sulla base superiore della porzione di perimetro ($B\,C\,D\,E$, $B'\,D'$), sulle facce laterali delle costole verticali (B, $B'\,B''$); (E, $C'\,C''$), e sulla base inferiore della porzione di perimetro ($E\,F\,A\,B$, $C''\,A''$). Di tutta la porzione del prisma che rimane nell'ombra non si vedrà dunque che la proiezione verticale $C'\,D'\,D''\,C''$ delle due facce $E\,D$, $C\,D$.

Ombra portata. — L'ombra portata sui piani coordinati si otterrà cercando quella di ciascun vertice del poligono storto formato dalle costole di cui si compone la linea di separazione d'ombra e di luce, e congiungendo quindi fra loro queste ombre con linee rette. Così troveremo che l'ombra della linea spezzata ($B\,C\,D\,E$, $B'\,C'\,D'$) è tutta sul piano coordinato verticale ed è $b'\,c'\,d'\,e'$, di cui la $b'\,c'$ dovrà resultare parallela a $B\,C$ (N.° 19). Procedendo oltre si trova che l'ombra portata dalla costola (E, $C'\,C''$) rimane interrotta in f sulla linea di terra dal piano coordinato orizzontale, e prosegue secondo $f\,g$ terminando in g (N.° 18): che l'ombra $g\,h$ del lato orizzontale ($E\,F$, $C''\,B''$) resulta parallela ad $E\,F$ (N.° 19), che il lato ($A\,F$, $A''\,B''$) porta ombra sopra i due piani coordinati ed è $h\,f_1\,a''$, di cui la parte $a''\,f_1$ deve resultare parallela a $c'\,d'$ (N.° 20); che il lato ($A\,B$, $A''\,B''$) porta ombra

sopra il solo piano verticale ed e a'' b'' parallela a, d' e'; e per conseguenza l'ombra portata dalla costola (B, B' B'') sarà b'' b' che, se il disegno è esatto, dovrà resultare perpendicolare alla linea di terra. Dunque l'ombra cercata sarà il poligono b' c' d' e' f g h f_1 a'' b'' b'.

29. *Osservazione I.* — Se le costole del prisma fossero state oblique ai piani coordinati, avremmo dovuto riconoscere prima quelle componenti la linea di separazione d'ombra e di luce, e in seguito avremmo potuto procedere alle medesime costruzioni testè eseguite. Laonde crediamo inutile di ripeterle sopra un tale esempio, che non offre d'altronde alcuna particolarità interessante.

30. *Osservazione II.* — L'ombra portata da un punto sopra un poliedro si otterrebbe conducendo per quel punto un piano ed una retta parallelamente alla direzione dei raggi luminosi, e costruendo la sezione prodotta dal piano nel poliedro, non che il punto d'incontro della retta con quella sezione. Questo punto sarebbe l'ombra domandata.

Problema II. *Trovare la linea di separazione d'ombra e di luce di una croce, e la sua ombra portata sopra un piano qualunque* (*Fig.* 8.)

31. Sieno (M, M') le proiezioni della croce (A A, A') quelle di uno zoccolo su cui si eleva; S V S' sia il piano dato, e la direzione dei raggi luminosi (R r, R' r').

Linea di separazione d'ombra e di luce. Avendo scelto il piano verticale coordinato parallelo alle braccia della croce, e il montante perpendicolare al piano coordinato orizzontale, su cui supporremo posato lo zoccolo, è facile a vedersi che la linea di separazione d'ombra e di luce si comporrà, per lo zoccolo, della linea (m n r, m' n'), e delle costole verticali (m, m' m'') (r, n' n''); e sulla croce delle linee (a o e, a' e'); (a, a' a''); (e, e' e'') per il montante: delle linea (x y z, x' z'); (x w z, x'' z''); (x, x' x''); (z, z' z'') per le braccia.

Ombra portata. — La costruzione dell'ombra portata sul piano inclinato S V S' non è che l'applicazione di quanto è stato già detto al N.° 17, e dipende evidentemente dalla solu-

zione del noto problema di Geometria Descrittiva « *Costruire il punto d' incontro di una retta con un piano* » In effetto noi dobbiamo condurre per gli estremi delle rette componenti la linea di separazione d'ombra e di luce altrettante rette parallele alla direzione dei raggi luminosi e trovare le tracce di queste rette sul piano dato. Risolvendo il problema per quella di queste rette che parte dal punto (o, o') si trova $(s\ p,\ s'\ p')$ per l'intersezione del piano dato col piano proiettante orizzontale della retta suddetta; talchè $(o_2,\ o'_2)$ sarà l' ombra del punto considerato. Una simile costruzione dovrebbe ripetersi per ogni altro punto della linea di separazione d'ombra e di luce già riconosciuta. Ma osservando che i piani proiettanti orizzontali delle rette parallele alla direzione dei raggi luminosi dovranno intersecare il piano dato secondo rette parallele fra loro, noi potremo ottenere più semplicemente l' ombra portata da ogni altro punto come $(w,\ x'')$ conducendo dal punto f, incontro della proiezione orizzontale della retta parallela ad $(R\ r,\ R'\ r')$ con la traccia orizzontale del piano dato, una retta $f\ f'$ perpendicolare alla linea di terra; e dal punto f' una parallela ad $s'\ p'$. Poichè su questo potrà colle costruzioni precedenti determinarsi subito il punto f'_2, e quindi il punto f_2 proiezioni dell' ombra portata da $(w,\ x'')$. Lo stesso argomento vale per costruire l' ombra portata dello zoccolo: cerchiamo prima quella del punto $(n,\ n')$ che sarà $(n_2,\ n'_2)$; quindi l' ombra dei punti $(m,\ m')$; $(r,\ r')$ che sono respettivamente $(m_2,\ m'_2)$; $(r_2,\ r'_2)$, e congiunte queste ultime colla prima avremo l' ombra portata dalla costole superiori $(m\ n,\ m'\ n')$; $(n\ r,\ n')$. L' ombre poi delle costole verticali $(m,\ m'\ m'')$, $(r,\ r'\ r'')$ sono respettivamente $(q\ m_2,\ q'\ m'_2)$ ed $(l\ r_2,\ l'\ r'_2)$.

32. *Osservazione I.* — Nel corso delle operazioni grafiche conviene assicurarsi dell' esatezza del disegno ricorrendo non solo ai principii particolari stabiliti ai N.i 17, 18, 19, e 20, ma non trascurando anche le altre riprove che il problema ci offre Così le tracce t e t' della retta $(n_2\ r_2,\ n'_2\ r'_2)$ devono trovarsi sulle tracce del piano $S\ V\ S'$.

33. *Osservazione II.* — La proiezione orizzontale dell' ombra portata sul piano $S\ V\ S'$ termina con la linea $q\ l$ sulla traccia $V\ S$. Ma il corpo trovandosi situato al di qua di questa traccia, porta ombra anche sul piano coordinato orizzontale

Il contorno di questa ombra è dato dalle costole verticali m, ed r, ed è determinato dalle rette $m\,q$, $r\,l$ di cui $q\,m_2$ ed $l\,r_2$ sono i prolungamenti.

Anche il montante della croce porta ombra sullo zoccolo e sulla braccia: le due rette $a\,b$, ed $c\,d$ parallele ad $R\,r$ danno il contorno dell'ombra portata sullo zoccolo e sulle braccia. Sul montante poi vien portata ombra dal braccio sinistro e precisamente dal lato ($a\,c$, $a''\,h'$). Essendo questo lato perpendicolare alla faccia ($a\,c$, $a''\,h'$), l'ombra da esso portata riescirà parallela alla proiezione ausiliaria del raggio fatta sul piano di questa faccia. Le costruzioni indicate nella figura somministrano la retta R'_1 per questa proiezione abbattuta sul coordinato verticale, talchè se abbattesi pure sullo stesso piano la faccia del montante in $h''\,h'\,a''\,m'$, sarà $h''\,g'$ parallela ad R'_1 l'abbattimento dell'ombra cercata. Dunque le proiezioni di essa sul montante saranno $a\,c$ ed $h'\,g'$.

34. *Osservazione III.* — Cerchisi la proiezione ausiliaria della croce sopra un piano verticale $W\,Z\,S'$ e perpendicolare alla traccia orizzontale del piano $S\,V\,S'$. A tale oggetto basterà condurre dai diversi punti della croce altrettante perpendicolari al piano $W\,Z\,S'$, e riunire i piedi di queste perpendicolari. Per rendere in seguito visibile questa proiezione immagineremo che il piano si abbatte sul coordinato verticale ruotando attorno alla sua traccia $Z\,S'$, e allora ciascuno dei punti proiettati in N, O, M, B . . . descriverà un'arco di cerchio orizzontale per venire ad abbattersi respettivamente in N', O', M', B' . . . sulla $X\,Y$. Ora se dal punto e' conducesi una parallela alla linea di terra, sarà questa la proiezione verticale dell'arco di circolo descritto del punto (o, e'); per cui la perpendicolare ad $X\,Y$ condotta per O' determinerà sopra di essa il punto o'' proiezione ausiliaria del punto (o, e'). Nello stesso modo avremo quella di tutti gli altri punti della croce, e del suo zoccolo $N'\,N''\,M''\,B''\,B'$.

Riferita la croce al piano $W\,Z\,S'$ resultano visibili alcune delle sue facce che rimangono in ombra e che è facile di riconoscere: come pure resulta visibile l'ombra portata sulla faccia ($a\,c$, $a''\,h'$), e che si ottiene proiettando g' in g'_1 e tirando $g'_1\,h'_1$.

Cercando le proiezioni di tutti i punti (o_1, o'_1); (f_1, f'_1) . . .

dell'ombra portata sul piano $W Z S'$ abbattuto sul coordinato verticale, collo stesso metodo praticato poc'anzi per determinare quelle della croce e del suo zoccolo, noi dobbiamo trovare queste proiezioni $O''_2, F''_2, \ldots$ situate tutte sulla retta $S' Q'$. Congiungendo i punti $O''_2, F''_2 \ldots$ coi corrispondenti $O'', X''_1 \ldots$ le rette $O''_2 O''$, $F''_2 X''_1 \ldots$ dovranno resultare tutte parallele alla proiezione ausiliaria $f'' f''_1$ della direzione $(R\, r, R'\, r')$.

35. *Osservazione IV.* — Le proiezioni ausiliarie possono servire non solo di riprova all'esattezza delle costruzioni fatte col metodo ordinario, ma anche essere utilissime per la costruzione di alcuni punti dell'ombra richiesta, per i quali o non valesse la soluzione ordinaria, o questa soluzione esigesse operazioni grafiche molto complicate. Ma il partito che si può trarre dalle proiezioni ausiliarie si vedrà meglio nel problema seguente.

PROBLEMA III. *Trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sulla scala (A, B), e la sua ombra portata.* (*Fig* 9).

36. Il coordinato verticale è parallelo alla dimensione maggiore dei gradini; ed (R, R') è la direzione dei raggi luminosi. La figura C è la proiezione ausiliaria della scala sopra il piano $Z V T$, e $\rho' \rho''$ quella della direzione (R, R').

Di questa proiezione che rende evidente la forma della scala e dei muri in cui sono intestati i gradini, ci serviremo per indicare le parti diverse del soggetto.

Linea di separazione d'ombra e di luce. — Si riconosce facilmente che la linea di separazione d'ombra e di luce compongono 1.ª la verticale $(a, a' a'')$; 2.ª il lato superiore destro $(a\, b\, c\, d, a_1\, b_1\, c_1\, d_1)$ del muro a sinistra; 3.ª la verticale $(a_1\, a_2)$; 4.ª il lato superiore destro $(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta, a_1\, b_1\, c_1\, d_1)$ del muro a destra; 5.ª le verticali $(m, m' m'')$; $(p, p' p'')$ spigoli delle soglie della porta.

Ombra portata. La verticale $(a, a' a'')$ porta ombra sul coordinato orizzontale e secondo la retta a e parallela ad R: ma tirando $a_1\, e_1$ parallela a $\rho' \rho''$ si scorge che questa verticale porta ombra anche sulla faccia verticale del primo gradino, la quale si troverà proiettando e in e', ed e_1 in e''. Ti-

rando $b_1 b_2$ parallela a $\rho' \rho''$, si vede che il lato $(a\ b,\ a_1\ b_2)$ porta ombra sulla faccia orizzontale del primo gradino, e sopra una parte della sua faccia verticale. La prima sarà parallela ad $a\ b$, e si troverà determinando il punto (b_2, b_2) in cui la retta $(b\ b_2, b_1\ b_2)$ incontra la faccia del gradino, e per questo punto tirando una perpendicolare a $b\ \beta$, si otterrà la seconda proiettando il punto b_2 in b'_2 e conducendo $b'_2\ e''$, che dovrà riescire parallela a R'. Sul rimanente della faccia orizzontale del precedente gradino come su quelle degli altri vien portata l'ombra dalla retta $(b\ c,\ b_1\ c_1)$, e queste ombre dovranno riescire respettivamente parallele. Per trovarle sulle facce orizzontali, bastera cercare i punti s, v, t in cui la retta $(c\ s,\ c_1\ s_1)$ parallela a $\rho'\ \rho''$ incontra i piani delle faccie medesime; poichè uniti i due punti s_1 e b_2, la retta $b_2\ b_1$ sarà l'ombra portata sulla faccia orizzontale del primo gradino, e su quelle degli altri saranno $c_2\ c_3$ il cui prolungamento passa per v, e $t\ d_4$ ambedue parallele ad $s\ b_1\ b_2$. Proiettati i punti b_1, c_2, c_3, d_4, in b'_1, c'_2, c'_3, d'_4 le rette $b'_1\ c'_2$, $c'_3\ d'_4$ saranno le ombre sulle faccie verticali che dovranno pure resultare parallele. Finalmente l'ombra del lato $(c\ d,\ c_1\ d_1)$ sulla faccia orizzontale del terzo gradino partirà dal punto t e sarà $t\ t_1$ parallela a $c\ d$; sulla faccia verticale $d\ m$ del muro in cui è praticata la porta sarà $b'\ t'_1$ parallela ad R', e i punti t_1 e t', dovranno trovarsi sulla medesima perpendicolare alla linea di terra.

La verticale $(\alpha, a_1\ a_2)$ dà per ombra sul coordinato orizzontale $\alpha\ \alpha_1$, parallela ad R e termina al punto (α_1, α_2) in cui il raggio $(\alpha\ \alpha_1, a_1\ \alpha_2)$ incontra il piano medesimo. L'ombra del lato $(\alpha\ \beta, a_1\ b_1)$ è $\alpha_1\ \beta_1$ parallela ad $\alpha\ \beta$. L'ombra del lato $(\beta\ \gamma, b_1\ c_1)$ partirà dal punto β_1, e sarà diretta verso z traccia orizzontale del raggio $(\gamma\ z, c_1\ z_1)$; essa dunque è $\beta_1\ \gamma_2$. Cercato il punto (γ_1, γ'_1) in cui il raggio $(\gamma\ z,\ \beta'\ z')$ incontra il muro $n\ \delta$, ed unito il punto γ'_1, colla proiezione verticale γ'_2 del punto γ_2, la linea $\beta'\ \gamma'_1\ \gamma'_2$ sarà il contorno dell'ombra sul muro medesimo.

Le costole verticali $(m, m'\ m'')$; $(p, p'\ p'')$ portano ombra soltanto sul piano orizzontale $m''\ p''$ e sono proiettate secondo $m\ m'''$, $p\ p'''$ parallele ad R.

PROBLEMA IV. *Trovare le ombre di un fumaiolo sopra un tetto. (Fig. 10).*

37. Sceglieremo per coordinato verticale il piano che passa pel comignolo *(a b, a' b')* del tetto, e supporremo che *(a b c₁ d₁, a' b' c' d')* sia una parte di questo tetto, il cui piano è parallelo alla linea di terra, e che la retta *c d* sia la traccia orizzontale del piano che rappresenta il muro sul quale il tetto si appoggia.

Il solido parallelipipedo *(C, C')* sia il fumaiolo del quale si cerca l'ombra, ed *(R, R')* la direzione dei raggi luminosi.

Linea di separazione d'ombra e di luce — Dalla semplice ispezione del corpo desumesi, come nel Problema del N° 31, quali facce di esso trovansi nell'ombra pura, quali sono illuminate, e quindi di quali costole componesi la linea di separazione d'ombra e di luce.

Ombra portata. — Due sono i metodi che possono condurre alla soluzione del problema.

PRIMO. Essendo (α, α') un punto della linea di separazione d'ombra e di luce, s'immagini condotto per esso un piano verticale parallelo ad *(R, R')*: questo piano taglierà evidentemente quello del tetto secondo la retta *(e f, e' f')*; e la retta $\alpha' \beta'$ parallela ad *R'* contenuta sullo stesso piano verticale, incontrando la *e' f'* in β', somministrerà il punto (β', β) ombra dell'altro (α, α').

Sulla medesima retta *(e f, e' f')* trovasi pure l'ombra (γ, γ') dell'altro punto (α, α'').

L'ombra della gronda *(d, c₁, d' c')* sul muro verticale *d c*, resulta parallela a *d' c'*. Un punto di essa si può ottenere in grazia del piano verticale ausiliario suddetto, il quale taglia la gronda nel punto *(f, f')*, ed il muro *d c*, secondo la verticale *(h, h' h')*.

La retta *f' g'* parallela ad *R'* incontra questa verticale in *h'*, che è un punto dell'ombra cercata.

SECONDO. Si tagli il piano del tetto col piano di profilo *S V S'*; l'ombra richiesta si proietterà su questo ultimo orizzontalmente in *b c*, e verticalmente in *b' c'*. Abbattendo sul coordinato verticale il piano di profilo, l'abbattimento

Digitized by Google

dell'ombra si troverà sulla retta $b' b'_1$, quello del fumaiolo in C'_1, e quello del punto precedentemente considerato in (α_1, α'_1).

Cercando ora la proiezione della retta (R, R') sul piano $S\ V\ S'$, l'abbattimento di questa proiezione sarà R'_1; onde condotta α'_1, β'_1 parallela ad R'_1, il punto (β'_1, β_1) sarà l'abbattimento della proiezione ausiliaria dell'ombra del punto (α, α'), e quindi (β', β) l'ombra di quest'ultimo punto.

38. *Osservazione* — Confrontando i due metodi esposti si scorge facilmente essere il primo infinitamente più semplice del secondo, il quale solo potrebbe servire a verificare l'esattezza delle costruzioni.

Crediamo perciò che questo esempio possa bastare a far conoscere che talvolta quei metodi che in un caso rendono agevoli le operazioni in un altro possono invece complicarle inutilmente. E perciò innanzi di ricorrere alla applicazione delle proiezioni ausiliarie sarà savio consiglio di esaminare bene se i mezzi ordinari rispondono alla voluta semplicità, come non di rado avviene.

CAPO IV.

Ombre dei Cilindri e dei Coni.

39. I piani tangenti alle superficie di questi corpi contengono, come è noto, *(Geom. Descritt.)* una generatrice, in tutti i punti della quale sono tangenti alla superficie medesima. Quelli adunque che potranno condursi paralleli alla direzione dei raggi luminosi, e dei quali lo inviluppo (N° 11) sarebbe una superficie cilindrica circoscritta al corpo dato, non potranno essere che in numero finito, e non più di due ogni qualvolta la base dei corpi in questione sia una linea chiusa e convessa.

Consegue da ciò che lo inviluppo notato riducesi nel caso attuale ad un sistema di due o più piani, e la linea di separazione d'ombra e di luce sulla superficie laterale dei cilindri

e dei conti al sistema di due o più generatrici. Talche trovato un punto solo di ciascuna, saranno queste generatrici immediatamente determinate.

PROBLEMA I. *Trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sul cilindro, e l'ombra da esso portata sui piani coordinati* (*Fig.* 11).

40. Sia il cilindro circolare retto, e posato colla base sul coordinato orizzontale; (A, A') ne sia il contorno apparente, ed (R, R') rappresenti la direzione dei raggi luminosi.

Linea di separazione d'ombra e di luce — Immaginiamo condotti due piani tangenti al cilindro e paralleli ad (R, R'): sarà cosa facile a scorgersi che la porzione di superficie compresa fra questi due piani, e che rimane dalla parte della sorgente della luce è interamente illuminata, mentre quella che rimane dal lato opposto e nell'ombra pura; sendochè nessun punto di questa ultima possa essere illuminato da alcun raggio luminoso il quale non sia costretto a traversare prima il cilindro. Laonde conducendo le rette $a\,a_1$, $b\,b_1$ parallele ad R e tangenti alla traccia del cilindro, le generatrici (a, a''), (b, b'') comporranno la linea di separazione d'ombra e di luce sulla superficie laterale di esso. Onde tutta la superficie orrizzontalmente proiettata in a e b si troverà nell'ombra pura; ma soltanto la parte (e b, $b''\,b'\,e'\,e''$) di quella sarà visibile sulle proiezioni del solido.

La base superiore $(f\,a\,b\,e,\ f'\,e')$ è interamente illuminata; del suo contorno la parte $(a$ e b, $a'\,e')$ è comune anche alla porzione di superficie che rimane nell'ombra; dunque la linea $(a$ e b, $a'\,e')$ appartiene a quella di separazione d'ombra e di luce.

Se la base inferiore del solido fosse elevata al di sopra del coordinato orizzontale, anche la parte $(a\,f\,b,\ f''\,b'')$ del suo contorno apparterrebbe alla linea di separazione d'ombra e di luce.

Ombra portata. — Le generatrici $(a, a'\,a'')$; $(b, b'\,b'')$ portano sul piano coordinato orizzontale un'ombra parallela ad R, che sarà compresa fra i punti a_1 e b e le ombre dei punti (a, a'), (b, b'). Il rimanente dell'ombra sul medesimo piano è

un arco di circolo di raggio eguale a quello del cilindro dato, e avente per centro la traccia orizzontale v della retta $(s\,n, s'\,v')$ condotta per il centro della base superiore parallelamente alla direzione dei raggi luminosi (N° 25.)

La linea di terra interseca l'ombra della generatrice $(a, a'\,a'')$ nel punto a_1; quella della base superiore del cilindro nel punto b_2; quindi il contorno dell'ombra portata sul coordinato orizzontale sarà $a\,a_1\,b_2\,b_1\,b$, tangente in b_1 alla retta $b\,b_1$.

L'ombra portata sul piano coordinato verticale dalla generatrice $(a, a'\,a'')$ sarà la verticale $a_1\,a_2$ compresa fra la linea di terra e l'ombra a_2 del punto (a, a'). Il rimanente dell'ombra apparterrà alla traccia verticale della superficie cilindrica formata dal fascio dei raggi luminosi che passano per i diversi punti della linea $(a\,b\,c, a'\,c')$. Questo traccia, che noi sappiamo costruire, è una ellisse intersecata dalla linea di terra nel punto b_2. Talchè il contorno dell'ombra portata sul coordinato verticale sarà la linea $a_1\,a_2\,b_2$.

41. *Osservazione I* — La verticale $a_1\,a_2$ deve resultare tangente all'ellisse $a_2\,b_2$ nel punto a_2: poichè $a\,a_1\,a_2$ è il piano verticale che determina il contorno apparente $a\,a_1$ della superficie cilindrica formata dai raggi luminosi sul coordinato orizzontale, e quindi la sua traccia verticale $a_1\,a_2$ deve riescire tangente a quella della superficie medesima nel punto che è traccia verticale della generatrice di contatto

Alla ellisse medesima resulta pure tangente la retta $e'\,g'$, poichè essa è la intersezione del piano di quella col piano tangente alla notata superficie cilindrica condotto per la generatrice del punto (e, e'), contenendo questo piano la tangente alla direttrice della superficie stessa nel punto (e, e') e resultando perciò perpendicolare al coordinato verticale. Quindi il punto di contatto della ellisse colla retta $e'\,g'$ si troverà nella traccia verticale g' della retta medesima.

42. *Osservazione II.* — Se il cilindro dato fosse obliquo, o avesse un'altra base qualunque, la soluzione sarebbe la medesima

PROBLEMA II. — *Dato un cono circolare retto, trovare la linea di separazione d'ombra e di luce, e l'ombra portata sui piani coordinati* (*Fig.* 12).

43. Sia (C, C') il cono dato, ed (R, R') la direzione dei raggi luminosi.

Linea di separazione d'ombra e di luce. Se pel vertice (V, V') conducesi una retta parallela ad (R, R') la sua traccia orizzontale somministrerà l'ombra V_1 che porterebbe il vertice stesso nel coordinato orizzontale: condotte per V_1 le rette $V_1 A$, $V_1 B$ tangenti alla base del cono, che si suppone situata sul coordinato medesimo, avremo le tracce orizzontali di due piani tangenti e paralleli alla direzione dei raggi luminosi. Talchè le generatrici di contatto $(A V, A' V')$; $(B V, B' V')$ comporranno la linea di separazione d'ombra e di luce: il settore $V A D B$, e il triangolo $V' B' D'$ rappresenteranno sul corrispondente piano coordinato la parte del cono che rimane nell'ombra pura.

Quando la base del cono non combaciasse col coordinato orizzontale, oltre le due notate generatrici, farebbe parte della linea di separazione d'ombra e di luce anche l'arco $(A E B, E' B')$ di questa base.

Ombra portata — Sul coordinato orizzontale cominciano dai punti A e B le ombre delle generatrici $(A V, A' V')$, $(V B, V' B')$ e terminano al punto V_1 ombra comune degli altri estremi delle generatrici medesime; onde le tracce stesse $V_1 A$, $V_1 B$ dei piani tangenti saranno le ombre cercate. Rimanendo però queste intersecate in p e q dalla linea di terra, la rimanente parte di esse si troverà sul coordinato verticale, e sarà costituita dal sistema delle due rette $p V''$, $q V''$ concorrenti nella traccia verticale V'' della retta $(V V_1, V' V'')$, che è ombra del vertice.

Talchè il contorno dell'ombra portata dal cono sui piani coordinati sarà $A p V'' q B D A$.

44. *Osservazione I.* — Se la traccia orizzontale della retta $(V V_1, V' V'')$ condotta per il vertice del cono si trovasse al di quà del piano coordinato verticale, il cono porterebbe ombra sopra il solo coordinato orizzontale, e questa ombra sa-

rebbe costituita dal sistema delle due rette comprese fra i punti A e B e la traccia suddetta.

Se questa traccia cadesse dentro la traccia orizzontale del cono, tutta la sua superficie laterale sarebbe illuminata.

45. *Osservazione II.* — La medesima soluzione avrebbe luogo se il cono fosse obliquo.

46. *Osservazione III.* — Se dovesse trovarsi l'ombra portata da un punto (M, M') sul cono basterebbe per il punto dato condurre una retta parallela ad (R, R') ed una per il vertice, e costruire il piano determinato da ambedue. Questo piano resulterà parellelo alla direzione dei raggi luminosi; onde se la sua traccia orizzontale $V_1 T$ taglia quella del cono, vi saranno due generatrici incontrate dal raggio luminoso del punto dato, ma sopra una sola di esse si troverà l'ombra cercata Nel nostro caso questa generatrice è $(V s, V' s')$, e l'ombra richiesta è il punto (m, m')

In un modo analogo al precedente si potrà trovare l'ombra portata sul cono da un altro punto, e quindi da una linea qualunque.

Se la traccia del piano secante non avesse alcun punto a comune con quella del cono, il punto dato non porterebbe ombra su questo.

Giova osservare che la retta $(V M, V' M'')$ è situata sul piano secante, e per conseguenza la sua traccia orizzontale dovrà trovarsi su quella del piano medesimo.

PROBLEMA III. *Trovare l'ombra portata nella superficie concava del cilindro da una delle sue basi (Fig 13).*

47. Prendiamo ad esempio una volta cilindrica, che in arte ha il nome di volta a botte. Sia il coordinato verticale la parete interna d'uno dei muri che la sostengono, e la linea dalla quale comincia la volta, altrimenti detta linea d'imposta, sia $\alpha' \beta'$. Supponiamo la volta terminata dai due piani verticali e perpendicolari alle sue generatrici $A A'' A'$, $B B'' B'$. Supponiamo inoltre la volta tagliata longitudinalmente lungo la generatrice più alta $(A B, A' B')$ da un piano $A B$ parallelo al coordinato verticale, e immaginiamo remossa la semivolta che rimarrebbe al di quà di questo piano Rimarrà allora

l'altra metà di essa verticalmente proiettata in $A''\ A'\ B'\ B''$ ed orizzontalmente in $A\ A''\ B''\ B$, e la direttrice della volta avrà per proiezioni le rette $A''\ A$, $\alpha'\ A'$. La direzione dei raggi luminosi sia $(R,\ R')$.

Linea di separazione d'ombra e di luce. — Qui veramente l'uso delle proiezioni ausiliarie è indispensabile. Prendasi a tale oggetto per coordinato ausiliario lo stesso piano $B\ B''\ B'$, e dopo avere proiettato su di esso la volta e la retta $(R,\ R')$, si abbatta sul coordinato verticale. L'abbattimento della proiezione ausiliaria della volta sarà la sua direttrice $(A\ A'',\ \alpha'\ A'')$, che noi supponiamo essere un quarto di ellisse $\beta'\ e_1\ b$, ed R'_1 sarà quello della direzione dei raggi luminosi.

La volta essendo così riferita al coordinato verticale e al piano ausiliario $B\ B''\ B'$, il suo piano tangente parallelo ad $(R',\ R'_1)$ resulterà perpendicolare al coordinato ausiliario, e la tangente alla curva $\beta'\ e_1\ b$ parallela ad R'_1 somministrerà il punto e_1, e con esso la curva $b\ d_1\ e_1$ per linea di separazione d'ombra e di luce sulla direttrice la generatrice $(A\ B,\ A'\ B')$ sarà l'altra parte della linea medesima.

Ombra portata. — L'ombra della generatrice $(b,\ A'\ B')$ sarà una retta parallela ad essa, poichè secondo una retta simile verranno sempre tagliati la volta e il muro $A''\ \alpha'\ \beta'\ B''$ sul quale insiste, da quel piano che bisogna condurre per $(b,\ A'\ B')$ parellamente ad $(R',\ R'_1)$ per trovare quell'ombra.

Questo piano resultando perpendicolare al coordinato ausiliare $B\ B''\ B'$ avrà su di esso per traccia una retta $b\ b_1$ parallela ad R'_1, e taglierà in conseguenza la volta secondo la generatrice ausiliarmente proiettata in b_1. Ora se dal punto A' conducesi una retta parallela ad R', questa incontrerà la generatrice suddetta in un punto b' che sarà l'ombra di $(A,\ A')$; e quindi $b'\ b''$ quella della retta $(A\ B,\ A'\ B')$.

L'ombra della parte $(b\ d_1\ e_1,\ A'\ e')$ della direttrice avrà principio evidentemente del punto $(e_1,\ e')$, e terminerà all'altro $(b_1,\ b')$.

Ogni altro punto $(c_1,\ c')$ di essa potrà determinarsi per mezzo di un piano secante $d_1\ c_1$ parallelo ad R'_1 condotto per un punto qualunque $(d_1,\ d')$ dell'arco medesimo. Poichè da questo piano avremo intersecata la volta secondo una generatrice

(e_1, c'' c') sulla quale si troverà l'incontro c' della volta stessa colla retta d' c' parallela ad R' condotta per d'.

Volendo la proiezione orizzontale dell'ombra ora costruita è necessario e sufficiente trovare quella dei punti b_1 d_1 e_1 c_1 b_1. Questa si ottiene facendo tornare il piano coordinato ausiliario alla primitiva sua posizione. Così il punto abbattuto in d_1 avrà la sua proiezione orizzontale in d; la proiezione orizzontale della generatrice ausiliarmente proiettata in c_1 sarà c_2 e, e la retta d e parallela ad R determinerà su di essa la proiezione orizzontale c dell'ombra del punto (d, d').

48. *Osservazione I.* — La proiezione orizzontale dell'ombra può servire a verificare l'esattezza delle costruzioni, dovendo ciascun punto c di questa proiezione trovarsi col corrispondente c' dell'altra sopra una medesima perpendicolare alla linea di terra.

49 *Osservazione II.* — Le operazioni rimangono le stesse, qualunque sia la direttrice della volta, e la direzione dei raggi luminosi.

PROBLEMA IV. — *Trovare l'ombra portata nella superficie concava d'un tronco di cono dalla circonferenza d'una delle sue basi* (*Fig* 15)

50 Preso il coordinato orizzontale perpendicolare all'asse, sia B' C' C'' B'' la proiezione verticale di un tronco di cono circolare retto. I circoli D C, D B saranno respettivamente le proiezioni orizzontali delle due basi, che verticalmente sono proiettate sulle rette C' C'', B' B'' parallele alla linea di terra. La retta (R, R') sia finalmente la direzione dei raggi luminosi. La figura suppone che la porzione del tronco proiettata orizzontalmente su B M B_1 non renda invisibile l'altra proiettata su B G B_1.

Linea di separazione d'ombra e di luce. — Se per il vertice (D, d') del cono, facile a costruirsi, conducesi una retta (D E, d' E') parallela ad (R, R'), il piano B'' B' della base superiore del tronco sarà incontrato da questa retta nel punto (E, E'); e le tangenti E L, E M alla circonferenza B D potranno considerarsi come le tracce sul piano stesso di due piani tangenti al cono e paralleli alla direzione dei raggi

luminosi. I punti di contatto L, M determineranno su quelle circonferenze l'arco $L\,B\,M$ che è linea di separazione d'ombra e di luce; poichè ogni piano condotto per $(D\,E,\ d'\,E')$, e la cui traccia è fuori dell'angolo $L\,E\,M$, non interseca il tronco, e non può quindi contenere alcun raggio luminoso che incontri la sua superficie; mentre per ciascuno di quei piani, le cui tracce sono dentro l'angolo sunnominato si avrà una sezione prodotta nel tronco, ed un raggio luminoso che incontrerà in un qualche punto quella sezione.

Ombra portata. — Se vuolsi, per esempio, l'ombra del punto $(F,\ F')$ condurremo per esso e per la retta $(D\,E,\ d'\,E')$ un piano. la intersezione di questo col piano della circonferenza $B\,D$ sarà la retta $E\,F\,G$, e la intersezione colla superficie del cono si comporrà delle due generatrici proiettate orizzontalmente in $F\,D$, e $G\,D$: onde la sezione prodotta nel tronco avrà per proiezione orizzontale la linea spezzata $G\,g\,f\,F$. Conducendo ora per il punto $(F,\ F')$ di questa sezione la retta $F\,h$ parallela ad R, il suo incontro h colla retta $G\,g$ determina la proiezione orizzontale dell'ombra portata dal punto $(F,\ F')$ sulla superficie interna del tronco. La proiezione verticale h' si troverà o con la perpendicolare alla linea di terra condotta per h fino all'incontro della $G'\,h'$, o se questo incontro avesse luogo sotto un angolo troppo acuto, servendosi della proiezione verticale $F'\,f'$ della retta parallela ad $(R,\ R')$ condotta per il punto $(F,\ F')$.

Per ogni altro piano secante, la cui traccia sia dentro l'angolo $L\,E\,M$ avremo un punto dell'ombra portata, la quale terminerà ai medesimi punti $(L,\ L')$, $(M,\ M')$, che sono pure i limiti della linea di separazione d'ombra e di luce.

Fra tutti questi punti merita di essere a preferenza determinato quello t' che trovasi sul contorno apparente del tronco. A tale oggetto basterà condurre per B_1 la retta $B_1\,E$; questa rappresenterà un piano secante il tronco secondo la generatrice $(B_1\,D,\ B''\,d')$ e la sua base superiore nel punto $(n,\ n')$, onde la $n'\,t'$ parallela ad R' somministrerà il punto in quistione, nel quale la $B''\,d'$ toccherà la proiezione verticale dell'ombra cercata, per essere perpendicolare al coordinato verticale il piano tangente al cono in quel punto.

51. *Osservazione I.* — L'ombra portata sulla superficie

laterale del tronco può rimanere interrotta, come avviene nel nostro disegno, dalla base inferiore di esso in due punti (r, r'); (s, s') facili a costruirsi, trovandosi la linea di separazione d'ombra e di luce e la base inferiore del tronco in piani paralleli. Determinata la traccia (H, H') sul piano C' C'' della retta parallela ad (R, R') condotta per il centro (D, M') della linea di separazione d'ombra e di luce, si farà centro in H, e l'arco r s descritto col raggio H r = D B sarà il contorno dell'ombra sulla base inferiore del tronco.

Quando l'arco descritto col centro in H e col raggio eguale a D B non tagliasse la circonferenza C D, la base inferiore del tronco si troverebbe completamente nell'ombra.

In tal caso converrà determinare anche il punto dell'ombra portata che orizzontalmente proiettasi sopra H D, il quale verrà somministrato da una costruzione analoga a quella indicata per avere il punto t'.

Giova notare che l'arco s M deve resultare simmetrico con l'arco L h r rispetto alla retta E D; lo che serve a determinarlo, trovato soltanto il primo L h r.

52. *Osservazione II.* — L'ombra portata sulla superficie laterale interna del tronco di cono è una ellisse *(Fig. 15)*. Infatti: sia a b la proiezione della circonferenza base del tronco C_0 fatta sopra un piano condotto per l'asse, e della quale una parte diviene la direttrice del cilindro C_1 formato dai raggi luminosi. Tagliando il cilindro e il cono con un piano c d perpendicolare al piano delle due rette a o, s o, il cono e il cilindro resulteranno tagliati secondo due ellissi aventi l'asse comune c d, e due punti comuni m; laonde fatto c $d = a$, e detti b, b_1 gli altri duo assi, avremo per uno di questi punti:

$$a^2\ y_1^2 + b^2\ x_1^2 = a^2\ b^2$$
$$a^2\ y_1^2 + b_1^2\ x_1^2 = a^2\ b_1^2$$

da cui deducesi $b_1^2\ (a^2 - x_1^2) = b^2\ (a^2 - x_1^2)$, e finalmente $b_1 = b$.

Le due ellissi adunque coincidono in una sola. Ora la porzione d'ellisse m d essendo situata ad un tempo sul tronco e sul cilindro, può considerarsi come la intersecazione di queste due superficie; e per conseguenza sarà l'ombra portata nel cono dall'arco di cerchio a m, direttrice del cilindro formato dai raggi luminosi.

Problema V. *Dato il solido* (s, s') (*Fig.* 46) *composto di due zoccoli circolari* z', z''; *di un fusto cilindrico verticale* $a'\ b'\ c'\ d'$ *munito di una fascia* f' *presso la base superiore, e sormontato da un cono circolare retto* $A'\ d'\ c'$ *avente la stessa base del fusto: trovare la linea di separazione d'ombra e di luce, e il contorno delle ombre portate*

53. *Linea di separazione d'ombra e di luce* — La direzione dei raggi luminosi essendo (R, R'), e i tre circoli concentrici in A costituendo la proiezione orizzontale di tutto il solido, se conducansi ad essi altrettante tangenti parallele ad R, i punti di contatto α, β, γ, e i loro simmetrici α_1, β_1, γ_1, somministreranno la linea di separazione d'ombra e di luce sulle parti cilindriche del solido; si avrà poi quella relativa al cono conducendo per il suo vertice una parallela ad (R, R') e dal punto (v, v') in cui questa incontra il piano della sua base, tirando le tangenti $v\ \delta$, $v\ \delta_1$ al circolo $A\ \alpha$.

Così la porzione del cono proiettata orizzontalmente nel settore $\delta\ A\ \delta_1$ e verticalmente nel triangolo $\delta'_1\ A'\ c'$ sarà nell'ombra pura; e in questa medesima ombra si troveranno anche le parti $(\alpha_1\ \delta\ \alpha,\ \alpha'\ b'\ \alpha''_1\ \alpha')$ del fusto cilindrico, come le altre della fascia e degli zoccoli che la figura manifesta e che sono ben facili a determinarsi.

Ombra portata. — Cominciando da quelle parti del solido che portano ombra sulle altre parti del medesimo, si presenta in prima la circonferenza inferiore della fascia f' che porta ombra sul fusto. Se prolungansi fino ad e, ed s le tracce orizzontali dei piani tangenti al fusto stesso lungo le generatrici $(\alpha,\ \alpha'\ \alpha''_1)$, $(\alpha_1,\ \alpha_1'\ \alpha_1'')$, si vede che della notata circonferenza il solo arco $(e\ p\ s,\ m'\ p'\ s')$ è quello che porta l'ombra cercata; e se dal punto n piede della generatrice $(n,\ a'\ d')$ del fusto conducesi $n\ m$ parallela ad R, si vedrà di più che di quell'arco soltanto la parte $(m\ p\ s,\ m'\ p'\ s')$ porterà un'ombra visibile sulla figura.

Si avrà quella n' del punto (m, m') colla retta $m'\ n'$ parallela ad R', e l'altra (a, f') del punto (s, s') colla retta $s'\ f'$ parallela pure ad R'. Queste due ombre sono evidentemente

Google

i limiti di quella che si cerca. L'ombra di un altro punto qualunque (p, p'), si troverà conducendo $(p\,q,\ p'\,q'_1)$ parallela ad (R, R') e determinando il punto (q, q') in cui questa retta incontra la superficie del fusto.

La base del cono porta ombra sulla faccia superiore della fascia, e lo stesso a da dirsi della base superiore dello zoccolo z'' rispetto alla faccia superiore dello zoccolo z'. Una parte di queste ombre è rettilinea e proviene dalle verticali dei punti α, β, α_1, β_1; essa ha principio da questi punti e cade sulle tangenti già condotte parallelamente ad R; l'altra parte è circolare, essendo i piani che ricevono le ombre paralleli alle linee che le portano. Per costruirla, basta trovare il punto in cui una parallela ad (R, R') condotta dal centro di ciascuna di queste linee incontra il respettivo piano, e che è per la fascia il punto o, per lo zoccolo z' il punto o. Allora condotte per i punti o, ed o_1 due parallele ad $\alpha\ \alpha_1$, i punti i ed u in cui sono incontrate le tangenti in α e in β, a quelli corrispondenti in cui sono incontrate le tangenti in α_1 e β_1 saranno i limiti delle ombre cercate; e i piccoli archi descritti coi medesimi centri o, o_1 a coi raggi respettivi $o\ i$, $o_1\ u$ ne saranno le parti circolari.

Sul piano coordinato orizzontale portano ombra la circonferenza superiore dello zoccolo z'' quella dello zoccolo z', e le verticali dei punti γ, γ_1 appartenenti a quest' ultimo. Vi porta ombra il fusto ed una parte della circonferenza inferiore della fascia. Per avere la prima si opererà come sopra, e il suo contorno si comporrà delle linee rette $\gamma\ \varphi$, $\gamma_1\ \varphi_1$ e delle circolari $\varphi\ \pi$, $\pi\ \varepsilon$, $\varphi_1\ \pi_1$, $\pi_1\ \varepsilon_1$. L'ombra del fusto si comporrà delle parallele $\varepsilon\ \rho$, $\varepsilon_1\ \tau_1$ il cui prolungamento è tangente in α ed α_1; e la porzione circolare $\rho\ \tau$ proveniente dalla base inferiore della fascia sarà descritta col centro in θ e col raggio $A\ \beta$.

L'ombra della verticale del punto α_1 rimane spezzata dalla linea di terra in τ_1 e prosegue sul piano coordinato verticale in direzione perpendicolare alla linea di terra medesima. Essa termina nel punto e'', in cui viene incontrata dall'ombra della fascia. Si può determinare il punto di questa fascia che porta ombra in e'' prolungando la tangente $\tau_1\ \alpha_1$ fino all'incontro col circolo $A\ \beta_1$. Gli altri punti dell'arco $e\ \beta_1$ somministrano

il contorno ellittico $e'' x''$; la verticale $x'' y''$ è somministrata dalla verticale del punto β_1.

L'ombra del vertice del cono sul piano coordinato verticale è il punto A'_1; si hanno quelle delle generatrici $A\,\delta$, $A\,\delta_1$ cercando le ombre δ'', δ''' dei loro piedi. Le rette $A'_1\,\delta'$ $A'_1\,\delta'''$ prolungate sufficientemente dovranno passare per i punti t', in cui le tracce sul piano $d'\,c'$ dei piani tangenti al cono lungo le generatrici $A\,\delta$, $A\,\delta_1$ incontrano il piano verticale. Il rimanente dell'ombra portata dal solido non può offrire difficoltà.

CAPO V.

Ombre della Sfera.

54. La superficie inviluppo dei piani paralleli alla direzion dei raggi luminosi, e tangenti alla sfera resulta evidentemente un cilindro circoscritto ad essa; onde seguendo le tracce della soluzione del Problema noto in Geometria Descrittiva relativo alla costruzione del piano tangente ad una superficie di rivoluzione parallela ad una retta data, potrebbesi trovare la linea di contatto di quel cilindro. Ma le proprietà della sfera possono dispensarci dall'applicare quella soluzione, la quale, quantunque semplice, riescirebbe tuttavia di una complicanza maggiore di quella che, siccome passiamo a vedere, può usarsi

Problema I. *Trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sulla sfera, e l'ombra da essa portata sui piani coordinati* (*Fig.* 17.)

55. Sia (c, c') il centro della sfera data (S, S'), ed (R, R') la direzione dei raggi luminosi.

Linea di separazione d'ombra e di luce. — Immaginiamo condotto per il centro della sfera un piano parallelo alla retta

(R, R') ed una tangente alla sezione parallela alla retta stessa. Immaginiamo di poi che questa sezione e la sua tangente mantenendosi sempre nel medesimo piano ruotino attorno alla retta ($e\ t$, $c'\ s'$) rondotta per il centro parallelamente alla direzione dei raggi luminosi: dalla prima verrà generata la sfera data, e dalla seconda un cilindro circoscritto che sarà evidentemente la superficie sviluppabile inviluppo di tutti i piani tangenti alla sfera medesima, e paralleli ai raggi luminosi In questo movimento il punto di contatto della sezione colla tangente sunnominata descriverà una circonferenza di circolo grande in un piano perpendicolare all'asse ($e\ s$, $c'\ t'$); e questa circonferenza sarà la linea di separazione d'ombra e di luce.

È noto *(Geom. Descritt.)* che le proiezioni della circonferenza di un circolo sono due ellissi, gli assi delle quali sappiamo pure trovare. Nel caso attuale avremo subito gli assi della proiezione verticale della linea di separazione d'ombra e di luce, scegliendo il piano proiettante verticale della retta ($e\ t$, $c'\ s'$) per coordinato ausiliario, e immaginandolo abbattuto sul coordinato verticale attorno alla retta stessa $c'\ s'$. Allora il punto s' rimarrà fisso, il centro (c, c') della sezione fatta nella sfera verrà a situarsi sulla $c'\ C'$ perpendicolare a $c'\ s'$ ad una distanza $c'\ C' = d\ e$; per cui l'asse del cilindro circoscritto prenderà la posizione $C'\ s'$, la proiezione ausiliaria della sfera sarà il circolo di raggio $C'\ F'$ eguale al raggio della sfera medesima, e quella della linea di separazione d'ombra e di luce sarà il diametro $F''\ F'''$ perpendicolare a $C'\ s'$.

Ciò posto, il maggiore degli assi cercati sarà il diametro $g'\ g''$, ed il minore sarà la parte $f'\ f''$ della retta $c'\ s'$ determinata dalle proiezioni verticali f', f'' delle estremità F', F'' del diametro $F''\ F'''$.

Trovati gli assi potremmo costruire per punti la ellisse in questione coi metodi conosciuti: ma anche senza di essi abbiamo il modo di determinare questi punti con la massima facilità. Poiche essendo la linea di separazione d'ombra e di luce in un piano perpendicolare a quello della circonferenza $C'\ F'$ e da questo divisa in due parti eguali, ogni punto M' della $F''\ F'''$ sarà proiezione ausiliaria di due punti della ellisse proiezione verticale di quella linea; e questi punti saranno equi-

distanti dal coordinato ausiliario della quantità $M' N_1 = M' N_2$. Si avranno perciò le loro proiezioni m', m'' sul coordinato verticale riportando sopra la $M' m'$ perpendicolare a $c' s'$ le lunghezze $o' m' = o' m'' = M' N_1$.

Trovasi in un modo analogo l'ellisse $h\ g\ h_1\ g_1$ proiezione orizzontale della linea di separazione d'ombra e di luce, mediante la proiezione ausiliaria fatta sul piano proiettante orizzontale della retta $(c\ t,\ c'\ s')$.

Giova osservare che la circonferenza $c' u'$ avendo per proiezione orizzontale il diametro $u\ v$, e la circonferenza $c\ u$ proiettandosi verticalmente secondo il diametro $u'\ v'$, i punti g' e g'' devono trovarsi coi punti g e g_1 sulla stessa perpendicolare alla linea di terra; e la medesima condizione deve verificarsi fra i punti h, h_1 ed i loro corrispondenti h' ed h'_1.

Ombra portata — L'ombra portata su ciascuno dei piani coordinati sarà pure una ellisse, poichè è l'intersecazione d'un cilindro circolare retto con un piano obliquo al suo asse.

Quella portata sul coordinato verticale ha per centro la traccia verticale s' della retta $(c\ t,\ c'\ s')$, per asse maggiore la parte F', F'', della retta $c'\ s'$ determinata dalle rette $F'\ F_1'$, $F''\ F''_1$, parallele a $C'\ s'$, e per asse minore la $G'\ G''$ perpendicolare in s' alla $c'\ s'$, determinata dalle rette $g'\ G'$, $g''\ G''$ parallele a $c'\ s'$. Tutti i suoi punti possono poi determinarsi nel modo seguente. Da ogni punto M' proiezione ausiliaria di due punti $(m',\ M')$; $(m'',\ M'')$ della linea di separazione d'ombra e di luce, si ronduca una retta $M'\ N'$ parallela alla proiezione ausiliaria $C'\ s'$ della retta $(c\ t,\ c'\ s')$, e dalle proiezioni verticali di questi punti due rette $m'\ m_1$, $m''\ m_2$ parallele alla proiezione verticale della retta stessa. i punti d'incontro m_1 ed m_2 di queste ultime colla $m,\ m_1$ perpendicolare alla linea $c'\ s'$, e condotta per N', apparterranno alla ellisse in quistione; poichè le indicate costruzioni sono quelle stesse richieste dalla ricerca delle tracce sul coordinato verticale delle rette considerate riferite al coordinato verticale medesimo, e a quello ausiliario.

Operazioni analoghe somministreranno la ellisse $k,\ H\ k_1\ H_1$ per l'ombra portata dalla sfera sul coordinato orizzontale.

Se una di queste ellissi è tagliata dalla linea di terra in due punti a e b nei medesimi punti dovrà esserlo anche l'altra,

e il contorno dell'ombra portata sopra ambedue i piani coordinati si ridurrà alla linea $a\ F'_1\ G''\ b\ H_1\ k_1\ a$.

56. *Osservazione.* — Ciascuna delle proiezioni ausiliarie della sfera può essere utile per determinare l'ombra portata sulla sfera medesima da un punto qualunque (P, P').

Per determinare questa ombra s'immagini condotta per il punto dato una retta $(P\,q,\ P'\,q')$ parallela ad (R, R'). Il piano proiettante orizzontale di questa retta taglia evidentemente la sfera secondo un circolo piccolo proiettato orizzontalmente in $p\,q$, e ausiliarmente sul circolo di raggio $c\,p_1 = v\,p$. La proiezione ausiliaria del punto dato si troverà in P_1 sulla perpendicolare condotta da P alla $P\,q$ e ad una distanza $P\,P_1 = Q\,P'$. Tirando $P_1\,x_1$ parallela alla proiezione ausiliaria $C\,t$ della direzione dei raggi luminosi sarà x_1 la proiezione ausiliaria dell'ombra richiesta. La perpendicolare condotta da x_1 alla $P\,q$ ne determina la proiezione orizzontale x, e quindi se ne ha immediatamente quella verticale x' sopra $P'\,q'$.

Se dovessimo costruire l'ombra portata sulla sfera (S, S') da una linea qualunque, basterebbe ripetere per ciascuno dei suoi punti, la costruzione fatta per il punto (P, P').

Se avvenisse che la $P_1\,x_1$ non incontrasse la circonferenza $C\,p_1$, il punto dato non porterebbe ombra sulla sfera.

PROBLEMA II. — *Trovare l'ombra portata in una calotta sferica dalla circonferenza che le serve di base.* (*Fig.* 18).

57. Sia (S, S') la calotta; ed (R, R') la direzione dei raggi luminosi.

Linea di separazione d'ombra e di luce. — Se per le estremità del diametro $o_1\ o_2$ perpendicolare ad R si immaginano condotti due piani verticali e paralleli alla direzione dei raggi luminosi, essi resulteranno tangenti nei medesimi punti alla calotta, e al cilindro che ha per direttrice la circonferenza base della prima e le generatrici parallele ad (R, R'). Si vede in oltre che la superficie della calotta può essere incontrata soltanto dalle generatrici di questo cilindro che si appoggiano sulla semicirconferenza $o_1\ a\ o_2$; sarà quindi linea di separazione d'ombra e di luce questa semicirconferenza.

Ombra portata. — Prendasi un piano coordinato ausiliario $X^1 Y^1$ verticale e parallelo alla direzione dei raggi luminosi, e si proietti su questo la callotta e la retta (R, R'). La proiezione della prima sarà un semicircolo eguale ad S', avente il diametro parallelo ad $X^1 Y^1$ e il centro o_1 situato sopra una perpendicolare ad $X^1 Y^1$ distante da questa di una quantità $p_1 o_1 = p' o'$. La proiezione ausiliaria della seconda sarà la retta $R_1 r_1$ che congiunge la proiezione ausiliaria a_1 del punto (a, a'), con quella della traccia orizzontale r della retta (R, R').

Questa proiezione ausiliaria può considerarsi anche come quella della sezione prodotta nella callotta dal piano verticale $R r$, per cui il punto a_1 sarà proiezione ausiliaria di quello in cui la generatrice del punto (a, a') incontra la callotta, e da esso potremo dedurre il punto a_2 ombra portata dal punto (a, a'). Per aver l'ombra di un altro punto (b, b_1) s'immaginerà il piano verticale b e parallelo ad (R, R'); questo taglia la callotta secondo un circolo piccolo, la cui proiezione ausiliaria avrebbe per centro o_1 e per raggio $o_1 b_1$; condotta per b_1 una parallela ad $a_1 r_1$, il punto c_1 in cui quel circolo sarà incontrato, somministrerà come a_1 l'ombra cercata c. Operando nel modo istesso per ogni altro punto d della linea di separazione d'ombra e di luce troveremo per linea d'ombra portata la curva $o_2 a_2 o_2$.

La proiezione verticale di questa ombra si trova immediatamente, per mezzo delle proiezioni verticali dei punti b delle linee di separazione d'ombra e di luce, e delle rette $b' c'$ parallele ad R'.

Intendendo remossa la semi callotta proiettata in $d a d_1$, resterà visibile la parte $o'_2 c' v'$ della proiezione verticale dell'ombra.

58. *Osservazione I.* — È facile dimostrare che i tre punti a_2, c_1, o_1, sono in linea retta: in effetto i due triangoli $a_1 o_1 a_2$, $b_1 o_1 c_1$ sono isosceli, e siccome $b_1 c_1$ è parallela ad $a_1 a_2$ l'angolo al vertice $a_1 o_1 a_2$ dell'uno dovrà resultare eguale all'angolo al vertice $b_1 o_1 c_1$ dell'altro. D'altronde questi due angoli hanno il vertice nel medesimo punto o_1 e i due lati $o_1 a_1$, $o_1 b_1$ sulla stessa linea retta; dunque è forza che anche gli altri due $o_1 c_1$, $o_1 a_2$ cadano l'uno sull'altro.

La proiezione ausiliaria dell'ombra cercata essendo una linea retta, quest'ombra sarà una curva piana. Ciò posto, noi possiamo dispensarci dal tracciare i diversi circoli $o_1\ b_1$, poichè per aver l'ombra d'un altro punto qualunque d, d_1 basterà condurre d e parallela ad R, d_1 e parallela ad $R_1\ r_1$ e dal punto e_1 in cui quest'ultima incontra la $o_1\ o_2$ condurre e_1 e perpendicolare ad $X'\ Y'$: il punto e sarà l'ombra cercata.

59. *Osservazione II.* — Ogni punto b_1, d_1 .... è proiezione ausiliaria di due punti della semicirconferenza $o_2\ a\ o_2$ simmetricamente posti rapporto ad R, onde per ogni punto c_1, e_1 .... si avranno due punti dell'ombra portata.

60. *Osservazione III.* — Può dimostrarsi altrimenti che il contorno dell'ombra portata nella calotta sferica dalla circonferenza che le serve di base, è una curva piana.

Sieno S e C una sfera ed un cilindro avente per direttrice il circolo grande $n\ b$ (*Fig. 19*); e questi due corpi sieno proiettati sopra un piano condotto per l'asse del secondo e perpendicolare al circolo $n\ b$. È noto che se il cilindro si taglia con un piano $c\ d$, simmetricamente posto rispetto al suo asse con l'altro piano $n\ b$, la sezione resultante è un circolo: ora questo circolo appartiene evidentemente anche alla sfera, dunque l'uno e l'altro possono considerarsi come formanti insieme la linea di penetrazione delle due superficie; e quindi l'uno di essi come l'ombra portata dall'altro nella superficie concava della sfera.

PROBLEMA III. *Trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sulla nicchia sferica e la sua ombra portata* (*Fig.* 20.)

61. È la nicchia sferica un cavo praticato in un muro che si compone: 1° d'un semicilindro circolare retto e verticale; 2° d'un quarto di sfera avente lo stesso raggio del cilindro, e sovrapposto sulla base superiore di questo.

Preso per piano orizzontale coordinato quello della base inferiore del semicilindro, il semicerchio $A\ c\ B$ sarà la proiezione orizzontale del cilindro e della sfera; e preso il piano coordinato verticale parallelo a quello che passa per $A\ B$, il rettangolo $A'\ A''\ B''\ B'$ e il semicircolo $A''\ F''\ B''$ sa-

ranno respettivamente le proiezioni verticali dell' uno e dell' altra

Sono parti accessorie e di ornamento: 1° un archivolto $a'\ a''\ f''\ b''\ b'$, che sporge sulla faccia $M\ a_1\ b_1\ N$ del muro della quantità $a\ a_1 = b\ b_1$; 2° una fascia $(P\ m_1\ m\ n\ n_1\ Q,\ P'\ Q'\ Q''\ P'')$ che sporge sulla faccia dell' archivolto della quantità $m\ m_1$, e su quella del muro della quantità $m_1\ m_2$.

Linea di separazione d' ombra e di luce. — Essendo $(R,\ R')$ la direzione dei raggi luminosi, si scorge facilmente che sul contorno del cilindro, la generatrice $(A,\ A'\ A'')$ appartiene alla linea di separazione d'ombra e di luce, e che sulla semicirconferenza $A''\ F''\ B''$ della semicalotta sferica si avrà il limite di quella linea conducendo ad essa quel piano tangente che toccandola in un punto della semicirconferenza medesima, e nel tempo stesso parallelo alla retta $(R,\ R')$. Ora questo piano tangente avrà la sua traccia verticale parallela ad R' e tangente alla linea $A''\ F''\ B''$; dunque il punto di contatto O' di questa tangente sarà il limite cercato, e quindi $A'\ A''\ F''\ O'$ sarà la linea di separazione d' ombra e di luce sul contorno della nicchia.

Sull' archivolto troveremo con eguale facilità la corrispondente linea di separazione d' ombra e di luce, considerando che l' arco $a''\ f''\ b''$ è direttrice d' una superficie cilindrica, della quale il piano tangente in o' resultando parallelo ad $(R,\ R')$ somministra per una parte di questa linea la generatrice del punto o', per l' altra parte l' arco $o'\ b''$; e che sulla faccia verticale $B''\ b'$ dell' archivolto medesimo questa linea riducesi allo spigolo $b'\ b''$. Onde sulla indicata parte accessoria della nicchia sarà $o'\ b''\ b'$ la linea di separazione d' ombra e di luce.

Sulla fascia infine la linea in questione è determinata dalla spezzata $(P\ m_1\ m\ n\ n_1\ Q,\ P'\ m'\ n'\ Q')$, dallo spigolo verticale $(n,\ n'\ n'')$ e dall' altro orizzontale $(n\ n_1,\ n'')$.

Ombra portata. — Per ottenere l' ombra portata dall' arco $A''\ F''\ O'$ supporremo esistente la semisfera, della quale alla nicchia non appartiene che la metà, e ci gioveremo della soluzione indicata al N.° 57, ricorrendo alla proiezione ausiliaria della sfera sopra un piano $X'\ Y'$ parallelo alla direzione dei raggi luminosi, e perpendicolare al coordinato verticale. Questa proiezione sarà la metà di un gran circolo, il cui centro

Digitized by Google

si troverà sopra F' O'' perpendicolare ad R' ad una distanza $o_1 o'' = F F_1$ e il cui raggio sarà $o'' G'' = F' G' = A F$. Si otterrà la proiezione ausiliaria della direzione dei raggi luminosi, cercando quella d'una retta qualunque $(G H, G' H')$ parallela ad essa; e si troverà proiettando la sua traccia H' in H'', sopra X' X', e tirando G'' H''. Ciò fatto, la o'' h'' sarà la proiezione ausiliaria dell'ombra cercata O' m'_1 g' h' che facilmente si costruisce come al N.° 57.

Fin qui noi abbiamo supposta esistente la semisfera; ma nel nostro caso terminando essa al piano orizzontale A'' B'' non si dovrà ritenere della curva trovata che la parte o' m'_1 g' ombra portata dall'arco O' m' g''. L'altra porzione di arco proiettato in g'' G' A'' porta ombra nell'interno del cilindro, ed un punto qualunque (l, l') di quest'ombra si trova, ricorrendo al principio dei piani secanti. Infatti, il piano verticale L l condotto per il punto (L, L') parallelamente ad (R, R') taglia il cilindro secondo la generatrice $(l, F_1 l')$, e il punto (l, l') in cui viene questa generatrice incontrata dalla retta $(L\ l, L'\ l')$ parallela ad (R, R') sarà l'ombra portata dal punto (L, L'). Nello stesso modo si determinerà il punto (c, c'') ombra della estremità (A, A'') dell'arco, e ogni altro punto della curva c'' l' g'.

Resta che si determini l'ombra portata dalla verticale $(A, A'$ $A'')$. I raggi luminosi che partono dai diversi punti di questa retta formano un piano verticale che ha per traccia orizzontale la retta A c parallela ad R, e taglia il cilindro lungo la generatrice $(c, c'$ $c'')$. Sarà dunque c' c'' l'ombra portata dalla retta $(A, A'$ $A'')$ nell'interno della nicchia; e la sola A c determinerà l'ombra sulla base di esso.

Cerchiamo l'ombra dell'arcbivolto sul muro. La linea di separazione d'ombra e di luce si compone, come sopra si è detto, dell'elemento lineare perpendicolare al muro, e proiettato in o', dell'arco o' b'', e della retta $(b, b'$ $b'')$. L'ombra portata dall'elemento lineare sarà una retta tangente in o' ad o' b''. L'ombra portata dall'arco o' b'' sarà un'altro arco di circolo f''_1 s' avente lo stesso raggio o' F' dell'arco o' b'', poichè il piano del muro è parallelo a quello di quest'arco. Si troverà il centro dell'ombra, conducendo per il centro (F, F'') una parallella ad (R, R'), e trovando il punto (f, f') in cui essa

incontra il piano del muro: questo punto sarà il centro cercato. L'ombra della verticale $b'' b'$ sarà $s' s''$ parellela a $b' b''$, e si otterrà cercando l'incontro s' col piano del muro della retta $(b\ s,\ b'' s')$ condotta per il punto $(b,\ b'')$ parallelamente ad $(R,\ R')$

Egualmente facile è il trovare l'ombra portata sul muro dalla fascia $(P\ m_1\ m\ n\ n_1\ Q,\ P'\ Q'\ Q''\ P'')$ siccome è dimostrato dalla figura.

62 *Osservazione.* — Le due curve $O'\ m_1'\ g'$, $g'\ l'\ c''$ debbono avere una tangente comune in g'. Poichè i due cilindri aventi per direttrici gli archi $O'\ m'\ g''$, $g''\ G'\ A''$ e le generatrici parallele ad $(R,\ R')$, hanno comune il piano tangente lungo la generatrice proiettata in $g''\ g'$; e in un solo pure si confondono i due piani tangenti in g' alla sfera, e al cilindro verticale della nicchia, essendo entrambi determinati dalla tangente in quel punto alla semicirconferenza $A\ l\ B$, e dalla generatrice verticale corrispondente del cilindro.

È da notarsi ancora che il piano verticale A e resulta tangente al cilindro che somministra nella nicchia l'ombra dell'arco $A''\ G'\ g''$, a cagione della $A'\ A''$ tangente in A'' all'arco stesso; e che siccome il piano tangente al cilindro della nicchia nel punto c'' contiene la verticale $c'\ c''$, così la retta $c'\ c''$ dovrà resultare tangente in c'' alla curva $c''\ l'\ g'$.

Infine al cilindro che somministra l'ombra dell'arco $o'\ b''$ sul piano del muro resultano tangenti il piano tangente all'archivolto lungo l'elemento lineare proiettato in o_1, e il piano verticale $b\ s$; ne consegue dunque ad evidenza che le rette $o'\ f''_1$ ed $s''\ s'$ dovranno riescire tangenti all'arco $f''_1\ s'$ nei suoi punti estremi f''_1 ed s'.

CAPO VI.

Ombre delle superficie di rivoluzione.

63. È questo veramente il caso nel quale conviene applicare in tutta la sua generalità uno dei due metodi indicati al N.° 12 per la ricerca della linea di separazione d'ombra e di luce.

Applicando il metodo dei piani secanti, che ordinariamente converrebbe di scegliere verticali, è necessario costruire per punti la proiezione verticale di ciascheduna sezione, e condurre quindi a questa proiezione, di cui la natura non sempre sarà nota, tutte le tangenti possibili parallele alla direzione dei raggi luminosi. Ora se la prima parte di queste operazioni è complicata e laboriosa, la seconda può trovarsi talvolta fuori del dominio della geometria dovendosi condurre alle sezioni delle tangenti per tentativi allorchè la natura di quelle sezioni fosse sconosciuta.

Se d'altronde riflettasi che è possibile sempre trovare il punto di contatto di una superficie di rivoluzione con un piano tangente parallelo ad una retta data, indipendentemente dalla costruzione delle tracce di quest'ultimo, e che, siccome abbiamo veduto in Geometria descrittiva, le operazioni grafiche necessarie a questa ricerca sono al confronto delle precedenti molto più semplici, resulterà manifesta la convenienza di preferire al primo questo secondo metodo, come quello che ad una maggiore speditezza di costruzioni grafiche accoppia tutto il rigore geometrico.

In qualche caso, e particolarmente allorquando il meridiano della superficie è una linea non continua, come non di rado avviene nelle arti, può riescire utile di considerare la superficie medesima come lo inviluppo di un cono circolare retto (*Geom. Descritt.*) Le basi dei diversi coni saranno allora i diversi paralleli della superficie, e le tangenti a questi paralleli condotti dal punto in cui il loro piano è incontrato da una retta parallela alla direzione dei raggi luminosi tirata dal

vertice del respettivo cono, somministreranno coi loro punti di contatto altrettanti punti della linea di separazione d'ombra e di luce.

Vedremo un esempio della applicazione di questo principio in uno degli esercizi pratici che esporremo in seguito.

PROBLEMA. *Trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sul toro, e la sua ombra portata* (*Fig.* 21.)

64. Sieno $A\ A_1$, $A'\ A'_1$ le proiezioni del toro generato dal circolo $D'\ E'$, ed avente l'asse $(O, O'\ O'')$ perpendicolare al piano coordinato orizzontale: (R, R') sia la direzione dei raggi luminosi.

Linea di separazione d'ombra e di luce — Cerchiamo i punti di questa linea sui diversi meridiani, e a tale oggetto consideriamo il meridiano prodotto dal piano verticale $M\ O\ M_1$ Conducasi per il punto (O, O') dell'asse una retta $(O\ v,\ O'\ v')$ parallela alla direzione dei raggi luminosi: se ne trovi la proiezione sul piano $M\ O\ M_1$, e le tracce dei piani tangenti su questo piano saranno allora parallele a quella proiezione e tangenti alla curva meridiana. Abbattasi il piano $M\ O\ M_1$ sul piano meridiano principale $E\ E_1$ facendolo ruotare attorno all'asse; la proiezione ausiliaria della retta $(O\ v,\ O'\ v')$ si abbatterà sopra $O'\ \rho'_1$ e la curva meridiana sui circoli $D'\ E'$, $D''\ E''$; laonde conducendo due diametri perpendicolari ad $O'\ \rho'_1$, si avranno quattro punti di contatto che ricondotti sul piano $M\ O\ M_1$ somministreranno i quattro punti (a, a'); (z, z'); (t_1, t_1'); (a_1, a_1') appartenenti alla linea di separazione d'ombra e di luce, dei quali i due (z, z'), (t_1, t_1') si trovano come facilmente si vede, sulla parte della superficie che è generata dal semicircolo $G'\ D'\ F'$.

Ogni altro meridiano della superficie somministrerà con la stessa costruzione altri quattro punti della linea cercata. Applicandola al meridiano $P\ O\ Q$ perpendicolare alla direzione dei raggi luminosi, i piani tangenti resultano verticali perchè verticale resulta la posizione su questo piano della retta $(O\ v,\ O'\ v')$; onde i loro punti di contatto si troveranno sul massimo e sul minimo parallelo, e saranno (s, s'); (o, o'); (o_1, o_1'); (s_1, s_1'). Per un meridiano, la cui posizione rispetto a $P\ O\ Q$ fosse

simmetrica con quella del meridiano $M\ O\ M_1$, l'abbattimento della proiezione ausiliaria della retta $(O\ v,\ O'\ v')$ resulterebbe simmetrico con $O'\ \rho'_1$ rispetto ad $O'\ O''$. Quindi i punti di contatto determinati dai diametri perpendicolari a questo abbattimento saranno sui paralleli che contengono quelli del meridiano $M\ O\ M_1$. In allora le corde, congiungenti i respettivi punti di contatto dell'uno e dell'altro meridiano resulteranno perpendicolari al meridiano $T\ O\ S$ parallelo alla direzione dei raggi luminosi, e da esso divise in due parti eguali. Consegue da ciò che se i due piani meridiani si fanno avvicinare contemporaneamente al piano meridiano $T\ O\ S$ per spazi angolari eguali, i punti di contatto in questione non cesseranno di trovarsi due a due sopra rette orizzontali perpendicolari allo stesso piano $T\ O\ S$, e che saranno sempre corde di circoli paralleli della superficie da esso divise in due parti eguali; talchè allorquando uno di questi punti si troverà sul piano $T\ O\ S$ anche il suo simmetrico coinciderà con quello, e la corda che li congiunge e che non avrà cessato di essere orizzontale, sarà divenuta tangente in quel punto alla linea di separazione d'ombra e di luce.

Dunque i punti di questa linea che si trovano sul meridiano $T\ O\ S$ ne saranno i più alti e più bassi. Per determinarli facciasi ruotare il meridiano $T\ O\ S$ attorno all'asse finchè venga ad abbattersi sul piano meridiano $E\ O\ E_1$; il punto $(v,\ v')$ verrà a situarsi in $(\rho_2,\ \rho'_2)$, e la retta $O'\ \rho'_2$ esprimerà la direzione del raggio luminoso abbattuto nel piano del meridiano principale. Due diametri perpendicolari ad $O'\ \rho'$ determineranno allora quattro punti, che riportati sul primitivo meridiano saranno quelli richiesti $(c,\ c')$; $(d,\ d')$; $(d_1,\ d'_1)$; $(c_1,\ c'_1)$.

Il piano meridiano $E\ O\ E_1$ essendo parallelo al coordinato verticale, sarà tagliato dai piani tangenti paralleli ad $(R,\ R')$ secondo rette tangenti ai circoli $D'\ E'$, $D''\ E''$ e parallele ad $O'\ v'$; talchè i punti determinati su questi circoli dai due diametri $\varepsilon'\ \gamma'$, $\varepsilon'_1\ \varepsilon'_1$ perpendicolari ad $O'\ v'$ saranno proiezioni verticali di altri quattro punti $(\varepsilon,\ \varepsilon')$; $(\gamma,\ \gamma')$; $(\gamma_1,\ \gamma'_1)$; $(\varepsilon_1,\ \varepsilon'_1)$. In ciascuno di questi punti la proiezione verticale della linea di separazione d'ombra e di luce ha comune la tangente con le respettive circonferenze $D'\ E'$, $D''\ E''$; poichè

i piani tangenti al Toro in quei punti resultano perpendicolari al coordinato verticale.

Applicando la costruzione generale al piano meridiano $U\,O\,V$ perpendicolare ai due piani coordinati, i quattro punti che si determinano si proiettano verticalmente sopra $O'\,O''$ in due soli punti π^1, φ'; essi sono $(\varphi,\ \pi')$; $(\pi,\ \varphi')$; $(\pi_1,\ \pi')$; $(\varphi,\ \varphi_1')$. Giova finalmente osservare, per ciò che sopra abbiamo detto, che la linea di separazione d'ombra e di luce resulterà simmetrica attorno al piano del meridiano $P\,O\,Q$, rimanendo però la metà di essa al di sopra del parallelo massimo, l'altra metà al di sotto. Talchè per avere i punti della linea in questione che si trovano sul meridiano $N\,O\,N_1$ simmetrica con l'altro $U\,O\,V$, basterà riportare sulla retta $N\,O\,N_1$ alla medesima distanza dal centro O i punti φ, π, π_1, φ_1.

Ora è manifesto che la linea di separazione d'ombra e di luce si compone di due parti indipendenti fra loro, delle quali una si troverà sulla porzione della superficie del toro che può riguardarsi come generata dal semicircolo $G'\,E'\,F'$; l'altra sulla porzione di superficie che può riguardarsi come generata dal semicircolo $G'\,D'\,F'$. La prima ha per proiezione orizzontale la linea $s\ \varepsilon\ c\ a\ \varphi\ s_1\ \varepsilon_1\ c_1\ a_1\ \varphi_1\ s$, e per proiezione verticale la linea $\varepsilon'\ c'\ a'\ \pi^1\ s'\ \varepsilon'_1\ c'_1\ a'_1\ \varphi'_1\ s'_1\ \varepsilon'$. La seconda è proiettata orizzontalmente sulla linea $o\ \gamma\ d\ z\ \pi\ o_1\ \gamma_1\ d_1\ t_1\ \pi_1\ o$, e verticalmente in $\gamma'\ o'\ \pi'\ t'_1\ d'_1\ \gamma'_1\ o'_1\ \varphi'\ z'\ d'\ \gamma'$.

Le proiezioni verticali di queste due linee si tagliano nei punti π^1, e φ', di cui ciascuno è proiezione verticale di un punto della prima e della seconda linea.

Dalle proiezioni orizzontali e verticali delle medesime linee è facile desumere che sulla proiezione orizzontale del toro sono visibili le parti in ombra $s\ \varphi_1\ a_1\ c_1\ \varepsilon_1\ s_1\ E_1\ V\ s$, o $D\ o_1\ \pi\ z\ d\ \gamma\ o$, e sulla proiezione verticale è visibile la sola porzione $\varepsilon'\ F'\ E''\ \varepsilon'_1\ s'_1\ \pi'\ a'\ c'\ \varepsilon'$.

Ombra portata. — L'ombra portata dal toro sui piani coordinati avrà due contorni indipendenti fra loro, come lo sono le due linee di separazione d'ombra e di luce.

La traccia orizzontale e la traccia verticale del cilindro avente per direttrice la linea situata sulla parte del toro generata dal semicircolo $(E\ F,\ G'\ E'\ F'')$ non offre difficoltà. Solo osserviamo che se i punti della direttrice saranno stati trovati

per simmetria, la proiezione orizzontale di ciascuna generatrice passerà per le proiezioni di due di questi punti, con risparmio di tempo e di fatica.

Inoltre la traccia orizzontale deve resultare tangente alle proiezioni orizzontali delle generatrici che muovono dai punti (s, s'), (s_1, s'_1) nei quali il meridiano $P\ O\ Q$ taglia il parallelo massimo; mentre la traccia verticale resulterà tangente alle proiezioni verticali delle generatrici condotte per i punti $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varepsilon_1, \varepsilon'_1)$ del meridiano $E\ O\ E_1$.

Perchè tanto le prime quanto le seconde sono anche tracce di altrettanti piani tangenti respettivamente perpendicolari ai coordinati, e determinanti perciò i contorni apparenti del cilindro suddetto.

E per questa medesima ragione la retta $\beta'\ \beta$ resulterà tangente al contorno dell'ombra sul coordinato orizzontale nel punto β che è traccia orizzontale della generatrice di contatto $(\varepsilon\ \beta, \varepsilon'\ \beta')$; siccome la retta $\alpha\ \alpha'$ resulterà tangente al contorno dell'ombra sul coordinato verticale nel punto α' che è traccia verticale della generatrice di contatto $(s\ \alpha, s'\ \alpha')$.

L'ombra portata dalla linea situata sulla porte del toro generata dal semicircolo $(F\ D, G'\ D'\ F')$ esige maggiore attenzione. Per concepire la natura del suo contorno, supponiamo che una retta parallela ad (R, R') movendosi parallelamente a se stessa si appoggi sulla linea in questione; vi saranno due posizioni $m\ n\ n''$, $p\ q\ p''$ nelle quali la sua proiezione orizzontale resulterà tangente a quella dei due rami di cui si compone la direttrice; per cui la superficie sviluppabile generata dal movimento di questo raggio si comporrà di quattro nappe bene distinte, cioè:

1.° La prima nappa che ha per direttrice la porzione di curva proiettata in $m\ \gamma\ d\ z\ p$, e per traccia la linea $n''\ t''\ z''\ q''$.

2.° La seconda nappa la cui direttrice è la curva proiettata in $n\ \pi_1\ d_1\ \gamma_1\ q$, e per traccia orizzontale la linea $m''\ t''\ z''\ p''$.

3.° La terza nappa che ha per direttrice la curva proiettata in $p\ o_1\ q$, e per traccia orizzontale la linea $q''\ o''\ p''$.

4° Finalmente la curva proiettata in $m\ o\ n$ è la direttrice della quarta nappa, la cui traccia orizzontale è $m''\ o''\ n''$.

Queste quattro nappe sono separate le une dalle altre dalle generatrici proiettate in $m\,n\,m''$, $p\,q\,q''$ le quali formano sulla superficie quattro costole di regresso, e determinano con le loro tracce orizzontali i quattro punti m'', n'', p'', q'' che sono essi pure punti di regresso della traccia cercata.

Si osserverà che la curvatura cangia di direzione tutte le volte che la retta parallela ad (R, R') diviene tangente alla direttrice, ciò che ha luogo nei quattro punti (m, m'); (n, n'); (q, q'); (p, p').

La due nappe aventi per tracce le curve $n''\,t''\,z''\,q''$, $m''\,t''\,z''\,p''$ si tagliano secondo le due generatrici proiettate in $\tau\,\tau_1\,t''$, $\zeta\,\zeta\,z''$ e simmetricamente situate rapporto al meridiano $T\,O\,S$. Queste due generatrici dopo aver toccata la superficie del toro al di sopra nei punti proiettati in τ e ζ, toccano una seconda volta la superficie stessa al disotto nei punti proiettati in τ_1 e ζ_1, e vanno in seguito a forare il coordinato orizzontale nei punti t'', z''. E quindi evidente che le generatrici le quali si appoggiano sulle curve $\tau\,r\,m\,o\,n\,\pi_1\,\tau_1$, $\zeta\,\pi\,p\,o_1\,q\,r_1\,\zeta_1$ arriveranno al piano orizzontale dopo aver traversata la massa del corpo. Il luogo geometrico delle intersezioni di queste rette con la superficie del toro è una curva proiettata in $m\,\delta\,w\,\tau_1$ e $p\,\delta_1\,\zeta_1$, la quale sarà per conseguenza l'ombra portata nella gola del toro dalla parte considerata della linea di separazione d'ombra e di luce

Per ottenere un punto qualunque di questa curva s'impiegherà il metodo dei piani secanti. Così se vuolsi avere l'ombra portata dal punto (γ, γ'), si opererà nel modo seguente:

1.° Si concepirà il piano proiettante orizzontale della generatrice che passa per il punto considerato.

2.° Determinando la proiezione verticale dei punti, nei quali la traccia orizzontale $\gamma\,v$ di questo piano incontra diversi paralleli della superficie si costruirà la proiezione verticale della sua intersezione con la superficie, e di cui una parte è $w'\,y'\,v'$.

3.° Il punto d'incontro w' di questa curva con la proiezione verticale $\gamma'\,w'$ della generatrice sarà la proiezione verticale dell'ombra portata da questo punto, e w ne sarà la proiezione orizzontale

Il punto 3 in cui l'ombra, della quale si parla, tocca la proiezione orizzontale del circolo di gola si dedurrà dal punto 3' in cui la proiezione verticale della generatrice incontra $D' D''$ proiezione verticale del circolo stesso.

65 *Osservazione I.* — Qualunque sia la direzione dei raggi luminosi resulterà sempre un'ombra portata sul toro dalla linea di separazione d'ombra e di luce situata sulla parte della superficie generata dal semicircolo ($F D$, $G' D' F''$). Poichè sappiamo *(Geom. Descritt)* che il piano tangente in un punto qualunque di questa parte resulta secante in tutti gli altri punti; e perciò la retta parallela alla direzione dei raggi luminosi condotta per il punto di contatto e che si trova distesa sul medesimo piano tangente, potrà riescire secante a quella sezione, e quindi incontrare la superficie del toro prima di arrivare al coordinato orizzontale, o a qualsivoglia altra superficie sulla quale si cerca l'ombra da quella portata.

66. *Osservazione II.* — La soluzione precedente è applicabile ad ogni altra superficie di rivoluzione. E se come talvolta può accadere, l'asse di rotazione non sarà perpendicolare ad uno dei piani coordinati, nulla impedirà che si faccia della superficie una proiezione ausiliaria sopra un piano perpendicolare al suo asse, salvo poi a ricondurre sul vero piano di proiezione i resultati ottenuti con quello.

67. *Osservazione III.* — Il problema che ci ha finora occupati trova frequenti applicazioni specialmente nel disegno degli ordini architettonici. La parte esterna del toro generata dal semicircolo $G' E' F'$ occorre nelle basi e nei capitelli degli ordini; la parte interna, cioè quella generata dal semicircolo $G' D' F'$ trovasi sempre nel cavetto o ratta delle colonne, e nella base attica col nome di scozia.

Offriremo più tardi questi esempi come esercizi di un caso particolare della direzione dei raggi luminosi.

CAPO VII.

Ombre delle superficie rigate.

68 Anche per questa famiglia di superficie il metodo dei piani tangenti applicato alla costruzione dei contorni delle ombre è il più sicuro ed esatto. Indi la determinazione di questi contorni può dirsi dipendere dal noto teorema di Geometria Descrittiva; *Ogni piano condotto per una generatrice d'una superficie rigata è tangente a questa superficie, qualunque sia la sua direzione.*

Segue da ciò che per ritrovare la linea di separazione d'ombra e di luce basterà far passare per ciascuna generatrice un piano parallelo alla direzione dei raggi luminosi, e determinare il punto di contatto corrispondente a ciascun piano: che il luogo geometrico di questi punti diversi sarà la linea cercata.

69 Ordinariamente però non è quasi mai applicabile nella pratica il metodo ora esposto In primo luogo perchè avviene rare volte che il piano condotto per una generatrice tagli entro i limiti del foglio, sul quale si disegna, le altre generatrici; e in secondo luogo, allorchè queste intersecazioni sono possibili, esse avvengono quasi sempre sotto angoli così acuti da rendere incertissima la costruzione della retta *a* della curva secondo le quali la superficie proposta è intersecata dal piano. E posto anche rigorosamente ottenuta questa retta o questa curva, esse tagliano sovente volte la generatrice troppo obliquamente per determinare in un modo sodisfacente il punto di contatto.

Per le addotte ragioni si preferisce generalmente una costruzione particolare, di cui la scelta dipende dalla natura della superficie in questione, dalla sua posizione nello spazio, e dalla direzione dei raggi luminosi.

Un bell'esempio di queste particolari costruzioni viene offerto dall'elicoide storta, che sarà l'unica fra le superficie rigate sulla quale cercheremo i contorni delle ombre, siccome quella che trova più frequente applicazione nelle arti.

PROBLEMA — *Trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sull'elicoide storta, e la sua ombra portata* (*Fig.* 22).

70. Sieno $(a\ B\ a_2\ B_1,\ A'\ a'\ a'_2\ a'_1)$ l'elica direttrice della superficie, avente per origine il punto (B, A'); $(A, A'\ B')$ l'asse a cui supporremo perpendicolare il coordinato orizzontale: $(A\ a,\ A''\ a'')$ la generatrice nella sua posizione parallela al piano coordinato verticale; (R, R') la direzione dei raggi luminosi.

Considerando soltanto la falda inferiore della superficie, e questa limitata dalla elica direttrice, il circolo di raggio $A\ a$ ne sarà la proiezione orizzontale; la verticale si troverà in parte determinata dalla proiezione verticale dell'elica, in parte dal luogo geometrico delle intersecazioni successive delle proiezioni verticali di tutte le sue generatrici, o da quello delle proiezioni verticali dei punti di contatto di tutti i piani tangenti perpendicolari al coordinato verticale. Supporremo costruita completamente questa seconda proiezione della superficie, e passeremo senz'altro alla soluzione del problema proposto.

Linea di separazione d'ombra e di luce. — Fa parte evidentemente di questa linea la elica direttrice, e con essa tutte le altre linee che possono essere luogo geometrico dei punti di contatto di piani tangenti paralleli ad (R, R').

Per costruire queste linee ricorreremo a quel medesimo processo che in Geometria Descrittiva è stato esposto all'oggetto di determinare le linee del contorno $a'_1\ b'_1\ c'_1\ d'_1 \ldots$ E perciò rammentando che una delle principali proprietà dell'elicoide storta si è quella di contenere una infinità di eliche aventi tutte lo stesso passo dell'elica direttrice, e per punti generatori i diversi punti della generatrice, daremo opera alla costruzione di alcune di queste eliche, e su di esse cercheremo i punti di contatto di quei piani tangenti che sono paralleli alla direzione dei raggi luminosi.

Prenderemo per punti generatori delle eliche in questione, i punti (b, b'), (c, c'), (d, d') che si trovano sulla retta $(A\ a,\ A''\ a'')$ alla altezza determinata dai punti di divisione del passo dell'elica direttrice. Onde essendo (B, A') l'origine di questa

ultima, le origini delle tre eliche ausiliarie descritte dai punti suddetti saranno respettivamente (i, i'), (r, r'), (s, s') e conseguentemente i piani di origine $b' i'$, $a' r'$, $i'' i'$.

Colle circonferenze $A\,b$, $A\,c$, $A\,d$, per basi e colle divisioni stesse del passo che han servito alla costruzione della elica direttrice, troveremo facilmente le proiezioni verticali delle altre eliche notate nella figura, e procederemo quindi alla costruzione delle tracce orizzontali dei piani tangenti nei punti (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d').

La traccia orizzontale del piano tangente in (a, a') conterrà la traccia (t, t') della generatrice $(A\,a, A''\,a')$, e la traccia m della tangente $(a\,m, m'\,a')$ all'elica direttrice nel punto (a, a'), la quale si determina prendendo $a\,m = a\,r$ e $B\,a$. *(Geom. Descritt.)*

Le tracce orizzontali degli altri piani tangenti si avranno costruendo prima le linee $i_1\,o$, $a\,o_1$, $b\,o_2$ secondo le quali essi intersecano i respettivi piani d'origine, e conducendo quindi dal punto t le $t\,m_1$, $t\,m_2$, $t\,m_3$ parallele ad esse.

Nessuno di questi piani è parallelo ad (R, R'), ma se noi immaginiamo che ciascuno di essi si muova per modo da mantenersi costantemente tangente alla superficie lungo le respettive eliche, fra le infinite posizioni che prenderà vi sarà anche quella richiesta.

Durante un tal movimento noi possiamo riguardare il punto di contatto come animato da due moti: uno di rotazione attorno all'asse, l'altro di elevazione parallelamente all'asse medesimo; e perciò sapendo che tutti i piani tangenti nei diversi punti di una medesima elica sono egualmente inclinati all'asse della superficie, faremo ruotare ciascun piano attorno a quello finchè sia divenuto parallelo ad (R, R'), ed in modo che il punto di contatto non cambi di altezza. Allora esso non cesserà di trovarsi sulla superficie del cono circolare retto avente il vertice in (A, A''), e per traccia il circolo tangente alla traccia di ciascun piano.

Il movimento di questi piani sarà terminato quando le loro tracce passeranno per il punto (C, C') la quale è traccia orizzontale di una retta parallela ad (R, R') condotta per il vertice comune dei coni. E siccome avran seco trasportato, oltre il relativo punto di contatto, anche la generatrice comune

$(A\,t,\ A''\,t')$, così la posizione in cui si troverà questa condotta farà conoscere quella pure del punto di contatto, il quale dovrà poi essere elevato parallelamente all' asse fino all' elica corrispondente.

Operando rispetto al piano $t\,m$ tangente all' elica direttrice in $(a,\ a')$, si trova che il suo cono circolare retto ha per traccia il circolo di raggio $A\,p$; e che allorquando il piano passerà per $(C,\ C')$ la sua traccia avrà presa la posizione $C\,p_1$. Il punto t avrà descritto un' arco di circolo, che puossi considerare come traccia anch' esso del cono circolare retto generato dalla generatrice $(A\,t,\ A''\,t')$; e nella posizione $C\,p_1$ del piano in questione si troverà necessariamente in t_1. Onde la generatrice verrà a proiettarsi orizzontalmente in $A\,t_1$, e il punto α in cui $A\,t_1$ taglia la base dell' elica sarà la proiezione orizzontale della posizione $(\alpha,\ \alpha')$ presa dal punto di contatto: prolungando la verticale $\alpha\,\alpha'$ fino all' incontro dell' elica direttrice in α'', questa sarà la proiezione verticale del punto in cui sulla elica medesima è la superficie toccata da un piano tangente parallelo ad $(R,\ R')$.

Così il piano $t\,m_1$ sarà divenuto parallelo alla direzione dei raggi luminosi, allorchè la sua traccia passando per C sarà tangente in q_1 al circolo di raggio $A\,q$. La generatrice $(A\,t,\ A''\,t')$ si proietterà allora in $A\,t_2$, e $(\beta,\ \beta')$ sarà la posizione presa dal punto di contatto, che elevato fino all' elica ausiliaria avente per base il circolo $A\,b$ verrà a prendere su questa la posizione $(\beta,\ \beta'')$ nella quale la superficie è toccata da un piano tangente pararellelo ad $(R,\ R')$.

Nello stesso modo si troveranno sulle altre eliche i punti $(\gamma,\ \gamma'')$, $(\delta,\ \delta'')$ che appartengono alla linea di separazione d' ombra e di luce, la quale sarà $\alpha''\,\beta''\,\gamma''\,\delta''$ .. ec. e avrà per proiezione orizzontale la curva $A\,\delta\,\gamma\,\beta\,\alpha$.

Continuando il suo movimento vi ha un' altra posizione per ciascun piano tangente, nella quale può essere parallelo alla direzione dei raggi luminosi. Per il piano tangente $C\,t_1$ è $C\,\tau_1$ questa seconda posizione, in cui viene a somministrare il punto $(\alpha_1,\ \alpha''')$ d' un altra parte di linea di separazione d' ombra e di luce. L' altro piano tangente $C\,t_2$ somministra nella nuova posizione $C\,\tau_2$ un secondo punto $(\beta_1,\ \beta''')$ della medesima linea; e altri due punti si hanno in $(\gamma_1,\ \gamma''')$, $(\delta,\ \delta''')$.

Talchè la linea (α_1 β_1 γ_1 δ, A, α'' β''' γ'' δ'''...) apparterrà pure a quella di separazione d'ombra e di luce.

Sul coordinato orizzontale le curve α β γ δ A, ed A δ_1 γ_1 β_1 α_1 si riuniranno in A per formarne una sola che serve a limitare insieme coll'arco α_1 a_2 α la parte dell'elicoide che rimane nell'ombra pura.

È da osservarsi che se il punto C si trovasse dentro la circonferenza A p non vi sarebbe sull'elica direttrice alcun punto della linea di separazione d'ombra e di luce; e se lo stesso avenisse per tutte le altre eliche tracciate sulla superficie, la linea di separazione d'ombra e di luce ridurrebbesi alla sola elica direttrice.

Può anche accadere che la linea di separazione d'ombra e di luce non incontri che le eliche le più approssimate all'asse senza giungere all'elica direttrice.

Infine può darsi che la linea di separazione sui filetti dell'elicoide si trovi interamente nell'ombra portata dal filetto superiore, siccome ha luogo nella figura attuale.

Ombra portata. — Limiteremo la ricerca di questa ombra a quella che ciascun filetto della superficie porta sul filetto sottoposto, essendo agevole cosa il trovare, quando sia richiesta, quella ancora che può esser portata sui piani coordinati.

Per costruire l'ombra di cui si tratta, ne cercheremo i diversi punti sulle eliche già tracciate procedendo nel modo seguente.

Vogliasi per esempio, il punto dell'ombra portata dall'elica direttrice sull'altra avente per base la circonferenza A b. Considerati alcuni punti (a, a''); (d, d'); (c, e'); (f, f')... della prima si costruiranno le generatrici del cilindro parallelo ai raggi luminosi, le quali passano per quei punti, e si troverà la intersezione di questo cilindro con un piano qualunque orizzontale x y, che sarà (d_1 e_1 f_1 g_1, d'' e'' f''). Si cercherà similmente la intersezione v w del piano x y col cilindro che ha per direttrice l'elica b' b'_1 b''_1... e le sue generatrici parallele ai raggi luminosi. Il punto z_1 comune alle due curve d_1 c_1 f_1, e xw è proiezione orizzontale d'un punto comune ai due cilindri, i quali non potendo tagliarsi che secondo una o più generatrici forza è che abbiano comune la generatrice proiettata secondo z_1 z: ma questa incontra la base del-

l'elica considerata nel punto z dunque (z, z') sarà l'ombra cercata.

Si può trovare un secondo punto dell'ombra portata sull'elica c' c'_1 c'' ... cercando, mediante lo stesso piano secante x y, la intersezione dello stesso cilindro avente per direttrice la linea a'' d' e' f' ... con quello avente per direttrice l'elica c' c'_1 c''_1 ...

Tale intersezione è proiettata orizzontalmente secondo v_1 w_1; onde si ha la generatrice comune u_1 u ai due cilindri, e quindi il punto (u, u') per l'ombra cercata.

Nello stesso modo si trova il punto (k, k') della ombra portata sulla elica susseguente.

Quando la linea di separazione $(\alpha$ β γ δ, α'' β'' γ'' $\delta'')$ non rimane tutta nell'ombra si può cercare anche sopra di essa un punto dell'ombra portata. Il punto (o, o') sul contorno apparente verticale si trova nello stesso modo considerando la linea $(a_1$ b_1 c_1 d_1, a'_1 b'_1 c'_1 d'_1 ...) come direttrice d'un cilindro parallelo ai raggi luminosi.

Sulla proiezione orizzontale si vedrà ombrata la parte α β γ δ, A δ_1 γ_1 β_1 α_1 a_1 α: sulla proiezione verticale non vi sarà d'illuminato su ciascun filetto che la parte a'_1 b'_1 c'_1 o k' u' z' α'' n' a_1'.

CAPO VIII.

Considerazioni pratiche.

71. La ipotesi dei raggi luminosi paralleli, che è quella della luce proveniente dal sole, è tanto comune nei disegni artistici che non se ne impiega quasi mai altra. Quantunque la direzione di essi possa dirsi affatto indeterminata, poichè quelli solari avendo alla superficie terrestre tutte le inclinazioni possibili, è possibile sempre trovare una infinità di luoghi, in cui a due istanti del giorno il raggio solare abbia la

direzione prescelta; pure la pratica suggerisce delle apprezzabili ragioni per togliere questa assoluta indeterminazione che sembra sussistere nella direzione del raggio di luce da cui è illuminato un oggetto geometricamente rappresentato.

In effetto se ci poniamo in primo luogo a considerare un oggetto portatile, come il modello in piccolo d'un monumento che ordinariamente ci verrà fatto di sostenere colla mano destra, non potremo collocarci per modo che la luce venga al didietro del modello, o al didietro di noi, o alla destra nostra: poichè nei primi due casi l'oggetto rimarrebbe nell'ombra, e nel terzo caso, per esaminarlo con attenzione, saremmo forzati a portarlo un poco verso sinistra, ciò che renderebbe incomodi i movimenti della mano destra, la quale è ordinariamente la più utile per sostenerlo o per cambiarlo di sito. Puossi dunque inferire da ciò che per l'esame accurato di un oggetto giova la provenienza della luce dalla sinistra dello spettatore. E siccome un disegno non è che l'imitazione d'uno o di più oggetti, è manifesto che conviene supporre che sia illuminato in quello stesso modo che è stato riconosciuto il più convenevole per considerare attentamente gli oggetti medesimi, e rilevarne con facilità la diverse parti che li compongono.

Dunque in generale si devono determinare le ombre in un disegno nella ipotesi che i raggi luminosi arrivino dal lato sinistro del foglio.

In secondo luogo, la inclinazione particolare dei raggi luminosi deve essere scelta per modo da produrre sul disegno con la possibile chiarezza le circostanze tutte che il problema è capace di offrire, acciocchè le forme diverse del corpo opaco resaltino il meglio che si può distinte.

Conviene ancora che la inclinazione indicata sia tale da non indurre costruzioni molto difficili o complicate; ed infine, nelle rappresentazioni di oggetti che in natura vengono illuminati dal sole, è condizione essenziale che il raggio scelto abbia una delle direzioni che comunemente hanno i raggi solari nelle ore in cui la vista non è modificata nè dai vapori del mattino o della sera, nè dalla luce troppo viva del mezzogiorno; cioè a dire nelle ore egualmente distanti dal mattino e dal mezzodì, dal mezzodì e dalla sera.

Per gli esempi di teoria è da tenersi in conto la prima

Digitized by Google

dalle notate ragioni, da cui abbiamo detto dipendere la inclinazione conveniente al raggio luminoso.

All'oggetto poi di ottenere distinte il meglio possibile le diverse forme del corpo opaco è necessario: 1.° procurare che ciascuna parte abbia la sua ombra particolare distinta da quella delle altre parti, o almeno che le ombre delle parti principali non si confondano fra di loro: 2.° che i contorni delle parti ombrate sieno situate sulla superficie del corpo opaco in modo da far distinguere tutte le curvature e le inflessioni della superficie medesima.

Ordinariamente è difficile soddisfare a tutte queste condizioni; la bravura del disegnatore consiste allora nel riescire a sodisfare alle più importanti.

Non è possibile assegnare una regola generale per determinare quale sarà quella inclinazione del raggio luminoso per la quale la costruzione del contorno delle ombre sul corpo opaco resulta la più semplice. Ciò dipende in generale dalla natura del corpo stesso; il tatto e l'abitudine poi possono farla indovinare.

Il raggio, le cui proiezioni fanno un'angolo di 45° colla linea di terra, e quello che è determinato da una sola proiezione e dalla condizione di fare con quella un'angolo di 45°, hanno su tutti gli altri, a circostanze pari, dei vantaggi rimarchevoli. La scelta di questi raggi è adottata negli esempi di pratica, perchè la loro inclinazione è quella che hanno i raggi solari per tutta la terra nelle ore del giorno, nelle quali la vista agisce meglio.

Del raggio luminoso, le cui proiezioni fanno un angolo di 45° colla linea di terra.

72. Immaginiamo un cubo colle facce parallele e perpendicolari ai piani coordinati: quella delle sue diagonali, la cui inclinazione rispetto a questi piani sodisfa alla prima condizione del raggio luminoso, si proietta evidentemente sulla base inferiore del cubo e sulla faccia parallela e più vicina al coordinato verticale secondo le diagonali di queste facce stesse; talchè colla costola ad asse comune faranno tali proiezioni un'angolo di 45°.

Quindi è manifesto che il raggio di cui si parla può dirsi parallelo alla diagonale di un cubo avente le facce parallele e perpendicolari ai piani coordinati.

È inoltre da osservarsi che la proiezione di questa diagonale fatta anche sopra una delle facce del cubo perpendicolari ai due coordinati, coincide colla diagonale della faccia medesima; e perciò può inferirsi che la proiezione ausiliaria del raggio in questione sopra un piano perpendicolare alla linea di terra fa con questa linea lo stesso angolo di 45°. Così può risparmiarsi la costruzione atta a determinare la proiezione ausiliaria $a'' b''$ del raggio $(a\,b, a'\,b')$ (*Fig.* 23) sopra il piano $M\,N$.

L'abbattimento del raggio stesso sopra un piano parallelo ad uno dei coordinati si ottiene pure con facilità.

Vogliasi infatti l'abbattimento del raggio luminoso $(a\,b, a'\,b')$ sul piano $b\,c$ parallelo al coordinato verticale, e condotto per una estremità del raggio È noto *(Geom. Descritt.)* che all'altra estremità (a, a') deesi far descrivere un'arco di circolo orizzontale $(a\,c, a'\,a_1)$ finchè sia venuto in (c, a'_1) sul piano dato, e determinato così il punto a'_1, la retta $a'_1\,b'$ è l'abbattimento richiesto

Ora considerando i due triangoli $a\,b\,d$, $a'\,b'\,d'$ accorgesi che a cagione degli angoli in b e in b' di 45° e della eguaglianza dei due lati $b\,d$, $b'\,d'$ anche le ipotenuse $a\,b$, $a'\,b'$ debbono resultare eguali. Talchè essendo $b\,c = a\,b = b'$ e' dovrà pure aversi $b'\,c' = a'\,b'$.

Per la qual cosa si avrà l'abbattimento del raggio sul piano $b\,c$ parallelo al coordinato verticale, portando $a'\,b'$ da b' in c' sulla orizzontale $b'\,c'$, e costruendo il triangolo rettangolo $b'\,a'_1\,c'$ tale che $c'\,a'_1$ eguagli $a'\,d'$.

D'onde consegue che l'abbattimento $a'_1\,b'$ si può ottenere indipendentemente dalla proiezione orizzontale del raggio

Al modo istesso, e indipendentemente dalla proiezione verticale del raggio, sarà concesso costruirne l'abbattimento $b\,a_1$ sul piano orizzontale $b'\,c'$, riportando da b in c la lunghezza $a\,b$ sulla orizzontale $b\,c$, e costruendo su $b\,c$ il triangolo rettangolo col cateto $c\,a_1 = d\,a$.

73. Queste proprietà rendono l'impiego del raggio in questione comodissimo per la pratica. Ma il più gran vantaggio di questo raggio è che le ombre portate sulle superficie piane

parallele ai due piani coordinati si costruiscono immediatamente, e senza il soccorso di operazioni fatte su questi due piani.

Infatti se volessimo trovare sopra un piano $P\ Q$ parallelo al coordinato verticale (*Fig.* 24) l'ombra portata da un punto (M, M') bisognerebbe costruire le proiezioni $M\ q$, $M'\ m'$ del raggio corrispondente, e da m proiezione orizzontale del punto d'incontro di questo raggio col piano dato, tirare $m\ m'$ perpendicolare alla linea di terra; e il punto (m, m') sarebbe l'ombra cercata.

Ma il triangolo $M\ N\ m$ essendo isoscele a cagione dell'angolo $M\ m\ N = 45°$, se conducesi $m'\ N'$ parallela ad $X\ Y$ si trova $M'\ N' = M\ N$. Laonde per ottenere l'ombra richiesta, basterà solo costruire con la distanza $M\ N$ del punto al piano dato, il triangolo isoscele $M'\ N'\ m'$ tale che sia $M\ N = M'\ N' = N'\ m'$, ed avremo il punto m': può dedursi immediatamente la proiezione orizzontale m.

Nella pratica poi si potrà fare a meno anche della costruzione del triangolo $M'\ N'\ m'$; poichè tirata la $M'\ m'$ inclinata di 45° sopra $X\ Y$ si riporterà col compasso la distanza $M\ N$ da M' in N', e fissata una punta in N' si determinerà con l'altra il punto m' sulla $M'\ m'$.

Quando fosse proposto di costruire l'ombra che il medesimo punto (M, M') porta sopra un piano parallelo al coordinato orizzontale, basterebbe ripetere la medesima operazione col compasso sulla retta $M\ q$, riportando la distanza dal piano dato sulla $M\ M'$ a partire dal punto M.

Così per avere l'ombra sul coordinato orizzontale, si prenderà l'apertura del compasso eguale ad $M'\ n'$ e si riporterà da M in n; di poi fissatane una punta in n, si determinerà con l'altra sulla $M\ q$ il punto q ombra richiesta.

Se il punto n cadesse al di sopra della linea di terra, o in altri termini, se la distanza del punto dato al piano orizzontale è maggiore di quella che lo separa dal coordinato verticale, non esiste ombra sul primo piano.

74. Allorchè un edifizio non presenta, come ordinariamente avviene, superficie curve la cui linee di separazione d'ombra e di luce sieno difficili a costruirsi; e allorchè l'elevazione di questo edifizio e il suo piano si trovano sopra fogli

di disegno separati, e talvolta anche in scala diversa, il raggio di cui ci occupiamo è di un impiego comodissimo, perchè ad avere le ombre portate sulla elevazione non si ha che delle distanze da prendere sulla pianta e viceversa.

Del raggio luminoso che fa con una delle sue proiezioni un angolo di 45°.

75. La condizione a cui trovasi soggetto questo raggio non lo determina completamente finchè non trovasi stabilita la sua proiezione; onde vi ha vantaggio nell'impiego di esso rimanendo in facoltà del disegnatore lo scegliere la proiezione per modo che una determinata parte del corpo opaco sia illuminata, o rimanga nell'ombra, o riceva il contorno dell'ombra portata.

Un altro vantaggio importantissimo si ha pure nel potere determinare immediatamente, e quindi anche più semplicemente che col mezzo del raggio precedente, le ombre sopra piani paralleli a quello sul quale è inclinato di 45°. Infatti; se R è la proiezione orizzontale del raggio luminoso inclinato su di essa di 45° (*Fig.* 25), e un punto (P, P') è situato al di sopra d'un piano orizzontale $M' N'$, per avere l'ombra portata su questo piano dal punto (P, P') basterà condurre per il punto P una retta parallela ad R, e portare da P in p su questa retta l'altezza del punto sul piano dato: il punto p così determinato sarà la proiezione orizzontale di quello, in cui il raggio condotto da (P, P') fora il piano $M' N'$, cioè l'ombra portata dal punto (P, P').

La ragione di ciò resulterà manifesta purchè si osservi che la porzione del raggio compresa fra il punto (P, P') e il piano dato è sempre l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo isoscele, del quale un cateto è la distanza del punto al piano, e l'altro cateto è la retta che unisce il piede di questa distanza con quello del raggio; questo secondo cateto poi si proietta nella sua vera grandezza sul coordinato orizzontale.

76. Segue da ciò che in un disegno illuminato da raggi simili a quello di cui si tratta, l'ombra portata p da un punto (P, P') indica colla distanza $P p$, misurata parallelamente alla proiezione del raggio luminoso, l'altezza del punto che porta

l'ombra al di sopra del piano $M' N'$, dal quale l'ombra stessa è ricevuta.

Questa proprietà è ancora di un'altra importanza nella pratica; poichè con una sola proiezione d'un oggetto si può giudicare della altezza di tutti i punti di questo oggetto che portano ombra sopra di esso o sopra altre superficie.

Anche il raggio, le cui proiezioni fanno un angolo di 45° con la linea di terra, offre il mezzo di determinare queste altezze; ma per trovarle fa d'uopo costruire la retta $M N$, o il triangolo rettangolo $M N m$ (*Fig.* 24). Tuttavia i vantaggi che resultano dall'impiego dell'altro raggio, non avendo luogo che per una sola proiezione dell'oggetto, siamo bene spesso nella pratica indotti a preferire quest'ultimo.

CAPO IX.

Esercizi pratici.

77. Gli esercizi che seguono sono tratti dagli ordini architettonici, e da alcune parti delle fabbriche nelle quali la determinazione dei contorni delle ombre può presentare qualche difficoltà ai giovani principianti nell'arte del disegno. Faranno seguito a questi alcuni esempi tratti dal disegno delle Macchine.

Il raggio luminoso prescelto essendo quello, di cui le proiezioni fanno un'angolo di 45° colla linea di terra, cesseremo anche d'indicarne le proiezioni.

Esercizio I. *Ombre di una cimasa* (C, C') (*Fig.* 26.)

78. Il profilo C' è la proiezione verticale della linea secondo cui si intersecano le due gole parallela e perpendicolare al coordinato verticale. Ma si può considerare anche come l'abbattimento della proiezione della cimasa fatta sopra un piano ver-

ticale n b, che per un movimento di rotazione attorno allo spigolo a abbia presa la posizione n b_1 parallela al coordinato verticale medesimo

In questo caso il profilo C' può riguardarsi come la traccia sul piano $a\ b$ della superficie cilindrica avente per direttrice il profilo della gola; onde se pel centro o' dell' arco convesso di quest' ultimo conducesi $o'\ v'$ inclinata di 45° sopra $X\ Y$, il punto v' sarà quello in cui un altra retta $r'\ v'$, inclinata di 45° sulla stessa $X\ Y$ ed avente la direzione dell' abbattimento del raggio sul piano n b_1 (N.° 72), è tangente all'arco suddetto. Talchè la parallela agli spigoli della cimasa condotta per v', sarà la linea di separazione d' ombra e di luce sulla gola parallela al coordinato verticale.

Appartengono inoltre alla linea di separazione d' ombra e di luce anche gli spigoli verticali $(a,\ a'\ n'')$, $(a,\ a_1\ s')$, $(c,\ c'\ c'')$; e quelli orizzontali $(n\ n_1,\ n')$, $(c\ c_1,\ c')$, $(c\ d,\ c''\ d'')$.

Lo spigolo $(c\ d,\ c''\ d'')$ e la generatrice $v'\ t'$ portano ombra sulla cimasa e sul piano verticale coordinato, le altre linee su quest' ultimo soltanto. La inclinata di 45° condotta per $(c,\ c'')$ taglia in u' l' arco convesso del profilo, quindi la parallela a $c''\ d''$ condotta per u' sarà l' ombra portata sulla cimasa da $c''\ d''$: ma se per u' conduciamo $u'\ u''$ parallela alla proiezione verticale del raggio luminoso, trovasi che u' è l'ombra del punto u'', e che per conseguenza la parte $c''\ u''$ dello spigolo $c''\ d''$ porterà ombra sul coordinato verticale, l' altra parte sulla gola della cimasa che è parallela a quest' ultimo piano.

Il raggio $r'\ v'$ prolungato taglia in s' la retta $a_1\ s'$, onde la parallela a $v'\ t'$ condotta per s' sarà l' ombra della retta $v'\ t'$ sul piano verticale a e. Ma come la parallela alla proiezione verticale del raggio tirata per s' incontra in x' la $v'\ t'$ deesi inferire che s' è l' ombra del punto x', e che perciò la parte $v'\ x'$ della $v'\ t'$ porterà ombra sul coordinato verticale.

Da ciò che precede resulta che della gola perpendicolare al coordinato verticale nessuna parte trovasi illuminata, e di quella parallela allo stesso piano è solo illuminata la parte compresa fra le parallele $u'\ y'$, $v'\ t'$ Per la qual cosa l' arco $v'\ u'$, comune alle due gole, apparterrà esso pure alla linea di separazione d' ombra e di luce, e porterà ombra sul coordinato verticale.

Non spenderemo molte parole per rendere conto del modo con cui è stata trovata l'ombra della cimasa su quest'ultimo piano. Solo rammenteremo che un punto qualunque α' di quest'ombra può costruirsi prendendo sulla proiettante orizzontale del punto (c, c') la lunghezza $c' c'_1 = c_1 c$, e con questa medesima apertura di compasso descrivendo un piccolo arco, che tagli la retta condotta per c' parallelamente alla proiezione verticale del raggio luminoso. (N.° 73).

Esercizio II. *Ombra della base del pilastro toscano* (*P*, *P'*.) (*Fig.* 27.)

79. La ratta a il bastone sono le sole parti di questa base che potrebbero offrire qualche difficoltà.

Il profilo (a c, a' i' b') dell'una, e il profilo (c e, c' e' c'') dell'altro possono considerarsi come le direttrici comuni a due superficie cilindriche aventi le generatrici orizzontali, ma parallele e perpendicolari al coordinato verticale.

Ora per la ratta a per il bastone perpendicolare a questo piano, i profili suddetti possono riguardarsi ancora come le basi di queste superficie sul coordinato suddetto; e perciò le tangenti agli archi n' i' b', c' e' e'' parallele alla proiezione verticale del raggio luminoso, o meglio le perpendicolari a questa proiezione condotte per i centri respettivi o', v', determineranno i punti i', d' appartenenti alla linea di separazione d'ombra e di luce. Così sul bastone la generatrice (d', d d_1) apparterrà a questa linea. (N.° 40.

La ratta parallela al coordinato verticale è evidentemente tutta illuminata; onde essendo i' la proiezione verticale di quella generatrice della ratta perpendicolare al coordinato medesimo, che apparterrebbe alla linea di separazione d'ombra e di luce sulla convessità della ratta stessa, ne possiamo inferire essere la parte a' i' dell'arco a' i' b' una linea di separazione d'ombra e di luce.

La generatrice che è linea di separazione d'ombra e di luce sul bastone parallelo al coordinato verticale, si otterrà, come nell'*Esercizio I* considerando il profilo c' e' c'' quale abbattimento della proiezione del bastone fatta sul prolungamento del piano verticale a' a_1 e condotto, per un moto di rotazione

attorno allo spigolo del punto a, in posizione parallela al coordinato verticale. Allora v' d'' perpendicolare a v' d' determinerà l'estremo d'' della generatrice d'' e'' cercato.

Crediamo inutile far parola dell'altra linea di separazione, come di quella d'ombra portata sul coordinato verticale, che la figura e l'avvertenza emessa nell'esempio precedente sono sufficienti a guidare l'occhio e la mano

Però l'ombra della ratta merita qualche attenzione. La proiezione verticale di essa coincide coll'arco stesso a' i' che la determina; mentre la proiezione orizzontale è una curva i c_1. Il punto c_1 sullo spigolo (o c_1, b') si determina, immaginando condotto per lo spigolo medesimo un piano b' a' parallelo al raggio luminoso. Questo incontrerà l'arco a' i' a' nel punto (a, a'), e la retta a c_1 determinerà il punto in questione. Ogni altro punto dell'ombra i c_1, si otterrà ripetendo la medesima costruzione per i diversi punti dell'arco (a i, a' i') siccome la figura dimostra.

Esercizio III. *Ombre del frontespizio F.* (*Fig.* 28.

80. Le inclinate di 45° condotte per gli estremi a, c, ed i degli spigoli a b, c c_1, i i_1 della gola e del gocciolatoio fan conoscere immediatamente che questi spigoli sono linee di separazione d'ombra e di luce sì per la cornice orizzontale, sì per quella inclinata che rimane alla sinistra della linea di simmetria b b_1; e i piani perpendicolari a quello del timpano rappresentati dalle inclinate suddette determinano le ombre c o, r r_1, n n_1, a c_1, e e_1, m m_1 parallele alle respettive linee di separazione.

Sulla cornice inclinata che rimane alla destra della linea di simmetria agendo in modo diverso la luce non riesce a colpo d'occhio scorgerne gli effetti, come nella cornice opposta. Ma costruendo sopra un piano ausiliario M N, parallelo a quello del profilo b b_1 determinato dalla intersezione delle due cornici, la traccia T della cornice della quale ci occupiamo, sarà agevole ritrovare la linea di separazione d'ombra e di luce e quelle d'ombra portata, ricorrendo al metodo già indicato al N.° 22.

Per tale oggetto prendasi un punto qualunque (α, α') e per

esso conducansi le rette $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$, $(\alpha\gamma, \alpha'\gamma')$ respettivamente parallele agli spigoli della cornice e al raggio luminoso: la retta $\gamma'\beta'$ sarà la traccia sul piano MN del piano da questa retta determinato, alla quale riesciranno parallele quelle di tutti i piani paralleli al raggio luminoso e agli spigoli della cornice.

Ciò posto, conducansi per i vertici a_1, b_1, g_1, h_1 del profilo T altrettante parallele a $\gamma'\beta'$, e si vedrà: che lo spigolo della gola corrispondente ad a_1 porta ombra sulla gola stessa secondo la retta che parte da a_2; che lo spigolo del listello del gocciolatoio porta ombra sul gocciolatoio medesimo secondo la retta che partendo da f_1 va a tagliare quella che parte dal punto r in r_1 situato al di quà del profilo $b\,b_2$; che lo spigolo inferiore del gocciolatoio corrispondente a g_1 porta ombra sopra il sottogocciolatoio secondo la retta che parte da g_2; e finalmente che sul timpano vien portata l'ombra dello spigolo inferiore del sottogocciolatoio secondo la retta $h_2\,n_2$.

L'arco convesso della gola ammette in e' una tangente parallela a $\gamma'\beta'$, la quale sarà traccia d'un piano tangente alla superficie cilindrica avente per direttrice quell'arco e parallelo al raggio luminoso; quindi la generatrice di contatto che è la retta muovente dal punto e_2 sarà la linea di separazione d'ombra e di luce sulla gola. Questa porta evidentemente ombra sopra il piccolo listello del gocciolatoio, che è la retta condotta da o parallelamente ad $r_1\,f_2$.

Esaminando ora attentamente il soggetto che ci occupa si scorge che lo spigolo $a\,b$, e l'altro $s\,s_1$ appartenenti alla cornice di sinistra porteranno necessariamente ombra il primo sulla parte illuminata della gola, il secondo sulla parte illuminata del sottogocciolatoio appartenenti alla cornice di destra.

L'ombra portata sulla gola comincerà dal punto in cui la inclinata di 45° condotta da b incontra la generatrice del punto a_2, e terminerà in un qualche punto della generatrice che parte da e_2. Per trovarlo osserveremo che il piano tangente lungo questa generatrice incontra lo spigolo $a\,b$ in un punto che si proietta in d, onde la inclinata di 45° condotta da questo taglierà la generatrice del punto e_2 nel punto cercato.

La figura dimostra come possa trovarsi un altro punto qualunque dell'ombra in questione

L'ombra portata dallo spigolo a s_1 sopra il sottogocciolatoio comincerà dal punto u in cui la inclinata di 45° che muove da s_1 incontra la retta che parte da g_1. Il piano h_1 h_2 fa conoscere il punto s_2 dello stesso spigolo s s_1 che porta ombra sopra lo spigolo inferiore del sottogocciolatoio, e questa ombra è u_1. La retta u u_1 dovrà riescire parallela ad s s_1.

Una riprova della esattezza del disegno si avrà dal prolungamento del raggio s_2 u_1 il quale deve concorrere colle ombre u n_1 ed h_2 n_1 nel medesimo punto n_1.

Esercizio IV. *Ombra di una mensola* (*Fig.* 29.)

84. Il profilo a b c d e f g m n fatto sopra un piano X Y perpendicolare al coordinato verticale, e la proiezione M' della mensola su quest'ultimo somministrano tutto ciò che è necessario e sufficiente alla soluzione del Problema.

Vedesi immediatamente, per la inclinata di 45° sopra X Y, che comporranno la linea di separazione d'ombra e di luce; 1° gli spigoli orizzontali dei punti b, d; 2° la generatrice del punto f sulla superficie cilindrica avente per direttrice la linea e f g m che è la combinazione dei due archi circolari di centro o, o'; poichè il raggio o f è perpendicolare alla inclinata b b_1: 3° la parte (f i, f' i') della direttrice terminata al punto i, nel quale il raggio o' i è perpendicolare alla medesima retta b b_1.

Queste linee danno le ombre proprie della mensola: così i punti (b, b'), (d, d'), (f, f') portando ombra in (c, c'), (e e') e (g, g'), le ombre delle retta (b, b' b''), (d, d' d'') (f, f' f'') saranno c' c'', e' e'', g' g'' respettivamente parallele ad esse.

Ogni punto l' della curva i' l' g' che è l'ombra della linea (f i, f' i') si otterrà cercando la generatrice secondo la quale la superficie cilindrica della mensola è intersecata da un piano h l parallelo alla direzione dei raggi luminosi, e quindi il punto (l, l') in cui il raggio (h l, h' l') incontra quella generatrice.

Abbiamo trascurata la costruzione dell'ombra della mensola sopra il coordinato verticale, come quella che non presenta alcuna difficoltà. Solo potrà giovare di sapere che per essa la linea di separazione d'ombra e di luce componesi

delle linee (a'', n a_1), (a'' b'', a b), b''' b'', c'' d'', d''' d'', (e'' f'', e f), f'' f''', (g'' m'', g m), (m'', m n), m' m'', (m', m n).

Esercizio V. *Ombra del cavetto* (*Fig.* 30.)

82. È il cavetto una superficie di rivoluzione generata da un quarto di circolo a' b' d' che possiamo supporre aver ruotato attorno all'asse (O, O' O'') della colonna a cui appartiene.

Sulla colonna, che è un cilindro avente per proiezione orizzontale la circonferenza di raggio O m, unica linea di separazione d'ombra e di luce è la verticale del punto (r, r') mezzo del quadrante n r n; quindi da quel punto cominciar deve quella corrispondente al cavetto.

Ora questa linea è una parte di quella che abbiamo ritrovata sulla parte interna del toro (N.° 64); onde ripetendo le relative costruzioni si troverà essere (r p c, r' p' c'). Una tangente che abbia le sue proiezioni inclinate di 45° sulle linee di terra, determina sulla nominata curva il punto (α, α') al disotto del quale la parte residua (α p c, α' p' c') porta ombra sul cavetto.

Un punto qualunque di questa ombra si troverà conducendo per un punto della linea (α p c, α' p' c') un piano perpendicolare al coordinato verticale e parallelo alla direzione dei raggi luminosi; cercando per mezzo di alcuni paralleli la proiezione orizzontale della sezione, e su di essa il punto nel quale è incontrata dalla inclinata di 45° sopra X Y condotta per la proiezione orizzontale del punto.

Queste costruzioni sono così semplici che non han bisogno di essere notate sulla figura per essere comprese.

83 *Osservazione.* — Anche la verticale r' r'' potrebbe portare ombra sulla superficie anulare che termina la colonna. Questo caso avverrà tutte le volte che la linea di separazione d'ombra e di luce sul cavetto rimarrà al di sopra della inclinata di 45° alla linea di terra condotta per il punto (r, r').

Allora la proiezione orizzontale dell'ombra portata dalla retta (r, r' r'') essendo una retta inclinata di 45° sopra X Y che muove da r, si avrà quella sulla proiezione verticale del

cavetto cercando i punti di incontro di questa ultima inclinata con alcuni paralleli del cavetto medesimo.

Esercizio VI. *Ombre del balaustro. (Fig. 34.)*

84. Abbiamo soppresso il piccolo capitello, le cui ombre d'altronde si impareranno a tracciare in uno dei seguenti esercizi, per non conservare del balaustro se non che la parte che è interamente una superficie di rivoluzione.

La parte di mezzo di questa superficie è generata da una curva che è la combinazione di due archi di circolo $a\,b$, $b\,c$ descritti l'uno col centro in v e col raggio $v\,b$, l'altro col centro in v_1 e col raggio $v_1\,b$.

Per determinare la linea di separazione d'ombra e di luce applicheremo il terzo dei metodi indicati al N.° 63, col quale si viene a considerare la superficie in quistione come lo inviluppo di un cono circolare retto.

Consideriamo il piano orizzontale qualunque $b'\,d'$, che taglia la superficie secondo un circolo di raggio b e proiettato orizzontalmente in b e d. La retta $d'\,s'$ tangente in d' al contorno apparente $l'\,D'\,F'$ della superficie, sarà la generatrice del cono circolare retto che ha per base il circolo $b'\,d'$, e per vertice il punto s' dell'asse. Tirando ora per $(B,\,s')$ la parallela ai raggi luminosi $(B\,f,\,s'\,f')$, questa retta riscontra il piano $b'\,d'$ in $(f',\,f)$, dal quale condotta $f\,i$ tangente alla circonferenza b e d, si avrà il punto di contatto $(i,\,i')$ per quello della linea di separazione d'ombra e di luce che si trova sul notato parallelo (N.° 43).

È stato trascurato l'altro punto di contatto che sullo stesso parallelo sarebbe determinato da una seconda tangente condotta per f, rimanendo esso invisibile sul disegno.

Nello stesso modo abbiamo determinati i punti o', h' della linea cercata.

Là dove le tangenti alla curva meridiana resultano parallele all'asse, ciò che ha luogo per i piani $a'\,l'$ ed $M'\,N'$, i punti m' ed n' della linea di separazione sono determinati dalle tangenti a 45° condotte alle proiezioni orizzontali $a\,m\,l$, $M\,n\,N$ delle sezioni circolari prodotte da quei piani; sen-

dochè queste sezioni altra cosa non sieno in tal caso che le basi di due cilindri retti, invece di esser quelle di coni (N.° 40).

Trovato un numero sufficiente di punti si riuniranno con un tratto continuo, od avremo la linea $m' o' i' n' h' j' k' E'$ che sarà quella di separazione d'ombra e di luce sul balaustro.

Giova però determinare con esattezza il punto E' nel quale la proiezione verticale di questa linea ha comune la tangente col contorno apparente della superficie; il punto j' nel quale la stessa linea taglia l'asse; infine il punto più basso k' di essa.

Il punto (E', E) trovandosi sul meridiano principale si ha immediatamente tirando ad esso la tangente $H' E'$ inclinata di 45° sopra $X Y$. L'altro (j, j') si troverebbe proiettando il raggio sopra il meridiano $B G$, e ripetendo le medesime operazioni che furono indicate all'occasione della ricerca della linea di separazione sul toro (N.° 64). Ma come questa proiezione ausiliaria del raggio è sempre una inclinata di 45° alla linea di terra (N.° 72), si vedrà facilmente che il punto (j, j') dee trovarsi sullo stesso parallelo del punto (E, E').

Quanto al punto più basso (k, k'), è noto (N.° 64) trovarsi esso sul meridiano $B R$ parallelo alla direzione dei raggi luminosi. Si farà dunque l'abbattimento $B' R'$ del raggio luminoso, siccome insegnammo al N.° 72, e la tangente al meridiano principale parallela a $B' R'$ determinerà il parallelo $r k$ che conterrà il punto in quistione.

Una parte della linea di separazione d'ombra e di luce, quella proiettata in $E' k' j'$ porta ombra sul filetto cilindrico $c' g'$. per determinare quest'ombra bisogna dapprima tracciare la curva $E k j$ sul coordinato orizzontale, e condurre per i punti di essa delle parallele a $B R$, le quali incontreranno il circolo $r k g$ base del cilindro in altrettanti punti, che proiettati verticalmente determineranno l'ombra cercata $c' p' q'$.

Le linee di costruzione non hanno potuto essere indicate sulla figura, ma si comprendono facilmente.

Anche la circonferenza inferiore del filetto porta ombra sulla scozia sottoposta. Per trovarne un punto qualunque z, possiamo con vantaggio applicare il principio relativo alle ombre portate dalle figure piane su piani ad esse paralleli (N.° 25).

Considereremo perciò il piano orizzontale $z' t'$ che taglia la scozia secondo il circolo z o t; troveremo il punto in cui

la parallela alla direzione dei raggi luminosi condotta pel centro della base del filetto incontra quel piano, e la circonferenza di raggio $\beta\gamma$ eguale a quello del filetto sarà sul piano z' l'ombra di quella base.

il punto (α, α') comune a quest'ombra e alla sezione circolare $(\equiv o\ t, z'\ t')$ sarà evidentemente quello cercato.

Esercizio VII. *Ombre della base attica.* (*Fig.* 32)

85. La linea di separazione d'ombra e di luce sulla colonna è la verticale $(a, a'\ a'')$, e l'altra (d, d') sarà quella del filetto (N.° 40) Il piano verticale $a\ b$ parallelo alla direzione dei raggi luminosi si trova tutto al di quà della linea di separazione d'ombra e di luce appartenente al cavetto. Considerando quindi l'infima sezione circolare $c'\ c''$ di esso ed un'altra intermedia, le quali possono essere sufficienti a cagione della piccolezza della scala che ha servito al disegno del soggetto, il punto (α, α') sulla prima sezione e l'altro che sulla seconda sono determinati dal piano $a\ b$ daranno l'ombra $a'\ \alpha'$ portata sul cavetto dalla retta $(n, n'\ n'')$. (N.° 83).

Le linee di separazione d'ombra e di luce sui due tori $t'\ t''$, $T'\ T''$ si otterranno come al N.° 64. E siccome è sufficiente la parte di queste linee che rimane visibile sulla proiezione B' della base, e di esse ne conosciamo la forma, saranno pure sufficienti per determinarle soltanto i punti che si trovano sul meridiano principale, cioè gli altri $O\ S$, $O\ S_1$ dei quali il primo è parallelo alla direzione dei raggi luminosi, e il secondo ad esso perpendicolare, e sul meridiano $O\ V$ perpendicolare ai due coordinati.

I diametri $o'\ v'$, $o''\ v''$ della generatrice del piccolo toro perpendicolari alla proiezione verticale $O'\ R'$ della direzione dei raggi luminosi somministrano i punti v', v'' sul meridiano principale. Sul parallelo massimo t', t'' si ha immediatamente il punto e' dalla intersezione e della retta $O\ S_1$, colla proiezione orizzontale del parallelo medesimo. Il punto (i, i') sul meriano $O\ V$ trovasi sullo stesso parallelo del punto n, per le ragioni addotte all'occasione della ricerca del punto (j, j') sul balaustro (N.° 84, e Fig. 31). Infine il punto z' che trovasi sul meridiano $O\ S$ è il più basso della linea cercata; e

questo si trova mediante l'abbattimento $O' R'_1$ del raggio luminoso, e il raggio $o' s'$ del semicircolo generatore del toro condotto perpendicolormente a quell'abbattimento.

Contemporaneamente al contorno $v' z' e' i' v''$ puossi ottenere anche l'altro $v'_1 z'_1 e'_1 i'_1 v''_1$ sul toro $T' T''$ con analoghe costruzioni.

La inclinata $v' n'$ passa per la estremità r' del filetto sottoposto al piccolo toro. Osservando che il punto z' della linea di separazione su quest'ultimo è più basso del punto v' dal quale muove la $v' n'$ possiamo ragionevolmente ritenere che da quella linea sia portata ombra sul filetto. Si cercherà quest'ombra $r' q' s'$ col metodo dei piani secanti fino ad un tal punto i' che trovandosi sulla superficie del filetto resti però al disotto della base del filetto $r' r''$. Allora potremo ottenere il punto q' in cui la retta $r' r''$ è tagliata dall'ombra in questione, e col punto q' potremo pure conoscere la parte $v' z' q''$ della linea di separazione del toro $t' t''$ dalla quale proviene il contorno d'ombra $r' q'$.

Sulla scozia sarà quindi portata ombra dalla porzione di circonferenza $r' q'$ e dall'altra parte $q'' e' v''$ della linea di separazione sul toro. Il metodo dei piani secanti applicato ad alcuni punti del contorno $q'' e' v''$ somministra la linea $n'' m'$ per l'ombra da esso portata sulla scozia.

Lo stesso metodo potrebbe pure somministrare l'altra linea $n' u' n'' u''$, che è l'ombra portata dalla circonferenza $r' r''$. Ma abbiamo creduto meglio trovarne i diversi punti servendosi del principio stabilito al N.° 25, concedendolo la circostanza dell'essere i piani delle sezioni circolari della scozia paralleli a quello della circonferenza $r' r''$. La figura contiene le proiezioni delle sezioni circolari rammentate, le costruzioni fatte per trovare il centro dell'ombra portata da questa circonferenza sui piani delle sezioni medesime, non che le proiezioni di quell'ombra.

Sono da trovarsi anche le ombre portate sui due tori dalle linee verticali di separazione d'ombra e di luce dei filetti sovrapposti, come dalle porzioni delle circonferenze superiori di questi filetti comprese fra le verticali medesime e quelli dei punti estremi c'', u''. Una inclinata di 45° sopra $X Y$ condotta dalle estremità superiori delle prime somministra il punto nel

quale terminano le loro ombre; il metodo non ha guari indicato per costruire l'ombra della circonferenza $r' r''$ sulla scozia, somministra le ombre delle seconde, che orizzontalmente si trovano proiettate sulle curve $d\ d_1$, e e_1.

Infine vi ha l'ombra orizzontalmente proiettata sulla curva $h\ g$, e verticalmente sulla retta $f'\ g'$, la quale è portata sulla faccia superiore dello zoccolo dalla parte $e'_1\ g''$ della linea di separazione sul toro $T'\ T''$.

Esercizio VIII. *Ombre del capitello dorico* (*Fig.* 33.)

86. Le proiezioni del capitello sono C e C'. Tralasciamo di dire delle ombre della cimasa bastando per essa ciò che è stato detto al N.° 78.

Costruiremo dapprima la linea di separazione ($c\ d$ e f, $c'\ d'\ e'\ f'$) sull'uovolo, seguendo il metodo praticato nell'esercizio precedente per ottenere quella sui tori, e cercheremo quindi l'ombra che su questo modine vien portata dagli spigoli ($a\ a_1$, a'), ($a\ b$, $a'\ b'$) dell'abbaco. Il primo di questi spigoli essendo perpendicolare al coordinato verticale ha per proiezione verticale dell'ombra la retta $v'\ i'$ inclinata di 45° sopra $X\ Y$; il secondo porta un'ombra $d'\ o'\ e'$, ogni punto e' della quale puossi agevolmente trovare nel modo seguente.

Si considera la sezione circolare (e_1 e e_2, $e''\ e'$) dell'uovolo e si trova sul piano di essa l'ombra $m\ n$ dello spigolo la quale dovrà essere parallela ad $a\ b$; i punti e, e_1 nei quali $m\ n$ taglia l'arco e_1 e e_2 somministreranno i due punti e', e'_1 della curva $d'\ o'\ e'$.

La $c'\ g''$ inclinata di 45° sopra $X\ Y$ non tagliando nè toccando il profilo del tondino $t'\ t''$ dimostra che sul tondino medesimo non può essere portata ombra dalla linea $c'\ d'\ e'\ f'$, e che per conseguenza nè sopra di esso, nè sul listello sottoposto può esservi alcuna parte illuminata.

Tirando da g' piede della verticale del punto g'' la $g'\ g$ inclinata di 45° sopra $X\ Y$ si otterrà la proiezione orizzontale di quel punto della linea $c'\ t'$ che porta ombra in g' sopra il contorno del fusto cilindrico del capitello, e quindi otterremo facilmente l'ombra h' del punto i'.

La retta $h'\ h''$ che trovasi sul prolungamento della incli-

nata $a' s'$ sarà l'ombra portata sul fusto medesimo dallo spigolo ($a\ a_1$, a'), e terminerà nel punto h'' ove la parallela ai raggi luminosi condotta pel punto (a, a') incontra il fusto.

Dal punto h'' fino all'altro s'' si ha l'ombra dalla parte dello spigolo ($a\ b$, $a'\ b'$) verticalmente proiettata in $a'\ s'$; dal punto s'' fino ad x'' stà l'ombra della parte di contorno $d'\ x'\ c'$ verticalmente proiettato in $d'\ x'$. Questo punto x'' dea trovarsi sulla verticale del fusto proiettata orizzontalmente in y, e che è la sua linea di separazione d'ombra e di luce.

Restano ora a costruirsi le ombre proprie e portate del collarino o sommoscapo della colonna.

Per il tondino si troverà col solito mezzo la linea di separazione d'ombra e di luce. Quindi l'ombra portata sul sottoposto listello, seguendo il metodo indicato nell'esercizio precedente rispetto all'ombra portata dal piccolo toro $t'\ t''$ (Fig. 32) sul listello $r'\ r''$. E finalmente l'ombra $p'\ q'\ r'$, e l'altra $r'\ j'$ che la parte illuminata della circonferenza inferiore del listello e la rimanente linea di separazione sul tondino portano respettivamente sopra il fusto della colonna.

La seconda di queste ombre dovrà terminare alla verticale $y'\ j'$ che è linea di separazione d'ombra e di luce sulla colonna.

87. *Osservazione.* — Se l'oggetto dall'novolo sul tondino sottoposto fosse stato minore di quello che ha nella figura, avrebbe potuto verificarsi su quest'ultimo una parte illuminata consimile a quella ritrovata sull'uovolo.

In tal caso avremmo dovuto costruire anche la linea di separazione d'ombra e di luce sul tondino; il contorno $d'\ x'\ e'$ avrebbe portato ombra sopra di esso determinando sulla sua linea di separazione una parte che alla sua volta avrebbe pure portato ombra sul listello sottoposto: e la porzione della circonferenza inferiore di questa rimasta illuminata sarebbe stata quella che invece del contorno $d'\ x'$ avrebbe determinato sul fusto cilindrico del capitello la linea d'ombra analoga ad $s''\ x''$.

Esercizio IX. *Ombra del taglio verticale di una cupola sferica con apertura circolare alla chiave* (*Fig.* 34.)

88. La semiconferenza di raggio $O\ A$, e la linea $A'\ A''\ a'$ $a'_1\ A''_1\ A'_1$ sono le proiezioni della superficie interna della cu-

pola; la semicirconferenza $O\,a$, e il rettangolo $a'\,a''_1\,a'_1$ sono quelle dell'apertura circolare; la semicirconferenza $O\,B$, e il rettangolo $B'\,A''\,A''_1\,B'_1$ sono infine quelle di una fascia da cui è terminato il tamburo o corpo cilindrico che si accorda colla parte sferica della cupola

Come al N.° 57 costruiremo la linea $b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'$, che sarebbe l'ombra portata entro la cupola dal contorno $b'\,a'_1\,m\,a'\,A''\,A'_1$ mediante la proiezione ausiliaria $E_1\,F_1\,G_1$ fatta sul piano $X'\,Y'$ perpendicolare al coordinato verticale. Quindi procederemo alla ricerca dell'ombra che proviene dalla apertura circolare, incominciando da quella prodotta dalla semicirconferenza proiettata in $a'\,a'_1$.

La proiezione ausiliaria di questa linea di separazione sarebbe una semiellisse avente per asse minore la proiezione ausiliaria $a_1\,a'_1$ del diametro $a'\,a'_1$ e per semiasse maggiore il raggio $n'\,a_1$ contato da n_1 in n_2 sulla $n'\,n'_1$ perpendicolare ad $X'\,Y'$. È inutile però costruire questa semiellisse, poichè la proiezione ausiliaria di un punto qualunque o' della notata semicirconferenza può trovarsi immaginandola abbattuta in $a'_1\,o_1\,n_1\,a'$ sopra il piano verticale $a\,a_1$, e riportando l'ordinata $o'\,o_1$ del punto considerato da o_1 in o'_2 sulla $o'\,o_1$ perpendicolare ad $X'\,Y'$.

Il punto o'_2 sarà proiezione ausiliaria di o', e l'ombra di esso sulla parte sferica della cupola si troverà, conducendo il piano secante $r'\,o'\,s'$ parallelo alla proiezione verticale della direzione dei raggi luminosi e perpendicolare al coordinato verticale. Questo piano taglierà la cupola secondo una semicirconferenza $r_2\,o'_2\,r_2$, e il punto r_2 in cui questa verrà incontrata dalla retta $o'_2\,r_2$ parallela alla proiezione ausiliaria $E_1\,F_1$ del raggio luminoso somministrerà l'ombra cercata r''.

Da questa operazione convenientemente ripetuta per altri punti della linea $a'\,a'_1$ avremo la sua ombra nel contorno $c'\,r''\,d'$.

La semicirconferenza (o a, $a''\,a''_1$) porta ombra nell'interno del cilindro costituente l'apertura, e nell'interno della cupola. Ciò desumesi dall'ombra che porterebbe il punto (a, a'') sul cilindro stesso supposto prolungato inferiormente; poichè questa ombra sarebbe il punto a' situato al disotto della linea $a'\,a'_1$. Non fa mestieri spiegare come si trovi

l'ombra sul piccolo cilindro, la quale comincia dal punto (i, i') mezzo del quadrante $a\ i\ \alpha$, e per conseguenza limite della linea di separazione ($a\ i$, $a''\ i'$) sulla sua base superiore, e termina nel punto β' nel quale incontra la retta $a'\ a'_1$.

Per avere la parte di ombra che dalla medesima linea viene portata entro la cupola, conviene evidentemente trovarla per intero. Le costruzioni sono identiche a quelle superiormente indicate rispetto all'ombra della linea ($a\ \alpha\ \alpha_1$, $a'\ a'_1$), e somministrano il contorno $\alpha''\ \beta''\ i''$ del quale la sola parte $\alpha''\ \beta''$ è l'ombra cercata.

La verticale (a, $a'\ a''$) da per ombra nella superficie sferica della cupola la curva $\alpha''\ d'$; e cercando quello che alcuni punti della linea $a'\ E'\ A''$ portano sul cilindro verticale del quale fa parte la fascia, trovasi l'altra curva $d''\ h'\ l'\ e''$. La base inferiore ($O\ B$, $B'\ B'_1$) di questa fascia porta l'ombra $\varepsilon'\ \rho'$ sopra la parte cilindrica della cupola.

Dal che puossi infine dedurre essere il contorno totale delle ombre domandate composto della linea $\varepsilon'\ \beta'$ sul cilindro dell'apertura; delle linee $b'\ e'\ r''\ \beta''\ \alpha''\ d'\ \delta'$ sulla parte sferica della cupola; della linea $l'\ h'$ sulla fascia, e delle linee $\varepsilon'\ \rho'$, $\varepsilon'\ e'\ f'\ g'$ sul cilindro o tamburo.

Esercizio X. *Ombra di una scanalatura di colonna nella sua parte inferiore* (*Fig.* 35)

89. Le scanalature delle colonne si compongono di una parte cilindrica incavata nella direzione dell'asse del fusto e terminata inferiormente e superiormente da una porzione di calotta sferica, la cui base deve esser comune a quella del cilindro, affinchè le due superficie si accordino lungo di essa. Questa base, sempre minore di una semicirconferenza di circolo grande, ha il centro talvolta sul fusto della colonna, talvolta fuori di esso e collocato sopra una superficie esterna concentrica a quella del fusto.

Le costruzioni essendo identiche in ogni caso ed analoghe sì per l'ombra della parte superiore della scanalatura sì per quella della parte inferiore, noi limiteremo la ricerca a questo secondo caso, supponendo di più che il centro della calotta sferica si trovi sulla superficie della colonna

Sia pertanto l'arco $A\ C\ B$, descritto col raggio $O\ A$, la proiezione orizzontale d'una porzione di colonna, nella quale è compresa la scanalatura orizzontalmente proiettata sull'arco a e b avente per centro C e per raggio $C\ c$. Il piano verticale $X\ Y$ rappresenti quello su cui è disegnato l'alzato della colonna.

Supposto che i centri di tutte le callotte sferiche si trovino collocati sul piano orizzontale $x'\ y'$, sarà (C, C') quello della callotta che termina la scanalatura considerata, e le rette $(a, a'\ a'')$, $(b, b'\ b'')$ costituiranno il contorno apparente verticale della sua parte cilindrica.

Il contorno apparente della parte sferica è la proiezione verticale della linea secondo la quale la superficie convessa della colonna interseca la superficie della callotta. I punti più alti di questa linea sono a' e b', il punto più basso trovasi sulla verticale del punto C in f' distante dal piano $x'\ y'$ della quantità $C'\ f'$ eguale al raggio $C\ c$ della callotta, perchè il centro di questa stà sopra la superficie del fusto; ogni altro punto poi si determinerà mediante una serie di piani orizzontali nel modo seguente.

Sia $x''\ y''$ uno di questi piani; la callotta sarà da esso intersecata secondo la circonferenza di raggio $o'\ d''$, che orizzontalmente si proietta su quella di raggio $C\ d = o'\ d''$ e verticalmente sulla retta $d'\ d''$; e i punti e, f nei quali è da essa incontrata la proiezione orizzontale $A\ C\ B$ della colonna saranno le proiezioni orizzontali di due punti e', f' del contorno cercato. In simile guisa potremo ottenere altrettante coppie di punti quante crederemo utili per il più esatto delineamento del contorno medesimo.

Occupiamoci delle ombre richieste: la verticale $(a, a'\ a'')$, e l'arco $(a$ e g, $a'\ e'\ g')$ determinato dalla inclinata $g'\ h'$ di 45° sopra $X\ Y$ compongono evidentemente la linea di separazione d'ombra e di luce.

Tirando $a\ i$ inclinata sulla stessa linea di 45° si troverà immediatamente la verticale $(i, i'\ i'')$ per l'ombra portata dallo spigolo verticale delle scanalature entro la parte cilindrica di essa. Ma come il punto i' sarebbe somministrato dal punto a'' dello stesso spigolo, è chiaro che la parte $a'\ a''$ di esso porterà ombra entro la callotta sferica, e che questa

ombra sarà la sezione in quella prodotta dal piano verticale condotto per $(a, a' a'')$ parallelamente alla direzione dei raggi luminosi. Tutti i punti (n, n') di tale sezione si possono ottenere in grazia di quei medesimi piani orizzontali $x'' y''$ che hanno servito a costruire il contorno $a' g' f' f'' b'$. Il punto più basso (r, r') si troverebbe su quel piano $x''' y'''$ che determina nella calotta la sezione circolare, di cui la proiezione orizzontale resulta tangente alla traccia orizzontale a i del piano. In fine il punto (m, m') nel quale la inclinata $a' m'$ di 45° sopra $X Y$ incontra la curva $i' n' r'$ sarà il limite dell' ombra portata nella calotta dalla retta $a' a''$.

La parte rimanente $m' g'$ del contorno d'ombra è somministrata dall' arco $a' e' g'$. E volendo trovare un punto qualunque di essa bisognerà immaginare condotto per un punto dell'arco medesimo un piano parallelo alla direzione dei raggi luminosi; costruire di poi la sezione prodotta da questo nella calotta, per la quale possono essere utili i piani orizzontali $x''' y'''$; infine determinare il punto in cui la proiezione verticale di questa sezione è incontrata dalla retta condotta pel punto considerato sull' arco $a' e' g'$ parallelamente alla proiezione verticale della direzione dei raggi luminosi.

90. *Osservazione.* — Crediamo cosa utile il notare che il contorno apparente della scanalatura nella sua parte superiore si costruisce nel modo istesso ora indicato, e che i medesimi punti e, f... possono essere proiezioni orizzontali di altrettanti punti di quel contorno

Pel contorno dell' ombra in quella parte, potendo usarsi lo stesso metodo, ci limitiamo solo a fare osservare, che essa comincierà dal punto in cui è toccato il contorno curvilineo della scanalatura da una tangente inclinata di 45° sopra $X Y$; e che, mentre nella parte inferiore abbiamo visto esser portata ombra nella calotta sferica da una porzione dello spigolo della parte cilindrica della scanalatura, al contrario entro la calotta superiore vien portata l' ombra intieramente da una porzione del suo contorno, portandola la porzione residua entro la parte cilindrica della scanalatura medesima.

In breve l' effetto della luce nell' alto delle scanalature delle colonne, è analogo, non identico si noti bene, a quello ritrovato nella nicchia sferica N.° 64.

Esercizio XI. *Ombre di arcate perpendicolari e parallele a piani verticali (Fig. 36 a 37.)*

91. La *Fig.* 36, proiezione orizzontale di questa parte di composizione architettonica, mostra una serie di arcate *a, a'*,... in direzione perpendicolare al muro verticale *A B*, sostenute da pilastri *p, p'*... che sono terminati superiormente e inferiormente da uno zoccolo. Si suppone fatto un taglio in questo oggetto da un piano verticale *x y* parallelo ad *A B*, e la proiezione verticale di esso fatta su questo piano si scorge nella *Fig.* 37; dalla quale si rileva che lungo la parete verticale orizzontalmente proiettata in *A B* ricorrono uno zoccolo e una fascia in corrispondenza delle due estremità dei pilastri, che in questa medesima parete sono pure praticate delle arcate semicircolari eguali alle precedenti; e che si le une come le altre sono chiuse da piccoli parapetti *q, q'*... di eguale altezza. Supponesi però che queste ultime arcate rappresentino dei semplici vani a guisa di nicchia, e della profondità espressa dalla retta *r s*.

La proiezione orizzontale dell'oggetto è disegnata in una scala più piccola di quella che ha servito alla costruzione della proiezione verticale. La prima ha con la seconda il rapporto di 2 : 3, che d'altronde potrebbe anche essere qualunque.

Crediamo affatto superfluo il render conto minutamente delle operazioni necessarie alla costruzione delle ombre richieste, operazioni che trovandosi tutte tracciate sulle due figure devono avere un linguaggio sufficientemente chiaro per colui che si è familiarizzato coi principii e cogli esercizi precedenti.

Pur nondimeno gioverà notare:

1.° Che le arcate nella parete verticale *A B* dispensano dal fare l'abbattimento di quelle proiettate in *a, a'*... onde ottenere il punto *c* limite della loro linea di separazione d'ombra e di luce, e quindi l'ombra *c d*; abbattimento che sarebbe stato indispensabile senza la presenza delle prime, siccome abbiamo veduto al N.° 47.

2.° Che i punti *e, g, e'*... sulla proiezione orizzontale, e che servono alla costruzione dell'ombra portata dalle arcate corrispondenti sopra la parete verticale *A B*, sono determinati

dalle distanze eguali $r\ m$, $r\ n$ contate a partire dal centro r dell' arcata contenuta nella medesima parete.

3.° Che per l' ombra $o\ v\ o_1$ portata da quest' ultima sulla parete parallela ad $A\ B$ bisogna applicare i principi stabiliti ai N.i 25, e 73.

Esercizio XII. *Ombra della vite a verme triangolare.* (*Fig.* 38.)

92. Torna opportuno qui rammentare i principii esposti ai N.i 68, e 69, ed applicare le costruzioni già fatte per la ricerca delle ombre dell' elicoide storta (N.° 70.)

La inclinazione scambievole delle due rette $a'\ a'_1$, $a'\ f'$ la prima delle quali è la generatrice della superficie inferiore del verme, e la seconda è una inclinata di 45° sopra $X\ Y$, mostra ad evidenza non esistere, sul genere di vite che si considera, altra linea di separazione d' ombra e di luce che la elica generata dal punto a'. Per la qual cosa giova servirsi del metodo generale dei piani secanti per determinare l' ombra che sulla superficie superiore di ciascun verme vien portata da quella elica.

A tale oggetto costruiremo diverse eliche ausiliarie $f'\ g'$, $m'\ n'$ sulla superficie di un verme qualunque; quindi conducendo per un punto qualunque $(b,\ b')$ dell' elica $a'\ e'$ un piano verticale $b\ b_1$ parallelo alla direzione dei raggi luminosi, cercheremo i punti nei quali sono da esso incontrate le eliche ausiliarie non che quelle orizzontalmente proiettate sulle semicirconferenze $a\ e$, $a_1\ e_1$ e troveremo così la sezione $(o\ i,\ o'\ i')$. Allora il punto k', nel quale la inclinata di 45° sulla $X\ Y$ condotta per b' incontra quella sezione, sarà un punto dell' ombra cercata.

Convenevolmente ripetuta questa costruzione con altri piani secanti troveremo la linea $f'\ h'\ l'$ che sarà il contorno dell' ombra medesima.

Il punto $(l,\ l')$ di questo contorno che si trova sopra l'elica $o'\ b'_1\ l'$ può determinarsi col metodo indicato al N.° 70 Si considereranno perciò le medesime inclinate dei diversi punti b', c', d'... come proiezioni verticali delle generatrici di due superficie cilindriche aventi per direttrici l'una la porzione

a' e' dell' elica a e, l' altra la porzione o'' e'' della stessa elica e costruite le sezioni r s, r_1 s_1 fatte in questi cilindri dallo stesso piano orizzontale x' y' ne resulterà la generatrice comune v l, che farà conoscere il punto (l, l').

Il contorno f' h' l' dovrà poi riportarsi sui diversi vermi della vite, siccome viene indicato dalla figura.

Esercizio XIII. *Ombre della vite a verme rettangolare.* (*Fig.* 39.)

93. La linea di separazione d'ombra e di luce si ha unicamente sopra la faccia cilindrica di ciascun verme. Essa riducesi ad una parte dell' elica a' b' c' d', ed alle rette verticali (m, m' n') delle quali è occorso tante volte indicare la costruzione. Vi potrebbe essere una simile linea (p, p' q') anche sopra il nucleo (c f g, e' g'); ma nel nostro caso non ha luogo a cagione dell' ombra su di esso portata dall' elica a' b' c' d'.

Per trovare un punto b' del contorno di questa ombra, si condurrà per il punto (b, b') della linea di separazione un piano secante b b_1 parallelo alla direzione dei raggi luminosi; esso intersecherà il nucleo secondo la verticale del punto b_1, e il punto b'' nel quale viene questa incontrata dalla b' b'' inclinata di 45° sopra X Y apparterrà al contorno richiesto.

Il punto i' sopra la elica r' s' potrebbe determinarsi collo stesso metodo che ha somministrato il punto (l, l') nell' esercizio precedente; ma è più semplice e sufficientemente esatto nella pratica cercare il punto i'' sulla linea di separazione del nucleo, il quale vien posto in evidenza dalla costruzione fatta sul piano secante b b_1 convenientemente ripetuta rispetto al piano tangente c p.

Le ombre ora ottenute su questa vite vengono modificate nella sua parte superiore dalla linea (h l o, h' o') della testa T, da cui è sormontata la vite medesima. Le linee r' s', r'' s'' sono le ombre di quella circonferenza sopra la parte cilindrica del verme, v' x' è l' ombra sul nucleo. I piani secanti r r_1, O s_1 somministrano i punti principali di queste ombre; gli altri punti si possono colla massima facilità determinare con altri piani secanti

Esercizio XIV. *Ombre della vite a verme rotondo* (*Fig.* 40).

94. Questa vite, della quale il verme o parte saliente è, come sappiamo (*Geom. Descritt.*) generato da un circolo $n'\ b'\ c'\ d'$ di cui il piano passa per l'asse e il cui centro si muove sopra un'elica data, e della quale la parte incavata compresa fra un verme e l'altro è generata dal semicircolo $d'\ e'\ f'$ tangente al primo, ha una linea di separazione d'ombra e di luce su ciascun verme e quindi un'ombra portata sulla parte incavata come anche sul verme sottoposto.

Ecco qual via può tenersi per determinare un punto dell'una e dell'altra.

Si conduca per l'asse un piano meridiano $G\ O$, il quale taglierà il verme secondo un circolo orizzontalmente proiettato in $i\ l$. La proiezione verticale di questa sezione sarà una ellisse i cui punti principali i', k', l', n' si otterranno proiettando i punti i, k, l sopra le respettive eliche corrispondenti ai punti (a, a'), (b, b'), (c, c'). Se ora si proietta la retta $(O\ E,\ O'\ E')$, parallela ai raggi luminosi, sopra il piano $O\ G$, basterà condurre alla proiezione verticale $i'\ k'\ l'\ n'$ della sezione una tangente $r'\ s'$ parallela alla proiezione $O'\ g'$ di quella retta; e il punto di contatto m apparterrà alla linea di separazione d'ombra e di luce.

Continuando a determinare la sezione $n'\ o'\ p'$ dello stesso piano $O\ G$ sopra la parte incavata della vite, la medesima tangente $r'\ s'$, o il suo prolungamento incontrerà la linea $n'\ o'\ p'$ in un tal punto o' che sarà uno di quelli dell'ombra portata.

Tali operazioni ripetute per altri piani meridiani somministreranno il contorno $n'\ m'\ u'$ per limite dell'ombra pura sul verme della vite, e il contorno $v'\ o'\ x'\ y'$ per limite di quella portata.

95. *Osservazione I.* — Abbiamo affatto trascurata la costruzione delle proiezioni delle notate tre specie di viti, perchè di quelle è stato sufficientemente parlato nel corso di Geometria Descrittiva.

Quanto poi alle ombre ritrovate sulle prime due, dobbiamo notare che esse non resultano identiche in tutti i casi anche per una medesima inclinazione del raggio luminoso.

Così nella vite a verme triangolare, se il triangolo isoscele a' n'_1 a'' generatore di essa, non avesse avuto la sua altezza a'_1 t' maggiore della metà della base a' n'', avrebbe potuto verificarsi anche un'altra linea di separazione d'ombra o di luce indipendente dalla elica generata dal vertice a'. Quindi anche l'ombra portata sarebbe riescita diversa.

Lo stesso è da dirsi rispetto all'altra vite a verme rettangolare, nella quale il passo dell'elica direttrice può essere differente da quello adottato nella figura.

96. *Osservazione II.* — Nella pratica non sempre si incontrano le viti coll'asse verticale; non è raro anzi il caso in cui il loro asse sia orizzontale, e la inclinazione dei vermi anche opposta a quella da noi considerata.

L'effetto della luce sopra di esse resulterà allora diverso, ma le costruzioni suesposte per determinare i limiti delle loro ombre non cambiano.

Esercizio XV. *Ombre del taglio longitudinale di una caldaia a vapore* (*Fig.* 41).

97. Componesi questo taglio di un semicilindro circolare retto H L M N coll'asse orizzontale, terminato alle estremità da due semicalotte sferiche che si accordano con esso, e sormontato da due semitubulature T, T' la prima delle quali è chiusa da un coperchio.

Immaginando intiera la caldaia, e in essa prodotta una sezione secondo la linea X Y, questa sezione abbattuta avrebbe la forma che presenta la figura in S, e che può per comodo considerarsi come una proiezione ausiliaria della caldaia medesima fatta sopra il piano X Y.

Dobbiamo dunque trovare le ombre nelle due semicalotte sferiche, nel semicilindro e nelle tubulature.

I raggi O D, Q P condotti per i centri delle calotte perpendicolarmente alla retta E_2 O_2 che indica la inclinazione della proiezione del raggio luminoso sul piano verticale del taglio, somministrano immediatamente i limiti della linea di separazione d'ombra e di luce per le prime due parti della caldaia la quale si comporrà delle tre linee D A H I, F I_1, F_1 N P. Le verticali I M, m M, I_1 M_1, m_1 m_1; la semiconferenza M M_1

del coperchio della tubulatura T; le linee (n_1 o_1, n_1 o), o_1 p_1 della seconda tubulatura T', e le intersezioni J F, J_1 F_1 del corpo cilindrico della caldaia colle tubulature stesse compongono la linea di separazione di queste ultime.

Il contorno d'ombra D d C e g h determinato dalla circonferenza base della callotta di centro O, si trova colle stesse costruzioni indicate per l'ombra della nicchia sferica (N.i 61 e 62), servendosi a tale oggetto del taglio S fatto lungo la linea X Y. La corrispondenza delle lettere mostra a sufficienza l'ordine delle costruzioni medesime.

Merita solo d'essere notata la semplicissima costruzione, a cui la inclinazione particolare del raggio luminoso da luogo, per determinare la direzione E_1 e_1 della proiezione ausiliaria del raggio luminoso. Sappiamo (N.° 61) che la semicirconferenza di raggio O_1 E_1 e la proiezione della callotta fatta sopra un piano verticale parallelo al piano meridiano E O e della callotta medesima. Ora se immaginiamo questo piano trasportato parallelamente a sè stesso in E_2 O_2, e la linea di terra in O_2 e_2, il triangolo rettangolo isoscele E_2 e_2 O_2 ci fornisce modo di considerarne la ipotenusa E_2 O_2 come la proiezione verticale d'un raggio luminoso condotto per un punto E_2 elevato dal coordinato orizzontale della quantità E_2 e_2. Talchè volendo conoscere l'abbattimento di questo raggio fatto sul coordinato verticale, basterà prendere la lunghezza E_2 R eguale ad E_2 e_2 sopra la retta E_2 R perpendicolare ad E_2 O_2 e tirare R O_2. Così la direzione E_1 e_1 dovrà riescire parallela ad R O_2, e la retta O_1 e_1 sarà la proiezione ausiliaria dell'ombra portata nell'interno della callotta.

L'ombra i n I portata nel corpo cilindrico della caldaia dalla verticale I M della tubulatura T è un arco di circolo di raggio O i eguale a quello della base del cilindro.

Considerando infatti il cilindro insieme alla retta I M proiettato sopra un piano verticale H L parallelo ad I M, l'ombra di un punto qualunque (V, V') di questa retta si troverà in grazia di un piano secante V' A parallelo alla direzione dei raggi luminosi e all'asse del cilindro: poichè un tal piano taglierà il cilindro secondo la generatrice (A, n v), e quindi il punto v determinato su questa dalla intersezione dell'altra proiezione V v del raggio luminoso sarà l'ombra ri-

chiesta. Ora i due triangoli $a\ A\ V'$, $a_1\ V\ a$ essendo eguali tali resultano ancora gli altri due $A\ a\ O$, $a_1\ O'\ a$; onde saranno pure eguali le rette $A\ O$, $O'\ a$. Questa proprietà verificandosi per ogni altro punto della linea $i\ a\ I$, ne consegue che tutti i suoi punti sono equidistanti da O' di una quantità eguale al raggio del cilindro, dunque l'ombra della verticale $I\ M$ sulla superficie di questo è un arco di circolo avente il medesimo raggio della sua base.

Si può trovare il limite e'' di un tale arco cercando il punto (E_1, E') corrispondente a un piano ausiliario $E'_1\ E$ tangente al cilindro.

Facile a determinare l'ombra della residua parte $E'\ M$ della verticale nell'interno della tubulatura, siccome quella della piccola retta $m\ M$ del coperchio: si osserverà che la prima dee trovarsi sull'asse della tubulatura medesima.

Il diametro $M\ M_1$ del semicoperchio trovasi rispetto all'asse della tubulatura T nella medesima posizione, in cui rispetto all'asse del corpo cilindrico della caldaia trovavasi la verticale $M\ I$; onde la sua ombra sarà circolare, e si troverà descrivendo l'arco $M_1\ t_1$ col centro in t.

Per l'ombra portata dalla intersezione $I\ J\ F$ della tubulatura T nel cilindro basterà considerare la parte $J\ K\ F$. La proiezione ausiliaria S somministra il modo di rintracciare facilmente quest'ombra. Per un punto qualunque (K, K') si condurrà il piano secante $K'\ k'$ parallelo alle generatrici del cilindro e alla direzione dei raggi luminosi; il primo verrà intersecato secondo una orizzontale avente per proiezione ausiliaria k', e il punto k in cui la proiezione verticale del raggio luminoso la incontra, sarà l'ombra di (K, K').

L'ombra di cui si tratta taglia in j quella della verticale $I\ M$, e termina in f sull'asse del cilindro.

La parte $f\ i_1$ di quest'asse è l'ombra della generatrice $F\ I_1$

Le ombre della tubulatura T', ad eccezione di quella che nel corpo cilindrico della caldaia vien portata dalla verticale $I_1\ M_1$, sono diverse dalle ombre non ha guari costruite nella tubulatura T, a cagione dell'apertura semicircolare che si trova nella parte superiore. Ma la loro costruzione non offre particolarità meritevoli di essere notate.

Lo stesso può dirsi delle ombre portate dalle linee $I_1\ J_1\ F_1$,

F, N, N P dopo le spiegazioni emesse nella ricerca di quelle delle linee analoghe presentate dal soggetto.

98. *Osservazione.* — Il precedente esercizio, col quale chiudiamo la serie di quelli promessi al N.° 77 come applicazioni del raggio luminoso avente le sue proiezioni inclinate di 45° alla linea di terra, ha offerto il modo di ritenere come dimostrato che, ogni qualvolta un cilindro retto è parallelo o perpendicolare ad un piano coordinato, qualunque retta perpendicolare all'asse di questo cilindro e parallela a quel piano coordinato, porta ombra sulla superficie di esso secondo una curva eguale alla sua base.

CAPO X.

Raggi luminosi emanati da un punto.

99. Non è strano nella pratica il caso, in cui il corpo luminoso possa considerarsi come ridotto a un punto collocato ad una distanza finita dai corpi illuminati. Il contorno delle ombre si troverà allora, immaginando che una retta condotta per il punto luminoso si muova toccando la superficie del corpo opaco e non cessando di passare per quel punto. Nel suo movimento questa retta genererà una superficie conica composta di tante nappe distinte, quante sono le parti prominenti diverse del corpo opaco; ma potrà anche compor si di faccie tutte piane, o in parte piane e in parte curve secondo la forma del corpo medesimo. Ad ogni modo è manifesto:

1.° Che tutte le linee di contatto saranno altrettanta linea di separazione d'ombra e di luce (N.° 7. I.)

2.° Che tutte le linee d'intersezione delle due superficie, o della superficie conica circoscritta con i piani coordinati o con altre superficie date, costituiranno il contorno delle ombre portate (N.° 9. III.)

3.° Che delle linee di separazione d'ombra e di luce, o di quelle costituenti il contorno delle ombre portate non bisognerà tener conto di quelle parti, le quali sarebbero determinate da raggi luminosi che per arrivare ad esse han dovuto attraversare la massa del corpo opaco (N.° 40. 4°).

100. La soluzione del problema dipende in generale anche in questo caso da uno dei metodi esposti al N.° 42; colla differenza che i piani ausiliari, sieno secanti, o sieno tangenti, devono passare costantemente per il punto luminoso. Questa condizione non determinandoli completamente, la semplicità delle costruzioni dipenderà in ogni caso speciale: 1.° dall'applicazione dell'uno piuttosto che dell'altro metodo 2.° da una giudiziosa scelta del sistema dei piani secanti, quando convenga ricorrere ad essi, i quali potranno scegliersi fra una infinità di sistemi di piani, come sarebbe un sistema di piani verticali condotti per il punto luminoso, o di piani perpendicolari al coordinato verticale condotti per lo stesso punto, o di piani paralleli ad una retta fissa qualunque ec.

Tutte le volte che la superficie del corpo opaco, o una parte di essa sarà di rivoluzione, il sistema dei piani tangenti sarà preferibile all'altro dei piani secanti. I punti di contatto si troveranno in quel caso nel modo insegnato in Geometria Descrittiva per la costruzione del piano tangente ad una superficie di rivoluzione condotto per un punto esterno.

Converrà qualche volta usare ambedue i metodi in un medesimo esempio, siccome è avvenuto di usarli nel caso precedente dei raggi luminosi paralleli; talvolta potremo anche fare a meno dell'uno e dell'altro, se la natura del corpo opaco vi si presta.

Dopo gli esempi trattati, e gli esercizi esposti nei numeri precedenti, sarebbe superfluo, se non inutile, percorrerli nuovamente nell'ipotesi della luce proveniente da un punto.

Limiteremo le applicazioni ad un solo coll'intendimento di rendere più chiaro ciò che l'esposizione dei metodi generali potrebbe lasciare di oscuro.

PROBLEMA. *Dato un punto luminoso ed una sfera opaca, trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sopra di essa, e il contorno dell'ombra portata sui piani coordinati* (*Fig.* 42.)

101. Sia (P, P') il punto luminoso, ed (s, s') la sfera data.

Linea di separazione d'ombra e di luce. — Facendo passare per il punto (P, P') e pel centro della sfera un piano verticale, sarà questa tagliata secondo un circolo grande. Si conduca per il punto medesimo una tangente a questo circolo, e poi si immagini che il sistema del circolo e della sua tangente ruoti attorno alla retta $(P\,s, P'\,s')$. si avrà dal circolo generata la sfera, e generata dalla tangente una superficie conica a quella circoscritta, la quale conterrà tutti i raggi luminosi capaci d'illuminare la sfera: toccherà questa secondo un circolo piccolo descritto in un piano perpendicolare alla retta $(P\,s, P'\,s')$ e che sarà la linea cercata di separazione d'ombra e di luce. Se come al N.° 55 noi facessimo la proiezione ausiliaria della sfera e del cono sopra uno dei piani proiettanti la retta $(P\,s, P'\,s')$ potremmo determinare in grazia delle precedenti considerazioni, con molta semplicità le proiezioni di questa linea; e in tal caso faremmo a meno dei metodi generali sopra indicati. Ma i limiti ristretti che ci siamo imposti per la tavola impedendoci l'applicazione delle proiezioni ausiliarie, faremo uso del metodo dei piani secanti e verticali.

Sia pertanto $P\,Q$ uno di questi piani: esso taglierà la sfera secondo un circolo di diametro eguale a $t\,r$; onde se lo abbattessimo sul coordinato orizzontale, procedendo per asse di abbattimento la traccia $P\,Q$, e dall'abbattimento del punto P conducessimo a quello della sezione due tangenti, conosceremmo subito due punti delle proiezioni cercate.

I motivi stessi però che ci hanno impedito di profittare delle proiezioni ausiliarie, si oppongono anche in questo caso alla semplicità di soluzione sopra indicata. Per la qual cosa volendo ad ogni modo evitare la costruzione della proiezione verticale del circolo $t\,r$ immagineremo che il piano $P\,Q$ concependo un moto di rotazione attorno alla verticale condotta

pel centro della sfera, venga a prendere una posizione parallela al coordinato verticale.

Allora egli è evidente che se descrivesi dal punto s, come centro, un arco $q\ q_1$ tangente a $P\ Q$ e conducesi a questo arco una tangente $P_1\ q_1\ Q_1$ parallela ad $X\ Y$, questa tangente sarà la nuova posizione che avrà presa la traccia del piano a movimento compiuto; il circolo $t\ r$ sarà venuto a proiettarsi orizzontalmente in $t_1\ r_1$ e verticalmente sul circolo di raggio $s'\ r'$; e il punto $(P,\ P')$ si sarà collocato in $(P_1,\ P'_1)$ dopo aver descritto l'arco orizzontale $(P\ P_1,\ P'\ P'_1)$ di raggio $s\ P$. Due tangenti $P_1\ n'_1$, $P'_1\ b'_1$ condotte al circolo $s'\ r'$ fan conoscere due punti di contatto $(a_1,\ a'_1)$, $(b_1,\ b'_1)$ nella attuale posizione del piano secante; se riconducesi questo piano alla posizione primitiva, i punti notati descriveranno archi orizzontali aventi per raggi respettivi $n,\ s,\ b_1\ s$, e verranno a collocarsi in $(n,\ a')$, $(b,\ b')$.

Per ogni altro piano secante ausiliario, si avranno altri due punti della linea di separazione. Ma per ciascun piano che sia, come $P\ R$, simmetrico con $P\ Q$ rispetto al piano $P\ s$, è facile a vedersi che i punti corrispondenti saranno determinati dalle medesime tangenti ausiliarie $P'_1\ a'_1$, $P'_1\ b_1$, e per conseguenza situati sui medesimi paralleli della sfera. Onde le loro proiezioni orizzontali saranno i punti in cui le corde $a\ c$, $b\ d$ perpendicolari a P a incontrano la traccia $P\ R$; e le proiezioni verticali quelli in cui i prolungamenti delle rette $a'\ n'_1$, $b'\ b'_1$ sono intersecati dalle perpendicolari alla linea di terra tirate da c e da d.

I piani verticali $P\ e$, $P\ f$ tangenti alla sfera determinano immediatamente i punti $(e,\ e')$, $(f,\ f')$ della linea cercata, nei quali la sua proiezione orizzontale tocca il contorno apparente orizzontale della sfera medesima. E i piani $P'\ g'$, $P'\ h'$ perpendicolari al coordinato verticale e tangenti alla sfera, fan conoscere subito i punti $(g,\ g')$, $(h,\ h')$ della stessa linea, nei quali la sua proiezione verticale è tangente al contorno apparente di quella.

I punti $(i,\ i')$, $(n,\ n')$ determinati dal piano secante $P\ s$, attorno a cui è simmetrica la linea di separazione, sono il più alto e il più basso. Essi costruisconsi col medesimo mezzo che ha servito a determinare i punti $(a,\ a')$, $(b,\ b')$ Dopo ciò sarà

facile tracciare le curve *e b n d f c i a g*, *e' b' n' d' f' c' i' a' g* proiezioni della linea di separazione d'ombra e di luce.

Ombra portata sui piani coordinati — Ciascun piano ausiliario *P Q* somministra due punti del contorno di questa ombra, che sono le tracce delle due tangenti alla sfera sopra di esso descritte. Allorchè questo piano si è abbattuto parallelamente al coordinato verticale, e che la sua traccia orizzontale è venuta in P_1 Q_1, la traccia verticale avrà preso la posizione della retta l_1 l'_1 perpendicolare alla linea di terra e condotta per la posizione l_1 presa da un punto *l* della traccia *l l'*. Le proiezioni verticali delle tangenti essendo altnalmente P'_1 n'_1, P'_1 b'_1, si vede che la prima incontra il coordinato orizzontale in (q'_1, q'_1), e la seconda invece incontra il coordinato verticale in (l_1, l'_1); talchè riconducendo questi punti sulle respettive tracce del piano secante in *q*, ed *l'* saranno questi due punti del contorno cercato.

Senza ricorrere a questo mezzo possiamo trovare i diversi punti di questo contorno anche direttamente, purchè si costruiscano le proiezioni verticali delle tangenti contenute sui diversi piani secanti.

Così le rette $(P\ e, P'\ e')$, $(P\ f, P'\ f')$ somministrano colle loro tracce orizzontali i punti *E*, *F* nei quali il contorno dell'ombra portata sul coordinato orizzontale dee resultare tangente alle tracce dei piani ausiliari corrispondenti *(Geom. Descritt.)*.

Le rette $(P\ i, P'\ i')$, $(P\ n, P'\ n')$ danno gli estremi *I* ed *N* dell'asse *I N* dello stesso contorno che in fine altra cosa non è che una ellisse. E il punto *T*, traccia verticale della tangente $(P\ h, P'\ h')$, è quello in cui il contorno dell'ombra portata sul coordinato verticale resulta tangente alla retta $P'\ h'$.

CAPO XI.

Raggi luminosi emanati da uno o più corpi.

102. Allorchè uno o più corpi opachi si trovano in presenza di uno o più corpi luminosi, avviene non solo che una parte della superficie dei primi non può ricevere luce da alcun raggio luminoso emanato dai secondi, e per conseguenza si trova nell'ombra pura (N.° 4); ma si verifica altresì il caso in cui alcuni punti della superficie dei corpi opachi non ricevono tutta la luce che potrebbero ricevere se ciascuno di essi fosse isolato. Lo che fa vedere le parti corrispondenti di questi corpi ricuoperti da una tinta meno oscura di quella che ricuopre le parti che si trovano nell'ombra pura, ma sempre distinta dall'altra che ci fa conoscere le parti illuminate.

Questa seconda tinta è ciò che chiamasi *penombra*.

Noi ci proporremo ora soltanto di determinare il contorno delle ombre, e per cominciare dal caso il più semplice, tratteremo prima il caso di un corpo opaco unico illuminato da un solo corpo luminoso.

Nel Capo seguente ci occuperemo delle penombre.

Primo caso. *Costruzione delle ombre di un corpo qualunque opaco B, illuminato da un corpo luminoso qualunque A.*

103. Per risolvere questo problema rammenteremo in primo luogo, che il corpo opaco arrestando una parte dei raggi emanati dal corpo luminoso, priva di luce una parte dello spazio, che è ciò che si chiama massa d'ombra proiettata dal corpo opaco. Rammenteremo pure in secondo luogo che la superficie da cui questa massa d'ombra viene terminata, è una superficie sviluppabile circoscritta al corpo luminoso e al corpo opaco, la quale tocca quest'ultimo corpo secondo la linea di separazione d'ombra e di luce.

Ora giova qui notare che gli elementi di questa superfi-

cie, i quali sono raggi luminosi situati da una medesima parte dei corpi *A* e *B*, debbono necessariamente esser tangenti al corpo luminoso, senza intersecarlo in nessun altro punto al di qua o al di là del punto di contatto. Supponendo infatti che alcuni di essi lo intersecassero dopo averlo toccato, è evidente che altri raggi emanati da questi punti di intersezione e tangenti al corpo opaco potrebbero illuminare questo al di là dei punti in cui era toccato dai primi e per conseguenza i punti di contatto di questi ultimi non potrebbero appartenere alla linea di separazione d'ombra e di luce.

Deriva quindi che la superficie sviluppabile in questione deve essere esteriormente circoscritta al corpo luminoso, cioè a dire tale da comprenderlo interamente entro di sè, siccome noi abbiamo inteso di dichiarare al N.° 7, I.

Tale condizione non è niente affatto necessaria pel corpo opaco. Se questo presenterà delle parti salienti e delle parti rientranti, la superficie sviluppabile soddisfacendo sempre alla condizione suespresse rispetto al corpo luminoso, potrà avere una nappa circoscritta a ciascuna parte saliente del corpo opaco, e questa nappa lo toccherà secondo una curva di separazione d'ombra e di luce, mentre potrà tagliarlo secondo un'altra curva che siccome abbiamo mostrato sarà una curva d'ombra portata (N.° 8).

Infine è utile rammentare eziandio, che se una parte del corpo opaco comunque saliente, trovasi nella massa d'ombra proiettata da un'altra parte, essa potrà esser toccata dalla corrispondente nappa di superficie sviluppabile che le è circoscritta, secondo dei punti i quali avranno il carattere geometrico dei punti di separazione d'ombra e di luce ma che non apparterranno ai contorni delle ombre. Per la stessa guisa i raggi luminosi tangenti alla parte saliente racchiusa in una massa d'ombra, potranno del paro intersecare il corpo opaco secondo una curva, i punti della quale avranno il carattere geometrico dei punti della linea d'ombra portata, ma che non potranno far parte dei contorni dell'ombra.

104. Ciò posto, passiamo alla risoluzione del problema sopraenunciato.

Sceglieremo nello spazio una serie di piani ausiliari coordinati, tali che le proiezioni dei due corpi *A* e *B* siccome ben

distinte su ciascuno di essi; e P essendo uno di questi piani faremo le operazioni seguenti:

1.° Costruiremo sopra i due corpi A e B due curve a, b di contatto con due cilindri ad essi circoscritti e perpendicolari al piano P, e determineremo le intersezioni α, β di questi cilindri col piano. Le curve α e β saranno le proiezioni ausiliarie di a e b, e ad un tempo i contorni apparenti dei corpi dati rispetto al piano P.

2.° Condurremo delle rette δ, δ', δ''... tangenti ciascuna da una medesima parte alle linee α e β, ed ognuna di esse sarà la traccia sul piano P d'un piano perpendicolare e tangente alle superficie dei due corpi.

3.° Si troveranno sulle curve a e b i punti p e q corrispondenti ai punti di contatto di ciascuna retta δ colle curve α e β, e la retta $p\,q$ che li congiunge sarà una generatrice della superficie sviluppabile circoscritta ai due corpi. Ora potrebbe avvenire che la retta $p\,q$ forasse il corpo luminoso dopo averlo toccato, e prima di giungere al corpo opaco: in questo caso essa non sarebbe situata sulla vera superficie sviluppabile che determina le ombre del corpo B (N.° 103): ma quando il caso contemplato non ha luogo, essa trovasi interamente su questa superficie, e il punto q in cui tocca il corpo opaco apparterrà alla linea di separazione d'ombra e di luce; il punto r in cui forasse il medesimo corpo dopo averlo toccato apparterebbe al contorno d'ombra portata.

Dopo aver costruito per mezzo di altri piani ausiliari P', P'', P'''... analoghi al piano P la serie dei punti q', q'', q'''... r', r'', r'''... delle linee secondo le quali la superficie sviluppabile che comprende tutta la massa d'ombra, tocca e taglia il corpo B, sarà facile, se avremo impiegato un numero sufficiente di piani ausiliari, riconoscere quelli di questi punti che apparterranno ad un medesimo ramo di curva, e si tracceràà questo ramo.

Tracciati tutti i rami, si trascureranno quelle parti di essi che si trovano comprese nelle porzioni ombrate del corpo opaco e le altre parti costituiranno il contorno delle ombre richieste.

PROBLEMA. *Data una sfera opaca* (*B*, *B'*), *ed un triangolo luminoso* (*A a C*, *A' C'*) *orizzontale e con un lato perpendicolare al coordinato verticale, trovare la linea di separazione d'ombra e di luce sulla sfera, e la sua ombra portata sul coordinato orizzontale* (*Fig.* 48)

105 *Linea di separazione d'ombra e di luce* — Immaginiamo un piano che mantenendosi tangente alla sfera si muova toccando il triangolo luminoso e lasciando sempre da una medesima parte le due superficie: l'inviluppo delle sue posizioni successive sarà una superficie sviluppabile composta di tre superficie coniche circoscritte alla sfera ed aventi il vertice respettivamente nei tre punti (*A*, *A'*), (*a*, *A'*), (*C*, *C'*), e di tre porzioni di superficie piane tangenti alla sfera e toccanti il triangolo respettivamente secondo i lati (*A a*, *A'*), (*a C*, *A' C'*), (*A C*, *A' C'*). Ora il punto di contatto del piano che tocca il triangolo lungo il lato (*A a*, *A'*) dovrà evidentemente trovarsi e sulla linea di contatto del cono che ha il vertice in (*A*, *A'*) e su quella del cono che ha il vertice in (*a*, *A'*); esso sarà dunque il punto d'incontro di queste linee; lo stesso avverrà dei piani che toccano il triangolo lungo gli altri due lati. Talchè può concludersi che la linea di separazione d'ombra e di luce sulla sfera si riduce al sistema dei tre archi circolari secondo cui è toccata dalle tre superficie coniche anzidette.

Per ottenere i diversi punti di questa linea, basterà condurre pel centro *B* della sfera diversi piani verticali: su ciascuno di essi si proietteranno il triangolo e la sfera (N.° 104), e le rette che toccano la proiezione ausiliaria del primo e sono tangenti a quella della seconda potendo costruirsi immediatamente, somministreranno coi loro punti di contatto su questa ultima i punti della linea cercata. Operando per il piano *B l* perpendicolare al lato (*A a*, *A'*) del triangolo, e che taglia la sfera secondo il circolo contorno apparente verticale di essa, la tangente *A' l'* determinerà il punto (*l*, *l'*) in cui si hanno a tagliare gli archi provenienti dai punti luminosi (*A*, *A'*), (*a*, *A'*). Operando per il piano *B A* che passa per uno dei vertici del triangolo dato basterà ab-

battere questo piano su $B\ D$ parallelamente al piano verticale, il punto (A, A') si abbatterà in (i, i'), e la tangente $i'\ e'$ darà il punto (e', e_1) che ricondotto sul piano $B\ A$ somministrerà il punto (f, f') il più basso dell'arco corrispondente al punto (A, A').

I piani ausiliari analoghi a $B\ l$ somministreranno i punti k ed i_1 analoghi ad l; ed i piani analoghi a $B\ A$ somministreranno i punti e e g. Così la linea di separazione d'ombra e di luce si comporrà dei tre archi $l\ g\ i_1$, i_1 e $k, k\ f\ l$ sulla proiezione orizzontale della sfera, e dei soli archi visibili $l'\ k'$, $k'\ b'$ sopra la sua proiezione verticale.

Ombra portata. — Le tre porzioni di superficie coniche appartenenti allo inviluppo sviluppabile circoscritto alla sfera e al triangolo dato, intersecano il coordinato orizzontale secondo tre archi ellittici $n\ v\ r\ t\ t_1$, $q_1\ t\ q\ u\ z$, $u_1\ u\ v\ m_1$; e le tre porzioni di piani appartenenti allo stesso inviluppo lo taglieranno secondo delle rette, come $m_1\ n$ tangenti alle estremità m_1 ed n degli archi ellittici vicini $n\ a\ r\ t\ t_1$, $u_1\ u\ v\ m_1$. Ora le parti esteriori degli archi suddetti essendo necessariamente illuminate, ne segue che l'ombra portata rimarrà circoscritta dagli archi $a\ r\ t$, $t\ q\ u$, $u\ o\ v$.

La costruzione dei diversi punti di questa ombra è facilissima. Per i coni aventi il vertice in (A, A') ed (a, A') sono proiezioni orizzontali di due generatrici le rette $A\ l$, $a\ l$: costruite le tracce m_1 ed n di queste rette si vedrà che esse devono trovarsi sopra una medesima perpendicolare alla linea di terra, perchè le proiezioni verticali di esse coincidono in una sola e medesima linea $A'\ l'\ m'$. E siccome la perpendicolare $m'\ n$ è ad un tempo la traccia orizzontale del piano tangente comune ai due coni, così dovrà essa riescire tangente agli archi $u\ o\ v\ m_1$, $t\ r\ v\ n$ nei punti m_1 ed n, siccome sopra abbiamo detto.

Per ogni altro piano secante come $B\ A$ si cercherà nel suo abbattimento la traccia (D', D) della generatrice in esso contenuta; di poi si riporterà il punto D in o sopra $B\ A$ ed otterremo l'ombra portata dal punto (f, f').

Secondo caso. *Costruzione delle ombre di uno o più corpi opachi illuminati da uno o più corpi luminosi.*

106. Se un solo corpo luminoso è posto in presenza di più corpi opachi, per avere i contorni delle ombre di questi, bisognerà costruire dapprima le ombre di ciascuno supponendolo isolato insieme col corpo luminoso; di poi considerare due a due i corpi opachi al dirimpetto del corpo luminoso, e determinare le ombre che questi corpi potrebbero scambievolmente portare l'uno sull'altro. Compiute queste operazioni, avremo su ciascuno dei dati corpi opachi, e le ombre che presenterebbe se fosse solo e quelle che riceve dagli altri corpi. Facendo dunque astrazione dalle parti dei contorni di queste ombre che si troveranno sopra le porzioni della superficie di ciascun corpo opaco già ombrate, le altre parti di questi contorni determineranno veramente le ombre del corpo; e così otterremo le ombre di tutti i corpi dati.

Se più corpi luminosi si troveranno nello spazio capaci di illuminare più corpi opachi, bisognerà considerare successivamente ciascun corpo luminoso, facendo astrazione dagli altri, e determinare col processo anteriormente esposto le ombre di ciascuno dei corpi opachi relative al corpo luminoso considerato. Dopo avere operato in tal guisa per ognuno dei corpi luminosi, li considereremo tutti esistenti contemporaneamente, e sarà evidente che non potranno esservi ombre pure sui corpi opachi salvo che nelle parti che non si troveranno illuminate da alcuno dei corpi luminosi. Segue da ciò che dovremo trascurare tutti i contorni relativi a un corpo luminoso, i quali traverseranno delle parti illuminate da un altro corpo luminoso, e dopo la eliminazione di tutti i contorni illuminati, i contorni residui saranno quelli delle vere ombre esistenti.

Applichiamo i principii ora stabiliti alla soluzione del seguente:

PROBLEMA. *Trovare le ombre d'una sfera opaca* (*B*, *B'*) *illuminata da tre punti* (*A*, *A'*), (*a*, *A'*), (*C*, *C'*) (*Fig.* 48.)

107. Supponendo che il solo punto (*A*, *A'*) sia luminoso, la linea di separazione d'ombra e di luce sarà il circolo (*b d l f k*, *b'' c' l' f' k'*) (N.° 105), e la sua ombra portata sarà l'ellisse *o p z* m *o* egualmente facile a costruirsi. Se in luogo del punto (*A*, *A'*) supponesi solo il punto (*a*, *A'*) luminoso, la linea di separazione d'ombra e di luce sarà il circolo (*c l g i*$_1$, *d' l' g' i''*), e l'ombra portata sarà l'ellisse *r* m *w s r* · finalmente non considerando che il punto luminoso (*C*, *C'*) avremo per linea di separazione d'ombra e di luce il circolo (*e i*$_1$ *d k*, *e' k' d' i''*), e per linea d'ombra portata l'ellisse *y p q u s x* che deve intendersi per intero costruita.

Considerando ora i tre punti luminosi ad un tempo sarà cosa facile a vedersi che l'arco (*k b d l*, *k' b'' c' l'*) si trova nella parte della sfera illuminata dai punti (*C*, *C'*) ed (*a*, *A'*); l'arco (*l c b i*$_1$, *l' d' b'' i''*) è contenuto nella porzione di sfera illuminata dai punti (*A*, *A'*), (*C*, *C'*); e finalmente l'arco (*k e d i*, *k' e' d' i''*) si trova nella parte illuminata dai punti (*A*, *A'*), (*a*, *A'*) Talchè la linea di separazione d'ombra e di luce sulla sfera si comporrà del sistema dei tre archi (*k f l*, *k' f' l'*) (*l g i*$_1$, *l' g' i''*), (*i*$_1$ *e k*, *i'' k'*).

Quanto alle ombre portate sul coordinato orizzontale, ricorrono osservazioni analoghe Così scorgesi immediatamente che il poligono m *t p z* m è illuminato dai punti (*a*, *A'*), (*C*, *C'*); il poligono *s x y p v s* lo è dai punti (*A*, *A'*), (*a*, *A'*); e il poligono *m u s w m* lo è dai punti (*A*, *A'*), (*C*, *C'*): che inoltre il punto (*a*, *A'*) illumina il poligono m *u q t* m; il punto (*C*, *C'*) illumina il poligono *t p v r t*; e il poligono *u s n o u* è illuminato dal punto (*A*, *A'*) D'onde può concludersi che nel problema proposto, gli archi *v p z* m *u*, *t m w s n*, *t p y x s u* debbono essere eliminati, e che per conseguenza il contorno dell'ombra riducesi al sistema dei tre archi *o n n*, *v r t*, *t q u*.

Digitized by Google

CAPO XII.

Teoria delle penombre.

108. Immaginiamo per un momento nello spazio un corpo luminoso e un punto; si comprenderà facilmente che questo punto riceverà luce da tutta quella parte del corpo luminoso che è compresa in un cono ad esso circoscritto ed avente il vertice nel punto dato. Questa parte che rimane limitata dalla linea di contatto del cono ed è situata di faccia al punto dicesi *disco luminoso*.

Finchè il punto rimane isolato, anche variando di posizione nello spazio, non cesserà di essere illuminato dall'intero disco che gli corrisponde. Ma se facesse parte della superficie d'un corpo opaco potrebbe avvenire che non ricevesse più luce dall'intero disco corrispondente, poichè: 1.° esso non potrà essere illuminato dai raggi che si trovano al di sotto del relativo piano tangente al corpo opaco (N.° 5): 2.° non ne potrà nemmeno ricevere da quelli che per giungere a toccarlo dovrebbero attraversare qualche parte del corpo opaco medesimo.

Dunque ogniqualvolta il piano tangente in un punto d'un corpo opaco taglierà il disco luminoso corrispondente a quel punto, o che una parte di questo disco sarà nascosta al punto stesso da una qualche parte del corpo opaco, il punto in quistione non riceverà luce che da una porzione del disco luminoso che gli corrisponde.

La tinta che ricuopre i punti della superficie d'un corpo opaco che non ricevono luce dall'intero disco corrispondente a quella che altrove abbiamo chiamata *penombra* (N.° 102).

Segue da ciò che in tutti i casi nei quali un corpo opaco riceverà luce da un corpo luminoso, la superficie del primo si troverà generalmente divisa in tre specie di parti, cioè:

1.° Quelle di cui tutti i punti non ricevono alcun raggio luminoso; ed esse costituiranno l'*ombra pura* del corpo:

2.° Quelle di cui tutti i punti non ricevono luce che

da una porzione del disco luminoso corrispondente; e queste formeranno la *penombra* del corpo:

3.° Quelle infine di cui tutti i punti sono illuminati dall'intiero disco relativo a ciascuno; e queste formeranno propriamente sulla superficie del corpo opaco la *parte illuminata*.

Gli esempi seguenti svilupperanno meglio questi principii

109. Abbiasi una sfera luminosa *A* ed un corpo cilindrico opaco *E M O* posato sul piano *C D* (*Fig.* 43).

Un piano *m n p* tangente alla sfera e al cilindro e che lascia da una medesima parte i due corpi determina evidentemente la linea *n* di separazione d'ombra e di luce sul cilindro, e la linea *p* d'ombra portata sul piano *C D*: per cui la porzione *n p* del primo, ed *O p* del secondo saranno nell'ombra pura: e le porzioni *n M E*, *p D* saranno illuminate, ma non lo saranno uniformemente.

Poichè se conducesi il piano *Q q d* tangente ai due corpi da ambo i suoi lati, è facile a vedersi che tutti i punti della porzione *q n* del cilindro e *p D* del piano non possono ricevere luce dall'intero disco corrispondente. Infatti il disco corrispondente ad un punto isolato *M'* essendo *N m t P*, un punto qualunque *M* di *q* n non potrà ricevere luce se non che dalla porzione del disco che rimane alla sinistra del piano tangente in *M* al corpo *B*, perchè questo piano *T M* taglia il corpo luminoso: lo stesso avviene per un punto qualunque *r* di *p D*, riuscendo secante al corpo luminoso il piano *r M T* condotto per *r* tangente al corpo *B*. Al contrario si riconosce agevolmente che nessuna parte del corpo luminoso rimane nascosta a tutti i punti della zona *q E*, ed a quelli del piano *C D* che si trovano al di là del punto *D*.

Così il corpo opaco considerato, presenterà, siccome abbiamo sopra detto, delle parti *O n*, *O p* nell'ombra pura; delle parti *n q*, *p D* nella penombra, e infine delle parti, come *q E* e come la porzione del piano *C D* situata al di là del punto *D*, di cui i punti saranno completamente illuminati, ricevendo essi altrettanta luce quanta ne potrebbero ricevere se fossero isolati siccome *M'*.

110. Abbiansi la sfera *A* luminosa, e l'altra *B* opaca proiettate ambedue sopra un piano condotto per i loro centri (*Fig.* 44) Se in un punto *M* del corpo *B* situato dalla

parte del corpo *A* concepiamo il vertice d' una superficie conica circoscritta a questa ultima, si vedrà che il disco intiero *P Q* illumina il punto *M*, mentre che se immaginiamo una analoga superficie conica col vertice in un' altro punto *M'*, siccome questo non può essere illuminato che dai raggi i quali si trovano al di sopra del suo piano tangenge *M' N* o, si vede che non può ricevere luce che dalla porzione o *N Q'* del respettivo disco luminoso. Quindi la sfera *B* si troverà divisa in tre parti, una *p q R* situata al di là della linea di separazione d' ombra e di luce, e costituente l' ombra pura; un' altra *p q s r* tale che i piani tangenti nei suoi differenti punti tagliano il corpo *A*, e formerà perciò la penombra; l' ultima *r s M* di cui tutti i punti sono illuminati dall' intero disco corrispondente.

Per avere le due linee che separano fra loro queste parti, o ciò che torna lo stesso, che limitano la penombra, conducasi un piano tangente *p p'* alle due sfere, dal quale sieno ambedue toccate da un medesimo lato; e conducasene quindi un' altro *r r'* che tocchi la sfera *A* da una parte e la sfera *B* dall' altra. Immaginando che questi due piani ruotino attorno ai due corpi, non cessando di mantenersi tangenti, gli inviluppi delle loro posizioni successive saranno due nappe d' una medesima superficie sviluppabile che toccheranno il corpo *B* secondo le due linee *p q*, *r s* comprendenti fra loro la penombra. Infatti: ogni punto dell' arco *p r* non può ricevere luce dall' intiero disco che gli corrisponde, e se noi immaginiamo che quest' arco si muova insieme coi piani tangenti esso non cesserà di godere della stessa proprietà; ma nel suo muovimento genera evidentemente la zona proiettata in *p r s q*; dunque tutti i punti di questa zona sono tali che il piano tangente in ciascuno di essi taglia il corpo *A*; dunque essa forma la penombra del corpo *B*.

111. Esaminiamo ciò che avviene se un piano *F G H I*, (*Fig.* 45) che noi supporremo perpendicolare alla retta che unisce i centri delle due sfere, è sottoposto alla sfera *B*.

La superficie conica generata dalla retta *p p'* taglierà questo piano secondo un cerchio *C D E*, tutti i punti del quale saranno nell' ombra pura perchè la sfera luminosa *A* è interamente ad essi nascosta dal corpo *B*. La superficie conica

generata dalla retta $r\ r'$ taglierà il medesimo piano secondo un altro cerchio $c\ d\ e$, tutti i punti del quale saranno nella penombra. Infatti se un punto M qualunque compreso fra le due circonferenze $C\ D\ E$, $c\ d\ e$ si costituisce vertice di due superficie coniche, una circoscritta ad A, e l'altra a B, la prima determinerà il disco $m\ i\ n\ o\ m$ che illuminerebbe il punto M, e la seconda taglierà la sfera A secondo una curva $k\ o\ i\ o'$ che divide il disco suddetto in due parti, delle quali la sola $n\ o\ i\ o'\ n$ può inviare luce al punto M.

Si vede inoltre che il corpo B non nasconde alcun punto del corpo luminoso ai diversi punti del piano situati al di fuori del circolo $c\ d\ e$; dunque questo piano presenterà: 1° un'ombra pura limitata dalla circonferenza $C\ D\ E$; 2° una penombra compresa fra le circonferenze $C\ D\ E$, e $c\ d\ e$; 3° una parte situata all'esterno del circolo $c\ d\ e$, della quale tutti i punti ricevono luce dal disco intero corrispondente del corpo A.

112. La intensità della penombra diminuisce a misura che essa si approssima alla parte del corpo opaco, di cui tutti i punti sono illuminati dal disco intero del corpo luminoso.

Vedesi infatti nell'esempio del N° 109 che il corpo A è interamente ecclissato a tutti i punti del corpo opaco che si proiettano in n e in p; che non lo è interamente ai punti M ed r, e che a misura che questi punti si allontanano dal punto O, la parte illuminante del disco si avvicina sempre più ad essere eguale al disco intero, e lo è infine quando essi sono arrivati respettivamente in q e D.

Una analoga osservazione può farsi rispetto agli altri esempi dei N.i 110 e 111.

Quando il corpo luminoso e il corpo opaco non hanno le proporzioni delle figure esposte, è chiaro che le conclusioni dedotte subiranno qualche modificazione sempre facile però a riconoscersi. Così, nell'esempio del N.° 111, se il diametro della sfera luminosa A fosse molto più grande di quello della sfera opaca B, e il piano $F\ G\ H\ I$ sufficientemente lontano da quest'ultima, è evidente che l'ombra pura $C\ D\ E$ potrebbe non esistere, e la penombra invece d'esser compresa fra i due circoli $C\ D\ E$, $c\ d\ e$ sarebbe tutta contenuta nella seconda di queste linee.

113 Da ciò che precede consegue, che allorchè un corpo luminoso invia luce contro un corpo opaco, fra le ombre di questo e le sue parti illuminate si trovano in generale delle penombre che gradatamente decrescono allontanandosi dall'ombra pura.

Queste penombre, di cui la estensione più o meno grande dipende dalla prossimità e dalla grandezza del corpo luminoso, saranno poco considerevoli quando i raggi luminosi sieno emanati dal sole; ma vi hanno dei casi di luce artificiale nei quali il loro effetto è rimarchevolissimo per la sua estensione. E nella ipotesi stessa dei raggi solari, le penombre sono d'una utilità troppo importante perchè possa farsi interamente astrazione da esse nei disegni un poco accurati.

114 Può frattanto concludersi che dato un corpo luminoso e un corpo opaco, ad avere il contorno della penombra su quest'ultimo, bisogna circoscrivere a questi due corpi una superficie sviluppabile. Questa superficie avrà sempre due nappe principali; l'una il cui elemento piano lascerà i due corpi da una medesima parte; l'altra il cui elemento piano lascerà il corpo luminoso da una e il corpo opaco dall'altra parte: e le due curve di contatto e d'intersezione di queste due nappe col corpo opaco saranno i contorni delle penombre cercate.

115 Talvolta però avviene che alcune linee singolari, come la intersezione di due superficie o di due nappe d'una medesima superficie, o la costola di regresso d'una superficie facciano parte dei contorni dell'ombra di un corpo: allora la penombra che avesse questi medesimi contorni potrebbe esser nulla.

Supponiamo, per esempio, che una sfera *A* (*Fig.* 46) illumini un corpo opaco *B* terminato da una superficie di rivoluzione, il cui asse passa per il centro della sfera e il cui meridiano e la linea *a m b a*. È chiaro che se il diametro della sfera *A* è minore della retta n ò, i coni generati dalle rette n *d* ed n e determineranno per i contorni della penombra il medesimo circolo n *b*; d'onde segue che le due linee, le quali doveano comprenderla sono confuse in una sola, e conseguentemente essa è nulla.

Ma se il diametro della sfera *A* (*Fig.* 47) fosse maggiore

di n *b*, il cono di cui il vertice è al di fuori dello spazio compreso fra *A* e *B* potrebbe toccare il corpo *B* secondo un' altro circolo *c d;* mentre il cono avente il vertice compreso in quello spazio lo toccherebbe sempre secondo il circolo n *b:* per cui la penombra sussisterebbe, e sarebbe compresa fra i due circoli *a b* e *c* d.

116. Le osservazioni precedenti ci fanno d' altronde vedere che non ha luogo penombra sul corpo opaco quando le due nappe della superficie sviluppabile circoscritta ai due corpi si tagliano secondo una linea di separazione d' ombra e di luce. Ma al di là di questa linea le due nappe vanno sempre allontanandosi, e quindi la penombra che esse comprendono sarà tanto più estesa quanto più la superficie che la riceve è lontana da quella linea.

117. Se più corpi opachi fossero illuminati da più corpi luminosi, bisognerà trattare la questione delle penombre siccome abbiamo trattato quella delle ombre. Così ci occuperemo di ciaschedun corpo opaco in particolare, supponendolo successivamente illuminato da ciaschedun corpo luminoso: ciò condurrà alle penombre del corpo opaco come esistente solo e con ognuno dei corpi luminosi. Supporremo in seguito che questo corpo esista successivamente con ciascuno degli altri corpi opachi, e si determineranno le penombre portate che riceverà da questi ultimi cc.

PROBLEMA. *Trovare la penombra di una sfera* (*B, B'*) *illuminata da tre punti* (*A, A'*), (n, *A'*), (*C, C'*), e *quella portata sul coordinato orizzontale* (*Fig.* 48.)

118. Considerando ciascun punto luminoso isolato non può esistere penombra nè sulla sfera, nè sul piano orizzontale, perchè rispetto a ciascun punto le due nappe della superficie sviluppabile coincidono in una sola. Ma ciò non impedisce che vi sia penombra allorchè la sfera è illuminata contemporaneamente dai tre punti dati.

Supponendo che il solo punto (*A, A'*) sia luminoso, noi abbiamo trovato (N.° 107) che la linea di separazione d'ombra

e di luce è il circolo ($b\ d\ l\ f\ k$, $b''\ c'\ l'\ f'\ k'$), e la sua ombra portata è l'ellisse $o\ p\ z\ m\ o$. Per il punto (a, A') la linea di separazione è il circolo ($c\ l\ g\ i_1$, $d'\ l'\ g'\ i''$), e l'ombra portata l'ellisse $r\ m\ w\ s\ r$. In fine per il punto (C, C') supposto solo, il circolo ($e\ i_1\ d\ k$, $e'\ k'\ d'\ i''$) è la linea di separazione, e l'ellisse $q\ p\ y\ s\ q$ è l'ombra portata.

Ora se i tre punti si considerano luminosi ad un tempo, la parte di sfera situata al di fuori dei tre circoli sarà nell'ombra pura, quella appartenente a ciascuno di questi circoli sarà illuminata, per cui la penombra dalla parte dell'ombra pura avrà per limite il contorno ($k\ f\ l\ g\ i_1\ e\ k$, $k'\ f'\ l'\ g'\ i''\ e'\ k'$), e dal lato della parte illuminata il contorno ($b\ c\ d$, $b''\ c'\ d''$). La parte del piano orizzontale situata al di fuori delle tre ellissi sarà interamente illuminata, e quella situata ad un tempo in queste tre ellissi interamente in ombra. per cui il contorno $o\ v\ r\ t\ q\ u\ o$ terminerà la penombra dalla parte dell'ombra pura; e il contorno $s\ y\ p\ z\ m\ w\ s$ la terminerà dal lato della parte illuminata.

119. *Osservazione.* — Se la sfera fosse illuminata dal triangolo ($A\ a\ C$, $A'\ C'$), i contorni delle penombre sarebbero quelli stessi ora determinati: ma non se ne potrebbe concludere che in ambedue i casi la sfera è egualmente illuminata.

120. La sola costruzione dei contorni delle ombre, e la tinta uniforme della quale si cuoprisse il disegno di un corpo nelle parti comprese da questi contorni possono tutt'al più dare un'idea approssimata delle forme di esso, non mai produrre un'immagine del corpo tale da fare una illusione soddisfacente.

Osservando un corpo illuminato dal sole o da un'altra sorgente luminosa qualunque, nelle circostanze anche le più favorevoli alla ipotesi fatta sulla direzione dei raggi luminosi solari, o sulla forma della sorgente artificiale di luce, abbiam luogo di notare:

1.° Che non tutte le parti in ombra compariscono separate da quelle illuminate per mezzo di linee nette, come avverrebbe nei disegni se li trattassimo nel modo sopra indicato:

2.° Che le parti ombrate non hanno sempre in tutta

la loro estensione il medesimo tono di tinta, sì nel caso in cui trovansi in superficie diverse, sì in quello in cui sono sopra una medesima superficie; e ciò avviene indifferentemente sulle superficie piane, come su quelle curve.

3.° Che le parti illuminate presentano anch'esse delle differenze sensibili all'occhio per la diversa intensità di luce che le ricuopre; differenze, che sono capaci di far distinguere all'occhio quali di queste parti sono più vicine, quali più lontane; se le loro superficie sono curve o piane, se due superficie piane si trovano sul prolungamento l'una dell'altra o se fanno un'angolo fra loro.

121. Allorchè poi una superficie illuminata è curva, si scorge facilmente che la parte illuminata, anche al di fuori di quella porzione che può trovarsi in penombra, non è dai raggi luminosi egualmente illuminata.

Resulta sensibilissima una gradazione di tinta fino a certi punti o a certe linee che presentano il massimo splendore se la superficie è liscia e polita, e il massimo grado di luce se è scabra; e al di là di questi punti o di queste linee gli effetti della luce tornano a diminuire di vivacità, indebolendosi l'intensità di essa fino al contorno geometrico della superficie.

Tali punti e linee diconsi *brillanti*, come per opposizione possono così chiamarsi anche quei punti e quelle linee che nelle parti ombrate compariscono più chiare. Il contrasto poi che sulla superficie dei corpi opachi nasce per la esistenza loro colle parti della medesima superficie meno illuminate o completamente in ombra, è la sola causa che produce sul nostro occhio la maggiore illusione possibile. Quindi sentesi la necessità di costruire gli uni e le altre per non mancare di un mezzo potentemente valevole a conseguire l'effetto che a ragione si esige in un disegno bene accurato.

122. Questi fenomeni sono dovuti alla presenza dell'atmosfera che inviluppa tutti i corpi, e a quella anche dei corpi circonvini.

Per cui la ipotesi da noi sempre ammessa di un solo corpo perfettamente opaco e isolato non verificandosi mai, non possono nemmeno trascurarsi le proprietà fisiche della luce e le

leggi che le distinguono, note sotto i nomi di riflessione, refrazione, disseminazione, dispersione ec.

Innanzi però di render conto dei loro effetti, i quali per un medesimo corpo dipendono non tanto dalla sua forma quanto dal punto di vista, da cui supponesi il corpo stesso osservato conviene mostrare come nel disegno si modifichi la sua immagine allorche invece di considerare lo spettatore collocato ad una distanza infinita dal piano su cui si opera, si trova il di lui occhio più o meno vicino al corpo o al piano.

Questo è ciò che forma il soggetto del libro seguente.

LIBRO SECONDO.

PROSPETTIVA LINEARE

CAPO I.

Definizioni e principii generali.

123. Allorchè si osserva un corpo qualunque si ammette che ciascun punto di esso invii un raggio luminoso verso l'occhio dello spettatore, e che i raggi ricevuti in quest'organo con i loro colori diversi e i differenti gradi d'intensità vi producano il sentimento dei punti da cui sono inviati.

124. Immaginiamo ora che fra l'occhio dello spettatore e il corpo osservato si frapponga una superficie qualsivoglia: teniamo conto dei punti in cui questa superficie è incontrata dai raggi diretti all'occhio, e supponiamo che ciascuno di questi raggi lasci sulla superficie incontrata il colore suo proprio. È manifesto che tutti quei punti di incontro faranno sull'occhio la stessa impressione prodottavi dai punti corrispondenti del corpo osservato; e che dal loro insieme resulterà su quella superficie tale immagine del corpo da rendere completa la illusione, tutte le volte che l'occhio di uno spettatore si troverà nella posizione supposta per determinarla.

A questa immagine si dà il nome di *Prospettiva*.

125. Deducesi facilmente da ciò che la costruzione della

Prospettiva di un corpo esige la soluzione dei due seguenti problemi:

1.° *Trovare la intersezione dei raggi luminosi, diretti all' occhio dai diversi punti del corpo, colla superficie su cui vuolsi la sua immagine.*

2.° *Determinare la tinta che conviene porre sopra ciascuno dei punti d' incontro, perchè produca sull' occhio l' effetto stesso del punto corrispondente.*

Osserveremo che i raggi luminosi inviati all' occhio dai diversi punti del corpo coincidono sulle stesse linee rette coi raggi visuali condotti dall' occhio a quei punti. Talchè il fascio formato dai primi coincide pure con quello formato dai secondi.

La scienza che serve a determinare il luogo geometrico di tutti i punti d' intersezione dei raggi visuali colla superficie data chiamasi *Prospettiva lineare:* e quella che si occupa della determinazione delle tinte da applicarsi sui diversi punti di quel luogo geometrico dicesi *Prospettiva aerea.*

126. *Prospettiva di un punto*, o d' *una linea* dicesi pure l' immagine d' un punto o d' una linea qualunque del corpo sulla prospettiva generale del corpo stesso.

127. Chiamasi *Punto di vista* il punto dello spazio in cui supponiamo trovarsi l' occhio dello spettatore: *Quadro* la superficie sulla quale vuolsi costruire l' immagine del corpo; e finalmente *Oggetto* il corpo o il sistema dei corpi che trattasi di rappresentare.

128. La prospettiva lineare d' un oggetto può considerarsi come il bozzo rigoroso della sua immagine; essa desumesi interamente da principii geometrici, e per ottenerla basta trovare solamente la prospettiva del contorno, e quella dei punti e delle linee singolari dell' oggetto dato.

129. Il *contorno* d' un oggetto è la curva di contatto, secondo la quale esso è toccato da una superficie conica, che ha il vertice nel punto di vista ed è circoscritta all' oggetto medesimo. Così se questo fosse sferico, il suo contorno sarebbe un circolo; se fosse terminato in parte da superficie cilindriche o coniche, il contorno relativo si comporrebbe delle rette secondo le quali queste superficie sono toccate dai piani tangenti condotti per il punto di vista. Infine se qualche parte

dell' oggetto fosse un solido di rivoluzione, il contorno di questa parte sarebbe una curva sempre facile a costruirsi per punti co' metodi già noti in Geometria Descrittiva.

130. Sono *punti* e *linee singolari* dell' oggetto quei punti e quelle linee che servono a distinguere le sue parti le une dalle altre quando la superficie dell' oggetto non è continua.

La sfera e in generale la superficie di rivoluzione non hanno punti nè linee singolari; e per questo può dirsi risoluto il primo problema, allorchè si è costruita la prospettiva del corrispondente contorno. Mentre la immagine, per esempio, di un cilindro o d' un cono non sarebbe determinata dalla sola prospettiva del contorno, la quale ridurrebbesi a quella di due rette parallele pel primo e di due rette concorrenti pel secondo: ma sarebbe indispensabile costruire ancora la prospettiva delle linee che servono di base alla loro superficie, e che in tal caso divengono linee singolari.

131. Per costruire sopra una superficie data in prospettiva d' un oggetto cognito per le sue proiezioni, si condurrà per il punto di vista una serie di piani secanti; si costruiranno le sezioni fatte nell' oggetto e nel quadro; si condurranno per il punto di vista tutte le tangenti possibili alla sezione fatta nell' oggetto, e i punti in cui queste tangenti incontreranno la sezione fatta nel quadro apparterranno alla prospettiva del contorno.

Trovata questa prospettiva, resta a determinare quella dei punti e delle linee singolari. Si otterrà la prima cercando i punti nei quali è intersecato, il quadro dai raggi visuali corrispondenti ai punti singolari dell' oggetto; si otterrà la seconda congiungendo il punto di vista col maggior numero di punti scelti sulle linee singolari, e costruendo le tracce sul quadro di queste congiungenti.

132. Quando sulla proiezione dell' oggetto si fossero determinati ancora i contorni delle sue ombre, si potrebbero portare quali contorni in prospettiva, considerandoli come linee singolari dell' oggetto medesimo; e allora sulla prospettiva domandata otterremmo anche le ombre del corpo dato. Quindi si vede che sapendo costruire le ombre d' un oggetto, la costruzione della prospettiva di esse non presenta alcuna difficoltà.

133. Rare volte però fa bisogno di cercare la prospettiva di oggetti così complicati, da essere costretti a ricorrere al metodo generale di soluzione esposto al N.° 131. Ordinariamente le linee di cui fa mestieri avere le prospettive si scuoprono a colpo d'occhio, e conducendo per il punto di vista e per diversi punti di queste linee dei raggi visuali, questi incontrano il quadro nei punti pei quali passa la prospettiva richiesta.

134. Allorchè il quadro è una superficie piana, la prospettiva del contorno dell'oggetto potrà anche trovarsi impiegando una serie di piani tangenti all'oggetto e condotti per il punto di vista. Sarà allora sufficiente condurre i raggi visuali ai punti di contatto, e quelli da cui verrà incontrato il piano del quadro somministreranno i punti della prospettiva del contorno. Se in questo caso alcune linee singolari dell'oggetto saranno rette, la prospettiva di ciascuna sarà la intersezione del quadro col piano determinato dalla linea obiettiva e dal punto di vista: talchè sarà anch'essa retta, e potrà costruirsi cercando la prospettiva de' suoi estremi.

135. *Le prospettive d'una curva e della sua tangente sono tangenti fra loro.* Poichè il piano che somministra la prospettiva della seconda è tangente al cono, avente per vertice il punto di vista e per direttrice la curva data, in tutti i punti del raggio visuale corrispondente al punto di contatto (*Geom. Descritt.*), talchè lo sarà anche in quello in cui questo raggio interseca il quadro. E per conseguenza le due sezioni in questo prodotte dalla superficie conica e dal piano tangente avranno in quel punto un vero contatto geometrico.

Ciò ha luogo anche nel caso in cui il quadro non è piano.

136. La prospettiva d'una figura piana e parallela al piano del quadro, è una figura simile ad essa, in virtù della proprietà di cui godono le sezioni fatte da piani paralleli nelle piramidi e nei coni. Laonde se la figura data è un circolo, basterà cercare la prospettiva del suo centro o d'uno qualunque dei suoi punti.

137. Ordinariamente si da al quadro, quando è piano, la forma rettangolare, e si suppone sempre in posizione verticale. Il lato inferiore del rettangolo chiamasi *base del quadro*, ed anche *linea di terra* perchè rappresenta in generale

la intersezione del quadro col terreno. In questo caso è facile a dimostrarsi che:

1.° *La prospettiva di una retta verticale è verticale;* poichè tale resulta il piano da essa determinato e dal punto di vista.

2.° *La prospettiva di una retta orizzontale e parallela al quadro, è pure orizzontale, o come suol dirsi, parallela alla base del quadro;* poichè parallelo a questa evidentemente resulta la intersezione del quadro col piano da quella retta determinato e dal punto di vista.

3° *Sono pure verticali le prospettive di tutte le rette che hanno le loro proiezioni orizzontali concorrenti alla proiezione orizzontale del punto di vista.*

Poichè ciascuna di esse si troverà in uno degli infiniti piani verticali che possono immaginarsi condotti pel punto di vista medesimo.

4.° *Tutte le rette le quali concorrono nel punto di vista hanno per prospettiva un punto, che è quello in cui il quadro è incontrato da esse o dal loro prolungamento.*

Poichè i raggi visuali condotti ai diversi loro punti coincidono con la retta medesima.

138. Ciò premesso, applichiamo i principii che precedono alla soluzione del seguente semplicissimo

PROBLEMA. *Trovare la prospettiva d' una piramide regolare quadrilatera, sostenuta da uno zoccolo quadrato* (*Fig.* 49.)

Sia $(S\ a\ b\ o\ d,\ S'\ a'\ b')$ la piramide, ed $(A\ B\ C\ D,\ A'\ A''\ B''\ B')$ il suo zoccolo: suppongasi situato in $(O,\ O')$ il punto di vista, e il piano del quadro sia $R\ Q\ P'$ perpendicolare ai due piani coordinati.

Conducendo la retta $(S\ O,\ S'\ O')$, il punto $(S,\ S')$ in cui è da essa incontrato il piano del quadro sarà la prospettiva del vertice.

Nello stesso modo si avranno le prospettive $(D_1,\ D'_2)$, $(B_1,\ B'_1)$, $(b_1,\ b'_1)$.... degli altri vertici dell' oggetto tirando i raggi visuali $(D\ O,\ A'\ O')$, $(B\ O,\ B'\ O')$, $(b\ O,\ b'\ O')$.

Volendo poi l' immagine dell' oggetto sul quadro bisognerà

porre in evidenza la posizione relativa delle prospettive dei suoi diversi punti.

A tal fine si abbatte sul coordinato verticale il piano del quadro prendendo per asse di abbattimento la sua traccia $Q\ P'$. Allora le prospettive non ha guari determinate dei diversi punti singolari dell'oggetto descriveranno altrettanti archi di circolo orizzontali: per cui troveremo la posizione S'_1 della prospettiva del vertice sulla retta $S'_1\ S'_2$ parallela ad $X\ Y$, e ad una distanza $S'_1\ S'_2 = Q\ S_2 = Q\ S_1$, ed analogamente troveremo la posizione B''_1, b''_1, D'_1 . . . delle prospettive degli altri punti (B, B''), (b, b') (D, A'') . . . . Congiungendo infine convenevolmente con linee rette queste prospettive e trascurando, se vuolsi, quelle che rimangono invisibili, avremo l'immagine dell'oggetto proposto.

139. *Osservazione I.* — Inutile affatto è la costruzione della prospettiva dei punti (A, A''), (n, n'); non così quella del punto (A, A''). Poichè quantunque si scorga che questo punto riesce invisibile all'occhio situato in (O, O'), è però manifesto che visibile resulta una porzione si della costola $(D\ A, A'')$ come della costola $(A\ B, A'\ B'')$: onde la necessità di costruire il punto A''_1 per avere la direzione delle prospettive di quelle rette.

140. *Osservazione II.* — Le rette $B'_1\ C'_1$, $A'_1\ D'_1$ . . . prospettive di rette orizzontali e parallele al quadro dovranno riescire parallele alla base del quadro $Q\ R'$; le rette $B'_1\ B''_1$, $D'_1\ D''_1$ . . . prospettive di rette verticali dovranno riescire perpendicolari alla medesima base (N.° 137, 1.° 2.°).

141. *Osservazione III.* — L'esempio citato dà luogo anche alle seguenti considerazioni:

1.° Le prospettive di tutte le linee situate sul piano orizzontale che passa per la base del quadro $Q\ R'$ si elevano più o meno al di sopra di questa base secondo che sono più o meno distanti dal quadro e di una eguale quantità per ciascuno dei loro punti se sono parallele al quadro, obliquando invece alla base e sfuggendo coi punti più lontani se non sono parallele ad esso.

2.° Le prospettive delle sei costole che presenta l'oggetto parallele fra loro, ma non al quadro riescono visibilmente convergenti

142. Quest' ultimo resultato non è una singolarità relativa all' esempio proposto, ma è una proprietà comune ad ogni sistema di rette parallele, che ora ci proponiamo di dimostrare.

Sieno $A B$, $C D$, $E F$... più rette parallele fra loro, ma non al quadro (*Fig.* 50), delle quali si domanda la prospettiva sopra il piano verticale $Q R Q'$, il punto di vista essendo in O.

Tirando i raggi visuali $O A$, $O B$ i punti a e b nei quali è da essi incontrato il quadro saranno le prospettive degli estremi A e B della retta $A B$, e quindi $a b$ sarà la prospettiva di questa (N.° 134).

La linea $a b$ è dunque la traccia sul quadro del piano che passa per O e per $A B$. Conducendo sopra questo piano una retta $O o$ parallela ad $A B$, sarà manifesto ch' essa dovrà incontrare il quadro in un punto o della prospettiva $a b$.

Se ora collo stesso mezzo cerchiamo la prospettiva $c d$ della seconda linea $C D$, la stessa retta $O o$ si troverà contenuta anche sul piano $O C D$, e quindi il suo incontro o col quadro non potrà essere al di fuori della traccia $c d$ del piano $O C D$ su quest' ultimo.

Dunque le due prospettive $a b$, $c d$ sufficientemente prolungate devono concorrere nel medesimo punto o, nel quale dovrà pure concorrere la $e f$ prospettiva della terza retta $E F$ in forza del medesimo ragionamento.

Possiamo intanto stabilire il seguente principio.

Le prospettive di più rette parallele fra loro, ma non al quadro concorrono in un medesimo punto del piano di esso; punto che si trova costruendo quello nel quale viene incontrato da una retta parallela alle rette date condotta pel punto di vista.

143. *Osservazione I.* — Se le rette date fossero parallele anche al quadro, la retta $O o$ riescirebbe parallela al piano di esso, che è quanto dire, che il punto o troverebbesi ad una distanza infinita sul quadro. Allora anche le prospettive delle rette concorrerebbero all' infinito. Di là quest' altro principio.

Le prospettive di più rette parallele fra loro e al quadro sono parallele fra loro.

La proprietà 2.ª del N.° 137, è un caso particolare di questo principio.

144. *Osservazione II.* — Se le rette date fossero oriz-

zontali, la O o sarebbe pure orizzontale e incontrerebbe il quadro in un punto della linea secondo la quale è intersecato da un piano orizzontale condotto pel punto di vista.

Questa intersezione dicesi *linea d' orizzonte;* dunque:

Il punto di concorso di più rette parallele e orizzontali, trovasi sempre sulla linea d' orizzonte, qualunque sia la loro inclinazione al quadro.

145. *Osservazione III.* — Se più rette sono perpendicolari al quadro, riesciranno anche orizzontali, e perciò le prospettive loro avranno il punto di concorso sulla linea d' orizzonte (N.° 144).

Questo punto è allora la proiezione ortogonale del punto di vista sul quadro a cui si dà il nome di *punto principale* come si chiama *raggio principale* la retta che determina questa proiezione. Dunque:

Le prospettive di più rette perpendicolari al quadro o parallele al raggio principale sono dirette verso il punto principale che è quello del loro concorso.

146. I principii precedenti sono di una utilità grandissima in ordine all' uso che può farsene come mezzi di assicurarsi della esattezza delle costruzioni, ossivvero come mezzi di costruzione.

Così se costruiamo sopra la Figura 49 (N.° 138) il punto principale O_2, dovrà trovarsi che i prolungamenti delle rette $B'_2 A'_2$, $C'_2 D'_2$, $C''_2 D''_2$, $c'_2 d'_2$... concorrono tutti in O_2 (N.° 145).

Volendo invece profittare di questa proprietà, come delle altre non ha guari dimostrate, per la costruzione di quella prospettiva, può operarsi nell' ordine seguente.

Determinate nel modo insegnato le prospettive B'_2, C'_2, D'_2, dei punti (B, B'), (C, B'), D, A') si troverà subito la prospettiva C''_2 del punto (C, B'') tirando la verticale $C'_2 C''_2$ (N.° 137, 1.°) fino all' incontro della parallela alla base del quadro condotta per b''_2. Questa medesima parallela (N.° 137, 2.°) e la verticale del punto B'_2 somministreranno il punto B''_2; la $C''_2 O_2$ e la verticale del punto D'_2 somministreranno il punto D''_2. E in questo modo avremo costruita la prospettiva delle due facce visibili dello zoccolo.

Allora col medesimo mezzo del N.° 138 si troveranno le prospettive S'_2 del vertice della piramide, b'_2, d'_2 dei ver-

Digitized by Google

lici (b, b), (d, a') della sua base; e quindi tirando per b'_2 una parallela alla base del quadro, e per d'_2 la $O_2 d'_2$ si troverà determinata la prospettiva c'_2 del punto (c, b'). Ciò fatto non resta che a congiungere S'_2 con b'_2, c'_2, d'_2 per avere la prospettiva delle due facce visibili della piramide stessa.

In fine la $B''_2 O_2$ e la parallela alla base del quadro condotta per D''_2 completeranno la prospettiva domandata.

CAPO II.

Metodo dei punti di concorso.

147. Il metodo usato nel problema del N.° 138 serve a porre in evidenza tutta la generalità del principio alla soluzione di esso applicato, e può usarsi utilmente nella pratica ogni qualvolta le dimensioni dell'oggetto sono piccole, e possono disegnarsi le sue proiezioni come quelle del punto di vista in un medesimo foglio. Gli elementi di una macchina ed anche alcune delle macchine più semplici sono di questo numero.

Ma quando debba costruirsi la prospettiva di un grande oggetto, come di un monumento d'architettura, saremmo arrestati fino sulle prime da difficoltà insormontabili, ad onta della semplicità che l'applicazione dei principii dimostrati nei N.i 142 e seguenti può arrecare nelle costruzioni. Poichè le proiezioni del monumento e quelle del punto di vista debbono esser fatte colla medesima scala e disegnate in proporzione coll'altezza ordinaria dell'uomo; quindi è evidente che per quanto piccola possa supporsi quest'altezza per le persone le più vicine al quadro, la dimensione del foglio dovrà esser sempre eccessivamente grande.

Nel caso ordinario però del quadro piano e verticale i medesimi principii sono fondamento ad un altro metodo, in grazia del quale si può costruire la prospettiva d'un oggetto

qualunque indipendentemente dal disegno completo ed esatto della proiezione verticale di esso.

Lo che esclude la necessità di costruirne la proiezione orizzontale nello stesso foglio su cui si propone di trovare la prospettiva, e di costruirla, se non piace, nello stesso rapporto dell'altezza dell'uomo con quella dell'oggetto medesimo.

148. Per vedere l'ordine logico delle idee da cui ha avuto origine questo metodo speciale, torniamo a proporci la costruzione della prospettiva di un punto (a, a') (*Fig.* 81.) collocato sul coordinato orizzontale, essendo in (O, O') il punto di vista ed $R\ Q\ R'$ rappresentando il piano del quadro. Sappiamo (N.° 138) che il raggio visuale $(a\ O,\ a'\ O')$ somministra la prospettiva (a_1, a'_1) cercata, e che questa viene a prendere la posizione A sull'abbattimento del quadro fatto sopra il coordinato verticale.

Ora il punto (a, a') può considerarsi come la intersezione di due rette qualunque descritte sul coordinato orizzontale. Trovando il punto d'incontro di queste rette col quadro e il respettivo punto di concorso delle prospettive del sistema di rette parallele al quale ciascuna di esse appartiene, è evidente che potremo determinare immediatamente le prospettive delle due rette considerate, e che il punto a quelle comune sarà la prospettiva del punto dato.

Una delle rette ausiliarie può essere la perpendicolare $a\ f$ al quadro, l'altra sia qualsivoglia per esempio $a\ r$. Il punto di concorso si dell'una, come dell'altra si troverà sulla linea d'orizzonte (N.° 144), che sarà evidentemente la retta $o'\ o''$ condotta per O' parallela alla base $Q\ R_1$ del quadro. Quello della prima sarà il punto principale o; quello della seconda sarà r_1 determinato dalla $O\ r_1$ parallela ad $a\ r$ (N.° 142). Cercando ora sull'abbattimento $R_1\ Q\ R'$ del quadro la posizione dei punti f, r e quella dei punti o ed r_1, saranno f' ed r' gli abbattimenti dei punti in cui le rette ausiliarie incontrano il quadro; sulla linea d'orizzonta, poi si troverà in P il punto principale ed in r'_1 il punto di concorso della prospettiva del sistema di rette parallele ad $a\ r$.

Segue da ciò che le prospettive delle rette $a\ f$ ed $a\ r$ saranno respettivamente $f'\ P$, ed $r'\ r'_1$, e quindi il loro incontro A la prospettiva del punto a

149 *Osservazione I.* — Immaginiamo elevato il quadro verticalmente al di sopra della sua traccia orizzontale $Q\ R$, che ne è la base; immaginiamo di poi che il coordinato orizzontale ruotando attorno $Q\ R$ verso il basso si abbatta sul piano del quadro al di sotto della sua base, e che il piano orizzontale che passa pel punto di vista ruotando verso l'alto attorno alla linea di orizzonte, venga esso pure ad abbattersi sul quadro; immaginiamo infine che il piano del quadro ruotando attorno a $Q\ R'$ torni ad abbattersi in $R_1\ Q\ R'$, e si vedrà facilmente che il punto n verrà in a_2, il punto O in O_2, e le rette $a\ f$, $a\ r$, $O\ r_1$ respettivamente in $a_2\ f'$, $a_2\ r'$, $O_2\ r_1'$, delle quali la prima sarà perpendicolare ad $R_1\ Q$ e le altre due dovranno essere parallele fra loro.

Fatta questa ipotesi, d'altronde ammissibile in ogni caso, si hanno subito le prospettive $f'\ P$ ed $r'\ r'_1$ delle rette ausiliarie $a_2\ f'$, $n_2\ r'$ e quindi la prospettiva A di n_2.

Dal che segue ancora che assegnata la linea di orizzonte $o'\ o''$, e sopra di essa il punto principale P, e nota la distanza del punto di vista al quadro o la lunghezza del raggio principale (N.° 145), l'assegnazione dei dati del Problema per mezzo delle loro proiezioni e le costruzioni indicate nel precedente N.° 148 divengono inutili.

150. *Osservazione II.* — A tutte le linee ausiliarie che possono scegliersi per determinare la prospettiva di un punto, sono da preferirsi le perpendicolari al quadro e le orizzontali ad esso inclinate di 45.° Poichè il punto di concorso delle prime si ha nel punto principale, e quello delle seconde si trova evidentemente a destra o a sinistra del precedente ad una distanza eguale al raggio principale. E a destra per le inclinate di 45° che incontrano il quadro alla sinistra del punto principale, è a sinistra per le inclinate che lo incontrano a destra.

Questi punti di concorso delle orizzontali inclinate di 45° al quadro diconsi *punti di distanza*, ciccome quelli che colla loro distanza dal punto principale esprimono quanto è lontano il punto di vista dal quadro.

Ciò premesso, se per n_2 conducansi le due inclinate di 45° $n_2\ c$, $a_2\ o_1$, le prospettive loro saranno respettivamente $c\ d$, $c_1\ d_1$; e queste due rette, o ciascuna di esse

combinata con la perpendicolare a_2 f' somministreranno il punto A.

151. Quando il punto a_2 sia proiezione orizzontale d'un punto elevato al di sopra del coordinato orizzontale d'una certa quantità a' b', immagineremo condotto per esso un piano orizzontale, che taglierà il quadro secondo una retta x y parallela alla sua base e da questa distante di Q $y = a'$ b', e sul quale potremo supporre condotte dal punto in questione le rette ausiliarie. Così se queste rette fossero due inclinate di 45° a_2 c, a_2 c_1, il quadro sarebbe da esse incontrata nei punti c' e c'_1, e le prospettive loro c' d, c'_1 d_1 si taglierebbero in B prospettiva richiesta.

Invece di due inclinate di 45° poteva farsi uso di una sola inclinata e della perpendicolare al quadro.

152. La prospettiva di una verticale (a, a' b') si otterrà con egual facilità. Troveremo prima la prospettiva A del punto a; condurremo da A una verticale (N.° 137. 4°), ed una delle prospettive c'_1 d o c'_1 d'_1 determinerà su questa verticale la lunghezza A B della prospettiva domandata.

153. Il metodo precedente porta il nome di *Metodo dei punti di concorso*. Esso è preferibile al metodo generale esposto al N.° 138; 1° perchè non abbisognano le proiezioni del punto di vista; 2° sono rese inutili quelle dei raggi visuali: 3° dell'oggetto dato basta avere la proiezione sul piano orizzontale condotto per la base del quadro, e l'altezza dei diversi suoi punti su questo piano.

154. La distanza del punto di vista al quadro, la sua altezza sul piano orizzontale che passa per la base del quadro, e il punto principale sono elementi arbitrari a cui bisogna sempre stabilire a priori. L'arbitrio però nella loro scelta è subordinato a certe condizioni di convenienza di cui parleremo altrove. Ma intanto possiamo inferirne che una retta qualunque o' o'' parallela alla base del quadro può considerarsi come la linea d'orizzonte; che un punto P preso su questa retta può ritenersi come il punto principale del quadro: e che due rette P d_1, P d prese a destra e a sinistra del punto P sulla linea d'orizzonte e supposte eguali ciascuna al raggio principale determinano i punti di distanza

155. Vediamo alcune applicazioni del metodo attuale in alcuni esempi semplicissimi.

Sia $X\ Y\ T\ U$ il quadro (*Fig* 52); $X\ Y$ la sua base; $o'\ o''$ la linea d'orizzonte; P il punto principale; d e d_1 i punti di distanza: e vogliasi la prospettiva della retta $A\ B$ situata sul piano orizzontale che passa per $X\ Y$.

Per ciascuna estremità della retta data condurremo una perpendicolare ed una inclinata di 45° al quadro. Le perpendicolari avranno le loro prospettive dirette al punto P, e le inclinate $A\ C$ e $B\ D$ le avranno dirette al punto d; talchè i punti d'incontro A_1 e B_1 determineranno la prospettiva $A_1\ B_1$ richiesta.

156. *Osservazione.* — Se trovassimo il punto in cui il prolungamento di questa retta incontra la linea d'orizzonte, esso sarebbe il punto di concorso di tutte le rette orizzontali parallele ad $A\ B$.

157. Vogliasi la prospettiva del quadrilatero $m\ n\ p\ q$ situato sul medesimo piano orizzontale della *Fig.* 52, ed avente i lati $p\ q$, $n\ p$ respettivamente parallelo e perpendicolare alla base del quadro.

Si determinerà la prospettiva p_1 del punto p mediante una perpendicolare $p\ p'$ ed una inclinata $p\ r$ di 45° al quadro.

Allora la prospettiva di $q\ p$ si troverà sopra una retta condotta per p_1 parallelamente ad $X\ Y$ e terminerà al punto d'incontro q_1 colla prospettiva $q_1\ P$ di una retta perpendicolare al quadro condotta per q. La prospettiva $p_1\ n_1$ della $p\ n$ si troverà sopra $p_1\ P$, e sarà determinata da quella di una inclinata di 45° condotta per n. Trovata in fine con i medesimi mezzi la prospettiva m_1 del punto m, basterà unire m_1 con q_1 ed n_1 e il quadrilatero $m_1\ n_1\ p_1\ q_1$ sarà la prospettiva richiesta.

158. Cerchiamo la prospettiva del circolo $a\ b\ c\ d$ descritto sul piano orizzontale che passa per $X\ Y$ (*Fig.* 53), essendo $X\ Y\ T\ U$ il quadro, $o'\ o''$ la linea d'orizzonte, P il punto principale, d e d' i punti di distanza.

Noi potremmo determinare la prospettiva di diversi punti del circolo coi metodi sopra impiegati, e riunire quindi con un tratto continuo questi punti. Meglio è però inscrivere e circoscrivere al circolo due quadrati, e le prospettive loro son-

ministreranno otto punti, che ordinariamente sono sufficienti per la prospettiva domandata.

Prendiamo i lati dei quadrati paralleli e perpendicolari al quadro; le prospettive dei primi saranno parallele ad XY, quelle dei secondi concorreranno in P. Trovate le prospettive di questi ultimi basterà costruire lo prospettiva della diagonale ef che passa pura per i vertici omologhi del quadrato inscritto, e che resulta inclinata di 45° al quadro.

Essa taglierà le prospettive dei lati perpendicolari al quadro nei punti f_1 ed e_1, onde basterà condurre per ciascuno di essi una parallela ad XY ed avremo la prospettiva $f_1 h_1 e_1 g_1$ del quadrato circoscritto.

Tirata la diagonale $g_1 h_1$, che sarà prospettiva di gh, essa toglierà l'altra $e_1 f_1$ in o_1 prospettiva del centro o del circolo dato. Talchè la $o_1 P$ e la $d_1 b_1$ condotta per o_1 parallele ad XY saranno le prospettive dei due diametri ac, bd e determineranno sui lati del quadrilatero $e_1 h_1 f_1 g_1$ le prospettive dei quattro punti a, b, c, d, nei quali quei lati debbono resultare tangenti alla prospettiva del circolo (N.° 135). Per avere gli altri quattro punti situati sulle diagonali, basterà costruire le prospettive Pi, Pn dei lati del quadrato iscritto che sono perpendicolari al quadro.

159. *Osservazione I.* — Se vuolsi la prospettiva d'una tangente qualunque ts, si potrebbe far l'abbattimento p del punto di vista sul quadro, e condurre la ps' parallela a ts. Allora la prospettiva di ts sarà ss', e la prospettiva di una perpendicolare al quadro condotta pel punto di contatto t determinerà sopra ss' quella di quest'ultimo punto.

160. *Osservazione II.* — Quando il circolo dato si fosse trovato descritto sopra un piano orizzontale diverso da quello che passa per XY, avremmo dovuto operare per costruire le prospettive delle rette ausiliarie nel modo praticato al N.° 154.

161. La prospettiva d'una linea retta non orizzontale nè verticale si troverà cercando quella di ciascuno dei suoi estremi, col metodo praticato per la prospettiva di un punto qualunque (N.° 151).

La prospettiva d'una linea qualsivoglia piana o a doppia curvatura si otterrà ripetendo lo stesso metodo per quel numero di punti che sarà creduto sufficiente a somministrare

colla maggiore approssimazione possibile la traccia sul piano del quadro della superficie conica avente per vertice il punto di vista, e per direttrice la linea proposta.

162. Applichiamo infine il metodo dei punti di concorso ad un esempio un poco più complicato; e per meglio comprendere le differenze che lo distingue dal metodo generale non che i vantaggi che esso ha su quest'ultimo, proponiamoci di costruire la prospettiva della medesima piramide rappresentata nella *Fig.* 49 e costruita già al N.° 138.

Essendo $X\ Y\ T\ U$ il quadro (*Fig.* 54), ed avendo disegnata al di sotto della sua base la proiezione orizzontale $S_1\ A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ della piramide identica a quella della *Fig.* 49, per modo che abbia la medesima posizione rispetto al quadro, riporteremo la distanza $S\ O_1$ presa sulla traccia $R\ Q$ del piano del quadro da s_1 in p sulla *Fig.* 54, e sulla verticale $p\ q$ presa l'altezza $p\ P$ eguale alla $Y\ O_2$ che sulla *Fig.* 49 esprime quella del punto di vista, si avrà il punto principale P: si tirerà per P la $o'\ o''$ parallela ad $X\ Y$ ed otterremo la linea di orizzonte. Infine la retta $O\ O_1$ della *Fig.* 49 essendo la lunghezza del raggio principale, basterà riportarla sulla *Fig.* 54 da P in d, per avere uno dei punti di distanza.

Ora non rimane da fare altra cosa che segnare sopra una verticale qualunque, che può essere anche uno dei bordi $X\ U$ del quadro, le altezze $X\ x$, $x\ t$ dello zoccolo e della piramide, perchè si abbiano sulla *Fig.* 54 tutti gli elementi necessari alla costruzione della prospettiva domandata, per la quale si faranno le operazioni seguenti.

1.° Si prolungheranno i lati $D_1\ A_1$, $C_1\ B_1$ e la diagonale $D_1\ B_1$ fino all'incontro della base del quadro. Allora le prospettive dei lati saranno $a_1\ P$, $c_1\ P$, e quella della diagonale sarà $b_1\ d$.

2.° Per i punti C'_1, A'_1 nei quali quest'ultima incontra le rette $a_1\ P$ e $c_1\ P$ condurremo due parallele alla base del quadro, e il quadrilatero $A'_2\ B'_2\ C'_2\ D'_2$ sarà la prospettiva della base inferiore dello zoccolo.

3.° Si condurrà per x la $x\ y$ parallela ad $X\ Y$, e i punti a_2 e c_2 in cui essa verrà incontrata dal prolungamento delle rette $A_1\ D_1$, $B_1\ C_1$ saranno quelli in cui il quadro o incontrato dal prolungamento dei lati corrispondenti della base

superiore dello zoccolo. Onde a_1 P, c_1 P essendo le prospettive di questi lati, basterà elevare fino al loro incontro le verticali A'_1 A''_2, B'_2 B''_2, C'_2 C''_2, D'_2 D'_2 per ottenere la prospettiva dello zoccolo intero.

4.° Descritte le diagonali A''_1 C''_2, B''_1 D''_1 del quadrilatero A''_1 B''_1 C''_2 D''_2, prolungheremo la retta c_1 b_1 fino all'incontro in b_2 colla x y, ed avremo il punto in cui il prolungamento del lato c_1 b_1 della piramide incontra il quadro. Allora sopra b_2 P si troverà la prospettiva di questo lato, e i punti b'_2, c'_2 nei quali la b_2 P incontra le diagonali suddette saranno le prospettive dei vertici b_1 e c_1. La parallela ad X Y condotta per b'_2 intersecherà la diagonale B''_1 D''_1 in d'_1 prospettiva di d_1.

5.° Condurremo per t una parallela alla base del quadro, poichè su questa deve aver luogo l'incontro di esso colle rette ausiliarie S_1 s_1, S_1 b_1 tirate pel vertice della piramide. Questi punti d'incontro essendo evidentemente s_2, d_2, le prospettive delle rette medesime saranno respettivamente s_2 P, d_2 d; e la loro intersezione S'_2 sarà la prospettiva del vertice della piramide.

6.° Si congiungerà finalmente il punto S'_2 con i punti d'_1, b'_2, c'_2 e la prospettiva dell'oggetto proposto sarà completa.

163. *Osservazione.* — Si può notare fin d'ora non essere necessario il disegno della proiezione orizzontale dell'oggetto fatto al di sotto della base del quadro o nella stessa scala che determina il rapporto delle dimensioni del quadro coll'altezza della linea d'orizzonte al di sopra della sua base.

Poichè se la proiezione orizzontale della piramide fosse stata disegnata anche in foglio separato e in una scala più piccola servirebbe porre sul medesimo foglio la proiezione orizzontale del quadro o quella della sua base nella posizione che si crede più idonea a ritrarre la immagine delle piramide, tirare le linee ausiliarie fino all'incontro di quella base, e riportare poi sopra X Y colla scala del quadro, a partire dal punto X, le distanze di questi punti d'incontro contate dalla corrispondente estremità della retta che sulla proiezione della piramide rappresenta la base o proiezione del quadro.

CAPO III.

Delle scale usate in prospettiva.

164. Tutte le volte che il quadro è piano e verticale, il che si verifica nel massimo numero di casi, il metodo dei punti di concorso spiegato nel Capo precedente, ha come si può scorgere anche dall'esempio citato ai N.i 162 e 163, un gran vantaggio sopra il metodo generale. E questo vantaggio tanto più si manifesta quando l'oggetto dato è tratto dai monumenti d'architettura a cagione del gran numero di linee parallele fra loro che quelli presentano.

Però le condizioni che si richieggono per ottenere una *buona prospettiva* essendo sempre subordinate a certi rapporti di distanza fra il punto di vista, il quadro e l'oggetto, rapporti dei quali ci occuperemo in seguito, avviene non di rado che i punti di distanza, i punti d'incontro col quadro delle rette ausiliarie condotte per quelli dell'oggetto, e i punti di concorso di alcune rette di quest'ultimo trovansi al di fuori dei limiti non solo del quadro, ma anche del foglio su cui si disegna.

Se pel disegnatore geometra non sono queste difficoltà insuperabili, sono però tali da riescire molto incomode, sendochè in simili casi egli si trovi costretto a ricorrere a costruzioni particolari che per lo meno imbarazzano non poco la figura e generano confusione sulle linee principali. Quindi è che la ricerca dei mezzi atti a prevenire questa difficoltà col permettere di determinare in un modo semplice tutti i punti dei quali fa bisogno entro i limiti del quadro, se vuolsi, o almeno dentro quelli del foglio su cui han luogo le costruzioni grafiche della prospettiva, sarà sempre una ricerca di grande utilità, comunque riduca in fine a regole pratiche le costruzioni medesime.

165. Sia $x\,y$ la proiezione del quadro fatta sul piano su cui è tracciata la proiezione orizzontale dell'oggetto, in o trovisi quella del punto di vista.

Conducendo due piani o l, o l' pei bordi verticali x ed y del quadro, questi comprenderanno fra loro tutte le parti dell'oggetto, la di cui prospettiva potrà essere disegnata sul quadro $x\,y$; e conducendo la $o\,p$ perpendicolare ad $x\,y$ si avrà la proiezione orizzontale del raggio principale che determina in p quella del punto principale.

Dicesi *angolo ottico* quello fatto dai piani o l, o l' che limitano a destra e a sinistra del punto di vista la prospettiva dell'oggetto proposto.

Consideriamo ora un quadro $X\,Y\,T\,U$, sul quale $o'\,o''$ sia la linea di orizzonte, e di cui la base $X\,Y$ abbia con $x\,y$ un rapporto qualunque $m:n$. Dividiamo la $o'\,o''$ in due parti $o'\,P$, $P\,o''$ tali che si abbia

$$o'\,P : P\,o'' :: x\,p : p\,y$$

e P sarà il punto principale corrispondente a quello proiettato in p.

Frattanto il rettangolo $o'\,o''\,Y\,X$ comprenderà le prospettive di tutti i punti della proiezione orizzontale dell'oggetto, le quali evidentemente saranno tanto più vicine ad $o'\,o''$ quanto più questi punti si discosteranno da $x\,y$, e per lo contrario si troveranno tanto più distanti da $o'\,o''$, cioè vicine alla base $X\,Y$ del quadro, quanto meno i medesimi punti si troveranno lontani da $x\,y$.

Ciò posto conduciamo pel punto x una retta $x\,z$ perpendicolare ad $x\,y$. Essa avrà per prospettiva la $X\,P$ (N.° 145), che sarà il luogo geometrico di tutte le prospettive dei punti situati sopra $x\,z$.

Volendo la prospettiva d'uno qualunque di questi punti, per esempio n, ci potremmo servire, come sappiamo (N.° 150), d'una retta ausiliaria $a\,b$ inclinata di 45° al quadro; e in tal caso, dopo aver determinato sulla base $X\,Y$ il punto b_1 per modo che si abbia

$$X\,b_1 : x\,b :: m : n \quad (1)$$

o sopra la linea d'orizzonte, prolungata se occorre, trovato il punto d colla proporzione

$$P\,d : o\,p :: m : n \quad (2)$$

basterà tirare la $b_1\,d$ per avere in a_1 la prospettiva cercata.

Ora il medesimo punto n_1 può determinarsi in un modo estremamente più semplice e spedito. Si riporti a tale oggetto

sulla linea d'orizzonte la lunghezza o p da P in F e si tiri $F a_1$ fino ad incontrare in b_2 la base del quadro. Avremo immediatamente:

$$P d : P F :: X b_1 : X b_2$$

ma dalle proporzioni (1) e (2) ricavasi

$$P d . o p :: X b_1 : x b$$

considerando che $o p = P F$, si ha dunque per conseguenza necessaria

$$X b_2 = x b = x a.$$

Dunque il punto a_1 può determinarsi ancora riportando sopra $X Y$ a partire da X la lunghezza $x a$ da X in b_2, e tirando $b_2 F$.

166. La retta $X P$ chiamasi *Scala di fuga*, il punto F *Punto di fuga*.

Frattanto da ciò che precede può dedursi la regola seguente:

Tutti i punti della proiezione orizzontale dell' oggetto, che si trovano sopra una retta perpendicolare in x al quadro $x y$, hanno le loro prospettive sulla scala di fuga; e si determinano, riportando le loro distanze dal punto x sopra la base $X Y$ del quadro, a partire da X, e congiungendo i punti così determinati col punto di fuga.

È inutile l' aggiungere che se la perpendicolare $x z$ fosse stata invece condotta per y sarebbe stata scala di fuga la congiungente il punto F con P, che il respettivo punto di fuga sarebbesi trovato invece alla destra di P, e che le distanze $x a$ avrebbero dovuto riportarsi sopra $X Y$ a partire dal punto Y.

167. Se avessimo preso $P F$ eguale a due, tre.... ec. volte la retta $o p$, ed $X b_2$ eguale a due, tre.... ec. volte la retta $x a$, avremmo evidentemente ottenuto lo stesso punto d' intersezione a_1.

Si dovrà profittare di questa osservazione tutte le volte che potremo riconoscere avvenire la intersezione a_1 sotto un angolo troppo acuto pel maggior numero di punti dell' oggetto.

168. Qualunque retta $a c$ parallela ad $x y$ ha per prospettiva una retta parallela ad $X Y$ (N.° 137. 2). Per determinarla basterà dunque costruire col processo precedente la prospet-

tiva a_1 del punto in cui la obiettiva a c o il suo prolungamento incontra la x z.

169. Tutte le rette h i parallele ad x z hanno le loro prospettive concorrenti in P. Per avere quella di h i bisognerebbe determinare sopra X V il punto d'incontro h_1 corrispondente ad h per modo che si avesse

$$X h_1 : x h :: m : n \quad (1)$$

e tirare h_1 P.

Ma se prendiamo sopra P o' la P $G = x$ p, conduciamo la verticale G O fino alla scala di fuga, e di là tiriamo la O V_1 parallela ad X V, noi avremo immediatamente la proporzione

$$P o' : P G :: X h_1 : O i_1$$

D'altronde si ha pure

$$P o' : P G :: m : n$$

la quale combinata con la (1) somministra

$$P o' : P G :: X h_1 . x h$$

dunque ne consegue necessariamente la relazione

$$O i_1 = x h$$

e quindi si vede che riportando sopra O V_1 a partire da O la distanza x h che separa la h i dalla sua parallela x z, avremmo ottenuto subito la prospettiva di h i, congiungendo i_1 con P.

170. La retta O V_1 chiamasi *Scala di larghezza*, e serve, come si vede, a determinare le prospettive di tutte le rette perpendicolari al quadro e giacenti sulla proiezione orizzontale dell'oggetto.

Possiamo quindi stabilire ancora la regola che segue:

Per avere la prospettiva di una retta qualunque perpendicolare al quadro e tracciata sul piano della proiezione orizzontale dell'oggetto, basta riportare sulla scala di larghezza a partire dal punto O in cui essa incontra la scala di fuga, la distanza che separa la obiettiva dalla linea x z, e congiungere il punto così determinato sulla scala di larghezza col punto principale P.

Questa distanza si riporterà alla destra o alla sinistra del punto O secondo che la obiettiva ritrovasi alla destra o alla sinistra della retta x z.

Quando la scala di fuga e il punto di fuga fossero stati presi alla destra del punto principale, allora avremmo dovuto

determinare il punto G alla destra di P. E in tal caso non $p\,x$, ma $p\,y$ avremmo dovuto riportare sulla linea d'orizzonte per avere il punto G.

171. Tutte la volte che la scala di larghezza $O\,F_1$ riesca troppo vicina ad $o'\,o''$ per dubitare della vera posizione della retta $P\,A_1$, determinata dai punti i_1 troppo vicini a P_1, noi potremo allontanare la scala medesima quanto ci aggrada, prendendo $P\,G$ eguale a due, tre.... ec. volte la $x\,p$, purchè poi sopra $O\,F_1$ si riportino due, tre.... ec volte le distanze $x\,h$ per avere i punti i_1.

172. Consideriamo la retta $x\,z$ come la traccia orizzontale d'un piano verticale. È evidente che la prospettiva di questa piano è determinata sufficientemente dalla scala di fuga $X\,P$ e dalla verticale $X\,U$, in luogo della quale possiamo anche prendere la verticale $O\,Z$ del punto O.

Ora supponiamo tracciata sul piano $x\,z$ una retta perpendicolare al quadro, a tale distanza da $x\,z$, che nell'abbattimento del piano venga a prendere la posizione $H\,I$. La prospettiva di questa retta dovrà concorrere in P e si otterrà facilmente congiungendo il punto P col punto H_1 determinato sopra $X\,U$ mediante la proporzione:

$$X\,H_1 : x\,H :: m : n$$

La retta $P\,H_1$ taglia in H_1 la verticale $O\,Z$, e si ha immediatamente la proporzione:

$$P\,o' : P\,G :: X\,H_1 : O\,H_1$$

ma ricordandosi che:

$$P\,o' : P\,G :: m : n$$

si ha pure in virtù della prima

$$P\,o' : P\,G :: X\,H_1 : x\,H$$

la quale posta a confronto colla seconda somministra subito la relazione

$$O\,H_1 = x\,H$$

e fa conoscere che la prospettiva $P\,H_1$ poteva altrimenti ottenersi riportando sopra $O\,Z$ l'altezza $x\,H$ da O in H_1 e tirando $P\,H_1$.

173. La retta $O\,Z$ chiamasi *Scala d'altezza*, e serve, come si vede, a determinare le prospettive di tutte le rette perpendicolari al quadro e giacenti sul piano verticale $x\,z$. Possiamo quindi inferirne che

La prospettiva di qualunque retta perpendicolare al quadro e giacente sul piano verticale $x\,z$ si trova: riportando sulla scala d'altezza a partire dal suo piede O la distanza che separa la obiettiva dalla linea $x\,z$, e congiungendo con P il punto che si viene così a determinare sulla scala di altezza.

174. Determinate una volta sul quadro le tre scale di cui abbiamo fatto parola, la prospettiva di un punto qualunque dello spazio si trova colla massima facilità, applicando le tre regole sopra dimostrate.

Riteniamo che il piano verticale $x\,z$ sia quello coordinato; allora (A, A'), (*Fig.* 55), potrà essere questo punto qualunque. Si tiri $A\,h$ perpendicolare ad $x\,y$ ed $A\,a$ perpendicolare ad $x\,z$. Si riporti $x\,a$ da X in b_1, e si tiri $F\,b_1$, questa retta incontrerà la scala di fuga in a_1, e la $a_1\,c_1$ parallela ad $X\,Y$ sarà la prospettiva di $a\,c$. Si riporti $x\,h$ sulla scala di lunghezza da O in i_1, e si tiri $P\,i_1$: questa retta sarà la prospettiva di $A\,h$, e il punto A_1 nel quale incontra la $a_1\,c_1$ sarà quella della proiezione orizzontale del punto proposto.

Ora tutti i punti del piano verticale $x\,z$ elevati dal coordinato orizzontale della quantità $a\,A$ hanno le loro prospettive sopra quella di una retta perpendicolare al quadro distante da $x\,z$ della medesima quantità $a\,A'$. Prendasi sulla scala di altezza a partire da O la parte $O\,H_1$ eguale ad $a\,A'$, e si tiri $P\,H_1$; questa retta sarà prospettiva di $H\,A'$, e conterrà per conseguenza anche quella del punto A'. Immaginiamo ricondotto il piano $x\,H\,I\,z$ alla sua posizione verticale; la retta $a\,A'$ tornerà ad essere verticale, e la sua prospettiva essendo evidentemente $a_1\,a_2$, il punto a_2 nel quale è da questa incontrata la $P\,H_1$ sarà la prospettiva della proiezione verticale A' del punto proposto.

Ma è noto (*Geom. Descritt.*) che le proiezioni ortogonali d'un punto sono somministrate da rette per esso condotte respettivamente perpendicolari ai piani coordinati; dunque se per A_1 tireremo una perpendicolare alla base del quadro e per a_2 una parallela a questa base, sulla prima si troverà la prospettiva della linea proiettante orizzontale, sulla seconda quella della linea proiettante verticale del punto in questione, e il loro incontro A_2 determinerà la prospettiva di quest'ultimo.

175. Così la prospettiva di un punto qualunque dello spazio dipende da quelle delle sue linee proiettanti, le quali d'altronde si costruiscono in un modo estremamente semplice, allorchè sono note le prospettive delle proiezioni del punto dato.

La figura $X P o''$ può ritenersi come la prospettiva di quella porzione del coordinato orizzontale che rimane alla destra di $x z$, l'altra $X P P_1$ come la prospettiva del coordinato verticale, la retta $X P$ come quella della linea di terra.

Le sole rette $O F_1$, $O Z$ potrebbero chiamarsi veramente le scale dei due piani; poichè ritenendo una volta per sempre che il coordinato verticale sia rappresentato da $x z$, sulla retta $O F_1$ si prendono sempre le distanze dei punti da quel piano, mentre sopra la $O Z$ si prendono le distanze dei punti medesimi dal coordinato orizzontale.

176. Essendo $O i_1 = a A$ e la $a_1 A_1$ rappresentando sul quadro la medesima retta $a A$, possiamo inferirne la eguaglianza di $O i_1$ con $a_1 A_1$. E siccome lo stesso avverrebbe per la retta $X h_1$ e in generale per qualunque altra che fosse parallela ad $X F$ e compresa fra le due concorrenti $X P$, $h_1 P$, ne concluderemo che: *tutte le rette parallele alla base del quadro, comprese fra le prospettive di due rette orizzontali, sono prospetticamente eguali fra loro.*

177. Parimente essendo $O H_1 = a A'$, e la $a_1 a_2$ rappresentando sul quadro la medesima retta $a A'$ possiamo inferirne la eguaglianza di $O H$ con $a_1 a_2$. E siccome lo stesso avverrebbe per la retta $X H_2$ e in generale per qualunque altra che fosse parallela ad $X U$ e compresa fra le due concorrenti $X P$, $H_2 P$, ne concluderemo che: *tutte le rette parallele ad uno dei bordi verticali del quadro, comprese fra le prospettive di due rette orizzontali, sono prospetticamente eguali fra loro.*

178. Torniamo ancora a costruire colle nuove regole la prospettiva della piramide già due volte costruita ai N.i 138 e 162. Prenderemo il quadro $X Y T U$ (*Fig.* 56) eguale a quello $X Y T U$ della (*Fig.* 54), dalle quale trarremo pure i dati necessari alla costruzione dell'angolo ottico I o I' e della proiezione orizzontale $a b c d$ della piramide al dirimpetto del quadro $x y$ e del punto di vista o. Per costruire con maggior

facilità le linee comprese entro l'angolo *l o l'* noi abbiamo ridotte a 1/4 quelle corrispondenti somministrate dalla *Fig.* 54. Non avendo potuto abbattere il piano verticale *x z* alla sinistra della sua traccia *x z*, abbiamo costruita la proiezione verticale della piramide al di sopra di un'altra linea x_1 z_1, lo che non porta difficoltà alcuna nè induce complicanza nel seguito delle costruzioni.

Condotta sul quadro *X Y T U* la linea d'orizzonte alla medesima altezza alla quale si trova sopra il quadro della *Fig.* 54, riporteremo su quello quattro volte la lunghezza *o p* del raggio principale a partire dal punto *o'*, e si avrà il punto principale *P*: quindi *X P* sarà la scala di fuga; presa di poi *P G* eguale ad *x p* e condotta la verticale *Z G O*, sarà *O* Y_1 la scala di larghezza, *O Z* quella di altezza.

Avendo quindi osservato che riportando una sola volta *o p* alla sinistra di *P* sulla linea d'orizzonte, all'oggetto di determinare il punto di fuga *F*, sarebbesi questo punto trovato troppo vicino a *P*, e le intersezioni delle rette condotte per esso colla scala di fuga avrebbero avuto luogo sotto angoli troppo acuti, noi abbiamo allontanato del doppio il punto *F* da *P*.

Ciò fatto giova esaminare quali punti dell'oggetto sono visibili dal punto di vista, e limitare le operazioni soltanto a questi punti. E siccome da questo esame risulta che dello zoccolo si vedranno solamente quelli proiettati in *n, b, c*, e della piramide quelli proiettati in *e, f, g, s*, noi riporteremo sulla base *X Y* dal quadro, a partire da *X*, il doppio delle distanze *x* a_1, *x* d_1, ed ottenuti i punti n'_1, d'_1 le rette *F* a'_1, *F* d'_1 somministreranno sulla scala di fuga i punti a_2, d_2 prospettive di n_1 e d_1. Tireremo per questi punti le rette n_2 b_2, d_2 c'_2 parallele ad *X Y*, riporteremo sulla scala di larghezza, a partire dal punto *O* le distanze *x i*, *x h* e le rette *P i'*, *P h'* somministreranno il quadrilatero a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 prospettiva della base inferiore dello zoccolo.

Si tirino le diagonali a'_2 c'_2, b'_2 d'_2 e il loro punto d'incontro s_1 sarà prospettiva della proiezione orizzontale del vertice della piramide: si riportino sulla scala di larghezza le distanze *x* e_1, *x* f_1 e congiungendo i punti su quelle ottenuti con *P* si avranno delle rette che incontreranno le dia-

gonali medesime nei punti e_2, f_2, g_2 prospettive delle proiezioni orizzontali dei vertici visibili della piramide.

Sulla scala di altezza si riporti la $s' t'$ da O in t'', e conducasi la $P t''$. Questa retta conterrà le prospettive delle proiezioni verticali dei vertici appartenenti alla base superiore dello zoccolo ed alla base della piramide. Troveremo quelle dei primi mediante le verticali dei punti a_2 e d_2 in a''_2 e d''_2; troveremo quelle dei secondi in f''_2 e g''_2 determinati dalle verticali dei punti, nei quali la scala di fuga è intersecata dalle rette parallele ad $X Y$ condotte per f_2 e g_2. In fine le verticali dei punti a'_2, b'_2, c'_2 e le parallele ad $X Y$ condotte pei punti a''_2, d''_2 ed f''_2, g''_2 completeranno la prospettiva dello zoccolo, e quella della base della piramide.

Per la prospettiva del vertice, riporteremo l'altezza $s' s''$ sulla scala d'altezza da O in s_1'' e tireremo la retta $P s_1''$. Pel punto s_1 condurremo una parallela ad $X Y$ fino all'incontro colla scala di fuga; da questo punto una verticale finchè tagli la $P s''_1$ in s''_2, che sarà la prospettiva della proiezione verticale del vertice. Ed allora la parallela ad $X Y$ tirata da s''_2 incontrerà la verticale del punto s_1 in s'_1 prospettiva cercata. Unendo per ultimo s'_1 con e', f', g' otterremo completa la immagine dell'oggetto proposto.

179. Le costruzioni possono ridursi nella pratica della massima facilità, osservando che per determinare i punti a_2, d_2 .... ec. a'_2, b'_2 .... ec. non è necessario tracciare le rette $F a_2$, $F d_2$ ... ec. $P a'_2$ $P b'_2$ ... ec. ma è sufficiente il collocare la riga nella direzione di esse, e segnare i punti d'intersezione colla scala di fuga e colle parallele alla base del quadro.

180. Non debbono nemmeno esser trascurati, durante le costruzioni medesime, tutti i mezzi che possono rendere certo il disegnatore della esattezza delle sue operazioni.

Così la posizione dei punti b', c' e quella degli altri f', g' che abbiamo visto determinati dalle parallele ad $X Y$, condotte per n''_2, d''_2, ed f''_2, g''_2, sarà esatta se le rette $b' c'$ ed $f' g'$ convenientemente prolungate passeranno per P.

181. Oltre i mezzi che la posizione delle linee dell'oggetto rispetto al quadro somministra per verificare la esattezza delle costruzioni, ve ne hanno altri offerti dallo stesso

metodo esposto al N.° 174, e che possono applicarsi tutte le volte che la prospettiva di un punto è stata ritrovata indipendentemente da quel metodo. Così la posizione del punto s_1, resultante dalla intersezione delle diagonali del quadrilatero $a'_2\ b'_2\ c'_2\ d'_2$, può essere verificata:

1.° Riportando due volte sopra $X\ Y$ a partire da X la distanza $x\ s_2$ e tirando $F\ s'_2$: questa retta incontrerà la scala di fuga in s'_2, e la parallela ad $X\ Y$ condotta per questo punto dovrà passare per s_1.

2.° Riportando sopra la scala di larghezza a partire da O la retta $s\ s_2$, ed ottenuto il punto s'' tirando $P\ s''$: questa retta sufficientemente prolungata dovrà passare per s_1.

3.° Riportando x a sulla scala di larghezza da O in a_1: la retta $P\ v_1$ incontrerà la base del quadro in v_2 prospettiva di v; allora pel principio 3° del N.° 137 la verticale di v_2 sarà prospettiva della retta $s\ o$, e dovrà per conseguenza passare per s_1.

4.° Prolungando $s_2\ s$ fino all'incontro in t con uno dei lati dell'angolo ottico; quindi riportando $s\ t$ sopra $O\ Y_1$ in $O\ t$ e tirando $P\ t$; questa retta incontrerà $Y\ T$ in t_2, e la parallela ad $X\ Y$ condotta per t_2 dovrà passare per s_1. Imperocchè pel principio ora citato le prospettive dei lati dell'angolo ottico sono gli stessi bordi verticali del quadro.

182. Sebbene semplici appariscano le costruzioni necessarie alla determinazione della prospettiva di ciaschedun punto d'un oggetto, pure è evidente che per quanto sia questo poco composto, le linee occorrenti per la prospettiva del suo piano e per quella della sua elevazione occuperanno in gran parte lo spazio del quadro; talchè oltra l'imbarazzo e la confusione che ne sarebbero necessaria conseguenza, nè la prospettiva avrebbe tutta la chiarezza che la rende pregevole, nè si potrebbe senza rischio colorirla all'occorrenza.

A questo inconveniente si potrebbe ovviare facendo il disegno sopra un foglio a parte, e riportando poi sul quadro le sole linee della prospettiva cercata in quel rapporto che si vorrà. Ma se il foglio è sufficientemente grande rispetto alle dimensioni del quadro, meglio è eseguire queste costruzioni fuori dello spazio compreso dal quadro, lo che può farsi nel modo seguente

183. Abbiasi dentro l'angolo ottico l o l' (*Fig.* 57) un punto (n, a'), di cui la prospettiva determinata sul quadro $X\,Y\,T\,U$ (*Fig.* 58) col metodo del N.° 174, sia n'_1.

Si immagini condotto un secondo piano orizzontale ad una distanza $X\,X_2$ arbitraria da quello che passa per la base del quadro, e si prenda la retta $X_2\,Y_2$ contenuta in questo piano e parallela ad $X\,Y$ per base ausiliaria del quadro stesso.

La linea d'orizzonte potrebbe rimanere la stessa; ma perchè alcune costruzioni non imbarazzino la figura entro lo spazio $X\,o'\,o''\,Y$ si potrà anch'essa abbassare di quanto ne aggrada. Prendiamo, per esempio, la base stessa $X\,Y$ del quadro per linea ausiliaria d'orizzonte, lo che equivale a supporre che l'occhio dello spettatore siasi abbassato di tutta la quantità $P\,P_1$: allora la retta $X_2\,P_1$ sarà la nuova scala di fuga, la $P_1\,F_1 = F\,P$ eguale alla $o\,p$ della *Fig.* 57 darà il punto di fuga, e dalla $P_1\,G_1 = P\,G$ eguale alla $x\,p$ della stessa *Fig.* 57 avremo la corrispondente scala di larghezza $O_1\,X'_2$.

Si compiano adesso col solito metodo le costruzioni necessarie per determinare la prospettiva a_2 del punto a (*Fig.* 57); sarà facile il provare che le prospettive a_2, n_4 si devono trovare respettivamente colle loro corrispondenti a_1, a_3 sopra una medesima perpendicolare alla $X\,Y$.

Abbiamo infatti a cagione di $F\,P = F_1\,P_1$ e di $X\,f = X_2\,f_1$ immediatamente la proporzione

$$F\,a_2 : a_2\,f :: F_1\,a_4 : a_4\,f_1$$

dunque la retta $a_2\,a_4$ è parallela ad $F\,F_1$ ed $f\,f_1$, e per conseguenza perpendicolare ad $X\,Y$.

Ora a cagione di $P\,G = P_1\,G_1$ e di $P\,h = P_1\,h_1$ e della conseguente relazione

$$P\,O : P\,a_2 :: P_1\,O_1 : P_1\,a_3$$

si trova pure

$$O\,b : n_2\,a_1 :: O_1\,b_1 : n_4\,a_4$$

ma si ha $O\,b = O_1\,b_1$; dunque sarà ancora $n_4\,a_3 = n_2\,n_1$

Lo che dimostra che la retta $a_1\,a_3$ è parallela ad $a_2\,a_4$ e per conseguenza perpendicolare ad $X\,Y$.

Si comprende facilmente come questa prospettiva ausiliaria del punto possa anche determinarsi al di sopra della linea d'orizzonte; basterebbe perciò supporre trasportato il piano

orizzontale che passa per $X\,Y$ parallelamente a sè stesso al di sopra di quella linea.

184. Colle operazioni precedenti verrebbero ad eliminarsi dal quadro tutte le linee che servono alla costruzione del punto a_1. Ma per ottenere la prospettiva richiesta saremmo sempre costretti a conservare sopra di esso almeno le due scale di fuga e di altezza. Imperocchè se abbisognasse nella prospettiva generale dell'oggetto anche il punto a_1, sarebbe necessario elevare da a_4 una verticale fino all'incontro in a_2 colla scala di fuga, per tirare da quest'ultimo punto una parallela ad $X\,Y$ fino all'incontro in a_1 colla verticale del punto a_3; e se fosse unicamente questione della prospettiva del punto isolato (n, a^0, (*Fig.* 57), farebbe mestieri riportare sulla scala di altezza a partire da O la distanza che separa il punto dato dal piano orizzontale, per avere la retta $P\,a'_2$; determinare quindi su di essa il punto a'_1 mediante la verticale del punto a_4, e finalmente condurre la orizzontale $a'_2\,a'_1$ e la verticale $a_2\,a'_1$ dalle quali resulta la prospettiva a'_1.

È facile però trovare il mezzo di eliminare dal quadro anche queste ultime costruzioni, e tutto ridurle all'unica linea $a_3\,a_1\,n'_1$.

Si immagini condotto pel bordo verticale $X\,U$ del quadro un piano qualunque. Esso taglierà il piano orizzontale che passa per $X_2\,Y_2$ secondo una certa linea, la cui prospettiva dovrà concorrere in X_1 e che potremo supporre essere $X\,X_1$. Immaginando poi che il piano orizzontale ausiliario $X_2\,Y_2$ torni a passare per $X\,Y$, e la linea d'orizzonte a coincidere con $o'\,o''$, egli è certo che X_1 verrà a trovarsi in X'_1 ed X in o'; onde il piano verticale considerato taglierà il piano orizzontale che passa per la base del quadro secondo un'altra linea avente per prospettiva $X'_1\,o'$.

Consideriamo ora la retta $n_4\,a_3$ come prospettiva della traccia orizzontale di un piano verticale parallelo al quadro. Questo piano taglierà evidentemente il piano $X_1\,X\,U$ secondo la verticale $e\,e'$, e il piano orizzontale che passa per la base del quadro secondo una parallela a questa base che passa per c'. Onde la verticale del punto a_3 taglierà quella parallela in a_1 che sarà prospettiva di a (*Fig.* 57).

Anche la scala di larghezza ausiliaria $O_1\,b_1$ può consi-

derarsi come prospettiva della traccia orizzontale di un piano verticale parallelo al quadro; piano che taglierà l'altro X_1 X U secondo la verticale d d' Z', e conseguentemente quello orizzontale che passa per X F secondo una retta parallela ad X F e che dovrà passare per O.

Da ciò segue che il prolungamento d' Z' della d d' può considerarsi come una scala di altezza ausiliaria.

Talchè riportando su di essa, a partire da d' la distanza d' d'' del punto dato dal coordinato orizzontale, e tirando o' d'' sarà questa una retta parallela ad o X''_1 di cui tutti i punti si troveranno distanti dal piano orizzontale che passa per la base del quadro della quantità d' d''. Per la qual cosa il prolungamento c' c'' della verticale c c' essendo prospetticamente eguale a d' d'' si troverà col punto a'_1 sulla medesima parallela ad X F.

È indifferente condurre il piano verticale contenente la scala ausiliaria di altezza per l'uno o per l'altro bordo verticale del quadro. La *Fig* 58 contiene anche le linee esprimenti questo piano condotto per il bordo F T, e le altre che analogamente alle precedenti somministrano sul quadro i due punti a_1 ed a'_1.

185. Da ciò che precede può frattanto dedursi, che allorquando non si voglia imbarazzare il quadro con tutte le costruzioni occorrenti per la prospettiva d' un' oggetto dato, o meglio, allorchè le dimensioni del piano su cui si disegna lo concedono, la prospettiva d'un punto qualunque (n, a'), (*Fig.* 57), dell' oggetto si otterrà colla seguente

Regola generale. — Scelto il piano orizzontale ausiliario X_2 F_2 (*Fig.* 58), si costruirà col noto metodo la prospettiva n_1 della proiezione orizzontale del punto. Quindi determineremo a piacere con una retta X X_1 o F_2 F_3 la posizione del piano verticale che deve contenere la scala d'altezza, e si costruirà la sua intersezione F V col piano orizzontale che passa per la base del quadro. Prolungheremo in seguito la scala di larghezza O_1 F'_3 fino all'incontro d_1 con F_2 V_3, e la verticale d_1 Z'_1 sarà la scala ausiliaria di altezza. Allora per avere la prospettiva cercata si opererà così:

1.° A partire dal punto d'_1 in cui la scala di altezza incontra la F V si riporterà su di essa la distanza

d'_1 d''_1 del punto dato del coordinato orizzontale, e si tirerà la V d''_1.

2.° Si prolungherà n_1 n_2 fino al suo incontro c_1 con V_1 V_2 e si eleverà la verticale indefinita c_1 c''_1.

3.° Dal punto c''_1 in cui questa verticale incontra la V d''_1 si tirerà una parallela alla linea d'orizzonte e il punto in cui questa incontrerà la verticale del punto o_2 sarà la prospettiva domandata.

Quando poi occorresse di avere anche la prospettiva della proiezione orizzontale del punto dato, non avremo da fare altro, per determinarla, che condurre dal punto c'_1 in cui la verticale indefinita c_1 c''_1 incontra la V V una parallela alla linea d'orizzonte, e il punto n_1 nel quale essa verrà incontrata dalla verticale del punto n_2 sarà la prospettiva di quella proiezione

---

CAPO IV.

Divisione delle linee, e punti di concorso fuori del quadro.

186 Dalle cose esposte nei numeri precedenti può rilevarsi essere completamente risoluto il Problema di Prospettiva lineare sopra un quadro piano e verticale. Imperocchè il metodo generale spiegato al N.° 174, la dimostrata possibilità di fare tutte le costruzioni al di fuori del quadro, la conveniente applicazione dei principii altrove stabiliti, costituiscono pel disegnatore una serie di cognizioni che generalmente parlando ponno essergli sufficienti per costruire la prospettiva di un corpo qualunque.

Se riflettesi però quanto laboriosa può riescire l'applicazione del metodo generale per tutti i punti d'un oggetto che sia alquanto complesso, e particolarmente poi nei casi in cui per la posizione delle linee di esso rispetto al quadro non

esiste su quest' ultimo il punto di concorso della loro prospettiva, si comprenderà facilmente quanta utilità sia per arrecare al disegnatore la cognizione dei problemi particolari che la esperienza ha dimostrato incontrarsi più di frequente, e la cui soluzione dispensa dall' impiego del metodo generale medesimo.

I principali e i più importanti ad un tempo sono i problemi che han per oggetto la divisione delle linee rette, e la costruzione della prospettiva di rette parallele nel caso in cui i punti di concorso si trovano a gran distanza al di là dei bordi verticali del quadro.

Ve ne sono altri poi dei quali la soluzione resulta estremamente semplice in grazia dell' uso delle linee inclinate di 45° al quadro, o del quadrato avente i lati paralleli e perpendicolari al quadro.

Daremo ora la soluzione dei primi, e riserberemo quella degli ultimi al Capo seguente.

Problema I. *Data la prospettiva di una retta orizzontale determinare su questa le prospettive di punti egualmente distanti.* (*Fig.* 59.)

187. Primo caso. — Sia indefinita la retta data ed abbia per prospettiva $A\ B$.

Determineremo col metodo generale la prospettiva a di un punto di divisione; quindi si condurrà una indefinita $A\ m$ parallela alla linea d' orizzonte $o'\ o''$, e scelto su questa un punto qualunque c, tireremo $c\ a$ che determinerà sopra $A\ m$ il punto a_1. La parte $A\ a_1$ si riporterà quante volte si può sopra $A\ m$, e le rette $b_1\ e$, $d_1\ e$, $e_1\ e$, ... condotte per i punti di divisione somministreranno sulla prospettiva data i segmenti $a\ b$, $b\ d$, $d\ e$, che saranno prospetticamente eguali ad $A\ a$

Poichè le rette $A\ c$, $a_1\ c$, $b_1\ e$, $d_1\ e$, . . . essendo parallele fra loro, le due rette $A\ e$, $A\ e_1$ rimangono divise in parti proporzionali; ma quelle della retta $A\ e_1$ sono eguali fra loro, dunque saranno pure tali anche le parti in cui è divisa la $A\ e$.

Dovendo continuare la divisione della retta $A\ B$ si può

anche mutare il punto di concorso delle parallele ausiliarie, se giova all'esattezza del disegno. Così scelto un altro punto c' sopra o' o'', basterà condurre per due dei punti d ed e già determinati le rette d c', e c', e poi una parallela d k ad o' o''; la parte d e, si riporterà su quest'ultima quante volte si può, e si continuerà l'operazione come sopra.

Invece della orizzontale d k avremmo potuto condurne un'altra qualunque i l: allora sarebbe stato il segmento d' e', che a partire da d', avrebbe dovuto riportarsi sopra l i.

Secondo caso. — Sia la retta data di lunghezza finita, ed abbia per prospettiva C D.

Per uno dei suoi estremi C condurremo la C l parallela ad o' o'' e sopra di essa riporteremo a partire da C una lunghezza arbitraria C a tante volte quanti sono i punti equidistanti che si vogliono determinare sopra C D, l'altro estremo compreso. Uniremo con D l'ultimo punto di divisione h trovato sopra C l, e prolungheremo D h fino al suo incontro c'' colla linea d'orizzonte: le congiungenti il punto c'' coi diversi punti a, b, d . . . . della C l taglieranno la C D nei punti cercati.

188. *Osservazione.* — La operazione indicata in questo secondo caso serve evidentemente alla divisione di una retta orizzontale in due o più parti eguali.

Problema II. *Determinare sulla prospettiva d'una retta orizzontale dei segmenti eguali ed equidistanti fra loro.* (*Fig.* 60.)

189. Primo caso. — Sia indefinita la retta ed abbia per prospettiva A B.

Se dal punto A deve cominciare la sua divisione, determineremo prima sopra A B col metodo generale i punti a e b i quali insieme con A stabiliscono la distanza prospettica A a dei segmenti, e la dimensione a b di essi. Di poi condotta per A una parallela A m alla linea d'orizzonte o' o'', congiungeremo a e b con un punto c di essa; le rette che ne resultano determineranno sopra A m le parti A a_1, a_1 b_1 che riportate successivamente in b_1 d_1, d_1 e_1, e_1 f_1 . . . . som-

ministreranno sopra $A\ B$ le prospettive richieste, in grazia delle congiungenti $c\ d_1$, $c\ e_1$, $c\ f_1$ . . .

Si può continuare questa operazione, anche variando punto di concorso se occorre. A tale oggetto si condurranno per tre punti consecutivi d, e, f altrettante rette concorrenti in un' altro punto c' della linea d' orizzonte, a cui tireremo poi la parallela $d'\ k'$, per riportare su questa a partire da f' i segmenti consecutivi $d'\ e'$, $e'\ f'$ ed operare in seguito come precedentemente.

Quando esiste sul quadro il punto di concorso della prospettiva data $A\ B$, si può operare anche nel modo seguente, dopo aver determinato sopra la orizzontale $B_1\ m_1$ i due punti a_1 e b_1. Si condurranno per questi punti le due rette $a_1\ A_1$ ed $b_1\ A_1$ al punto di concorso A_1 della retta data; si tirerà dal punto r in cui la $b_1\ c_1$ incontra la $A_1\ B_1$ una parallela ad $o'\ o''$, si congiungeranno i punti r' ed r'' con c, e si avranno determinati sopra $A_1\ B_1$ altri punti dei segmenti richiesti. Una terza orizzontale condotta per a darà il mezzo di ripetere questa costruzione, che si rinnuoverà ancora finchè occorra.

Secondo caso. — Sia la retta data di lunghezza finita, ed abbia per prospettiva $C_1\ D_1$.

Conosceremo in questo caso quanti devono essere i segmenti da determinarsi sopra di essa. Supponiamo che siano quattro a cominciare da C_1: tireremo la indefinita $C_1\ l_1$ parallela ad $o'\ o''$ per questo punto; riporteremo su questa parallela le grandezze dei segmenti conservando fra di loro la equidistanza data, e trovato così l' estremo h_1 dell' ultimo segmento, lo congiungeremo con D_1 prolungando la retta $h_1\ D_1$ fino all' incontro colla linea d' orizzonte in c''; di poi uniremo c'' coi punti di divisione della $C_1\ l_1$, ed otterremo divisa la retta $C_1\ D_1$ nelle parti richieste.

Quando non vi sia spazio sufficiente nel foglio per riportare sulla $C_1\ l_1$ la grandezza di tutti i segmenti colle loro equidistanze, bisognerà determinare col metodo generale presso l' estremo D_1 della retta due punti di divisione t, x; condurre per D_1 una parallela ad $o'\ o''$, e scelto su quest' ultimo un conveniente punto di concorso c'' congiungerlo con D_1, t, x. Le parti $D_1\ t_1$, $t_1\ x_1$ così determinate sopra la orizzontale

D_1 m_1 saranno sufficienti per somministrare la rimanente divisione della retta data.

190. *Osservazione I.* — La divisione della prospettiva di una retta in parti proporzionali a più rette date si otterrà evidentemente colla soluzione sopra indicata.

191. *Osservazione II.* — Il Problema precedente si presenta frequentemente nel costruire la prospettiva dei monumenti architettonici. Tutte le volte che si abbia un portico sorretto da colonne o da pilastri, la facciata di un edifizio, l'interno di una chiesa troveremo sempre delle linee che bisogna dividere prospetticamente in segmenti eguali equidistanti fra loro

Anzi non è infrequente in simili circostanze il caso di due rette concorrenti di diversa lunghezza, e che debbono essere divise in segmenti eguali posti ad eguale distanza sull'una e sull'altra.

La *Fig.* 61 mostra questo caso: le rette in questione sono $A\ B$, $A\ C$; la prima deve contenere cinque segmenti a quattro equidistanze, la seconda tre segmenti a due equidistanze. Per il punto comune A si conduce una verticale $A\ l$, ed una parallela $m\ A\ n$ alla linea d'orizzonte $o'\ o''$. Si riportano sulla verticale i cinque segmenti separati dalle quattro equidistanze; presi sulle linee d'orizzonte due punti di concorso c, c' si determinano sulla indefinita $m\ A\ n$ le parti A m, $A\ n$ mediante le congiungenti B m c, $C\ n\ c'$; si unisce p con m e q con n; e per mezzo di rette respettivamente parallele a $p\ m$ e $q\ n$ condotte per gli altri punti di divisione della $A\ l$ si dividono le rette $A\ m$, $A\ n$ in parti proporzionali a quella in cui è divisa la verticale $A\ p$, e la sua parte $A\ q$. Congiunti in fine i punti di divisione di $A\ m$ con c, e quelli di $A\ n$ con c' e prolungando le congiungenti fino ad incontrare le rette date $A\ B$ e $A\ C$ otterremo queste ultime divise nel modo richiesto

192. *Osservazione III.* — Le indicate soluzioni dei precedenti Problemi non suppongono altra condizione nella retta data che quella di essere orizzontale. Talmente che rimangono le stesse qualunque sia il piano orizzontale su cui la obiettiva si trova.

Quando fosse proposta la divisione prospettica d'una

retta non orizzontale e comunque inclinata sul piano del quadro, si potrà eseguire prima la divisione richiesta sopra la prospettiva della sua proiezione orizzontale, e si otterrà poi quella della retta data elevando dai punti di divisione della prima altrettante verticali fino all'incontro della seconda.

Problema III. *Data la prospettiva A B d'una retta orizzontale, il cui punto di concorso sulla linea d'orizzonte o' o'' non può trovarsi, costruire la prospettiva d'una retta parallela condotta per il punto, la cui prospettiva è M* (*Fig.* 62.)

193. Primo metodo. — Si condurrà per M una retta qualunque M A, e per B una parallela B c fino alla linea d'orizzonte; si congiungerà o con A e con M; si tirerà per B una parallela ad o' o'', e dal punto f in cui interseca la A c una parallela ad M A: dal punto g in cui quest'ultima incontra M c una parallela ad o' o'', la quale determinerà sopra B c il punto m; e la M m sarà la prospettiva della parallela richiesta.

Poichè la figura M A f g è prospettiva d'un parallelogrammo, per cui f g è prospetticamente eguale ad M A: ma f g m B è pure un parallelogrammo, dunque B m parallela ad A M, è anche prospetticamente eguale ad essa; ciò che basta a dimostrare essere M m prospettiva di una retta parallela a quella rappresentata da A B.

Secondo metodo. — Più semplicemente può risolversi questo problema operando come segue.

Conducasi pel punto dato M una perpendicolare M p alla linea d'orizzonte, ed una perpendicolare q M sulla prospettiva A B. Si unisca il punto q, in cui quest'ultima incontra la linea d'orizzonte, col punto A in cui la A B è incontrata dalla verticale M p: la perpendicolare M m condotta da M sulla retta q A sarà prospettiva della parallela domandata.

Poichè se considerasi il triangolo che verrebbe formato da q A ed A B, e dalla parte della linea d'orizzonte compresa fra q e il punto di concorso di A B, si vedrà immediatamente che le rette q r, A p, M m sono le sue tre

altezze e che per conseguenza M m dovrà concorrere con A B nello stesso punto della retta o' o''.

Problema IV. *Data la prospettiva A B di una retta orizzontale di cui non può trovarsi il punto di concorso, e date le prospettive di più punti; costruire le prospettive di altrettante rette per questi condotte parallelamente alla retta data* (*Fig.* 64, e 65.)

194. Primo caso. — Si trovino i punti dati sopra una orizzontale parallela alla linea d'orizzonte o' o'', ed abbiano per prospettive a, d, f... (*Fig.* 64)

Si prolungherà questa orizzontale fino ad incontrare in m la prospettiva data A B, e scelto un punto di concorso c sopra o' o'' si uniranno con esso m, a, d, f . . . . . Di poi condurremo una parallela r s ad o' o'', ed i segmenti su questa determinati dalle concorrenti in c, vale a dire, s t, t u, u v . . . si riporteranno in s_1 t_1, t_1 u_1, u_1 v_1 . . . a partire dal punto s_1 in cui la orizzontale r s incontra A B. Allora le rette a t_1, d u_1, f v_1 . . . . saranno le prospettive domandate.

Poichè a cagione delle parallele m c, a c, d c, f c. le rette s t, t u, u v . . . . sono respettivamente eguali ad m a, a d, d f . . . quindi ciascuna delle figure m s_1 t_1 a, a t_1 u_1 d, d u_1 v_1 f . . . . è prospettiva di un quadrilatero avente due lati opposti eguali e paralleli, che è quanto dire, di un parallelogrammo.

Secondo caso. — Sieno i punti in questione collocati sopra una retta orizzontale qualunque, ed abbiano per prospettive a_1, d_1, f_1 (*Fig.* 65.)

Scelto convenientemente un punto di concorso o' sulla linea d'orizzonte o' o'', si congiungerà con un punto qualunque A della prospettiva data A B e con tutti gli altri punti dati a_1, d_1, f_1. Si condurrà poi una parallela qualunque m m_1 ad o' o'', e pei punti nei quali la A B e la A o' sono incontrate da m m_1 tireremo due parallele m p, m_1 p_1 alla prospettiva della retta sulla quale si trovano i punti dati; dai punti n_1, r_1, s_1, in cui la m_1 p_1 è incontrata dalle concorrenti in o' si tireranno altrettante parallele ad o' o'', e i punti

in cui queste ultime incontreranno la m p apparterranno alle prospettive richieste, che saranno a_1 n, d_1 r, f_1 s.

195. *Osservazione.* — Questo metodo è l' applicazione di quello usato al N.° 193. (*Fig.* 62).

Si potrebbe invece applicare la seconda soluzione indicata nel citato numero (*Fig.* 63), e si otterrebbe la seconda delle *Fig.* 64. Ma si scorge facilmente che, la costruzione delle perpendicolari essendo meno spedita di quella delle parallele impiegate nell' attuale soluzione, converrà ordinariamente usare questa ultima salvo il caso nel quale i punti dati non si trovino sopra una medesima linea retta.

PROBLEMA V. *Data una retta non orizzontale nè parallela al quadro, trovare su questo il punto di concorso del sistema di rette parallele alla retta data.* (*Fig.* 66.)

196. Sia l o l' l'angolo ottico, x y la proiezione del quadro, x z la scala di fuga che coi abbiamo detto (N.° 174) potersi assumere come traccia del coordinato verticale, (n b, n' b') la retta data, o la proiezione del punto di vista.

Cambiamo il coordinato verticale in un altro piano verticale x' z' parallelo al quadro; abbattiamo questo piano al di sopra di x' z', e dalla medesima parte supponiamo abbattuto il piano del quadro.

La proiezione verticale della retta sarà n'' b'' (*Geometria Descrittiva*); e se immaginiamo che la linea d'orizzonte si abbatta in o' o'', sarà P il punto principale del quadro.

Abbiamo già dimostrato, (N.° 142), che il punto di concorso delle prospettive d' un sistema qualunque di rette parallele si trova conducendo pel punto di vista una retta parallela alle rette date, e costruendo il punto d' incontro di essa col quadro. Se conduciamo dunque per o la o s parallela ad n b, sarà questa la proiezione orizzontale della retta in questione, e se conduciamo per P la P s' parallela ad a'' b'' ne avremo la proiezione verticale sul quadro. Ora il piano proiettante orizzontale la retta (o s, P s') taglia il piano del quadro secondo la verticale s s', il punto d' incontro di quella retta col quadro deve necessariamente trovarsi su quelle verti-

cale; dunque il punto s' in cui la $P\,s'$ incontra questa ultima sarà il punto di concorso cercato

197. *Osservazione I.* — Il punto s è la proiezione sul prolungamento della base del quadro, del punto in cui concorrono le prospettive delle proiezioni orizzontali di tutte le rette costituenti il sistema dato. Quindi o'' punto d'incontro della verticale di s colla linea d'orizzonte sarà questo punto di concorso. La prospettiva del punto s sulla base del quadro o sul suo prolungamento si troverà col metodo generale del N.° 174.

198. *Osservazione II.* — Essendo $P\,s'$ parallela ad $a''\,b''$, possiamo dedurne la regola seguente:

Il punto di concorso delle prospettive di un sistema di rette non orizzontali nè parallele al quadro si trova sopra la verticale condotta pel punto di concorso delle proiezioni orizzontali delle rette medesime, ed alla intersezione di questa verticale con una retta condotta pel punto principale parallela alla proiezione di una delle rette date fatta sopra un piano parallelo a quello del quadro

199. *Osservazione III.* — Il punto di concorso s' può trovarsi anche al di sopra della linea d'orizzonte siccome avviene nella *Fig.* 67

In pratica può convenire di determinarlo direttamente tutte le volte che dentro i limiti del quadro o del foglio su cui si opera si trovi la prospettiva del punto s. E quando ciò avviene si vede facilmente dalla posizione che il punto s medesimo occuperà sul piano della proiezione orizzontale dell'oggetto.

Non volendo però costruire la proiezione ausiliaria $a''\,b''$ di una delle rette, basterà costruire la prospettiva di due dei suoi punti, e prolungare la retta che questi congiunge fino ad incontrare la verticale del punto s.

Problema VI. *Data la prospettiva di un punto e quella di una retta non orizzontale, ma comunque inclinata al quadro, costruire la prospettiva d'una seconda retta che passi pel punto dato e sia parallela alla retta data, nel caso in cui il punto di concorso del sistema di rette al quale quest' ultimo appartiene si trovi a grande distanza dai bordi verticali del quadro.* (*Fig.* 68)

200. Sia o' o'' la linea d'orizzonte, A' B' la prospettiva della retta data, M' quella del punto. Suppongasi che A B sia la prospettiva della proiezione orizzontale della retta, ed M quella della proiezione orizzontale del punto.

È noto (N.° 197) che la prospettiva della proiezione orizzontale della retta cercata dovrà passare per M e concorrere nello stesso punto della linea d'orizzonte con A B. Ripetendo quindi la soluzione del Problema proposto al N.° 193 troveremo il punto m che determinerà la prospettiva M m della proiezione orizzontale della retta richiesta. Si unisca m col punto c nel quale la linea d'orizzonte è incontrata dal prolungamento di A M, si prolunghi A' M' fino ad incontrare la verticale del punto c in c'. sarà A' c' la prospettiva di una retta condotta per il punto dato e che si appoggia sulla retta data. Si prolunghi c m fino in n, si proietti n in n' sopra A' B', e la retta n' c' sarà la prospettiva d'una retta parallela ad A' c', e perciò situata sul piano determinato dalla retta e dal punto dato, e di cui la proiezione orizzontale ha per prospettiva c n. Tiriamo da m una verticale fino ad incontrare la c' n' in m', e la retta M' m' sarà la prospettiva domandata.

Poichè la figura A M m n è evidentemente la prospettiva di un parallelogrammo; quindi rappresenterà necessariamente un parallelogrammo anche la figura A' M' m' n' di cui i due lati A M', n' m' sono prospettive di rette parallele.

201. *Osservazione.* — Se invece di una si dovessero costruire le prospettive di più rette parallele condotte per più punti dati, dovremmo risolvere il Problema esposto in uno dei N.i 194 e seguenti rispetto alla proiezione orizzontale dei

punti e della retta data, e ripetere poi per ciascun punto l'operazione precedentemente indicata.

Problema VII. *La prospettiva di un punto essendo nota, costruire quella d'una retta orizzontale inclinata di 45° al quadro e che passa pel punto dato* (*Fig.* 69.)

202. Sia o' o'' la linea d'orizzonte, P il punto principale, m la prospettiva data.

Quantunque debba supporsi che il punto di distanza non esista entro i limiti del quadro o del foglio su cui si disegna, che altrimenti la questione proposta perderebbe il carattere di Problema dopo ciò che sappiamo (N.° 150), pure dovendo esser nota la distanza del punto di vista al quadro, noi determineremo sulla o' o'' il punto di fuga F per modo che P F resulti una parte aliquota di quella distanza, per esempio, la quarta parte.

Di poi condurremo una indefinita m n parallela ad o' o'', e presa su questa a partire da m quattro parti eguali, di cui l'ultima sia f n, congiungeremo f con F ed n con P; e il punto n' in cui si incontrano le due rette P n, F f apparterrà alla prospettiva richiesta.

Poichè detta X la distanza del punto P da quello in cui la linea d'orizzonte o' o'' sarebbe incontrata dalla retta m n' prolungata, i triangoli simili n f n', n F P; e i triangoli n n' m, e l'altro formato dalle rette n' P, X, e dal prolungamento di m n', che sono pure simili, danno evidentemente la proporzione:

$$n\,f : n\,m :: P\,F : X$$

da cui desumesi essere X eguale a 4 volte la distanza P F, e che per conseguenza la retta m n' va ad incontrare la o' o'' nel punto di distanza.

203. *Osservazione.* — Se la retta domandata dovesse concorrere alla destra del punto principale bisognerebbe tirare la parallela alla linea d'orizzonte alla destra del punto m; e dopo aver riportato sopra di essa quattro volte una lunghezza arbitraria da m in n_1, si dovrebbe riportare un'altra volta sul suo prolungamento da n_1 in f_1.

Congiunto quindi P con n_1 ed F con f_1 l'incontro di que-

sta due rette farebbe conoscere il punto n'_1 pel quale passa la retta cercata, siccome è facile a dimostrarsi.

204. Applicazione I. — La soluzione del problema precedente offre un mezzo semplice per costruire le prospettiva dei quadreti, allorchè i lati di questi sono paralleli e perpendicolari al quadro; poichè la diagonale loro si troverà inclinata di 45° su questo.

Sia $a\ b$ (*Fig* 69) la prospettiva di quel lato parallelo alla base del quadro che è più lontano dalla linea d'orizzonte; la distanza del punto di vista essendo sempre eguale a $4\ P\ F$ basterà dividere $a\ b$ in quattro parti eguali, ed $a\ g$ essendo una di queste parti, condurre le rette $a\ P$, $g\ F$: il loro punto comune d sarà la prospettiva d'un vertice del quadreto, e la $d\ c$ parallela ad $o'\ o''$ insieme con le $P\ b$ completeranno il quadrilatero $a\ b\ c\ d$ prospettiva del quadrato in questione.

205. *Osservazione I.* — Se il lato dato si trovasse al di sopra della linea d'orizzonta, come vedesi in $a_1\ b_1$, la medesima costruzione somministrerebbe nel quadrilatero $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ la prospettiva domandata.

206. *Osservazione II.* — Potrebbe avvenire che fosse cognita la prospettiva del lato più vicino alla linea d'orizzonte. Supposto che fossa, per esempio $a_2\ b_2$, bisognerebbe dividere questa retta in quattro parti eguali, e riportare una di esse sul prolungamento di $b_2\ a_2$ in $a_2\ a'_2$. Allora le due rette $F\ a'_2$, $P\ a_2$ incontrandosi in d, somministreranno un vertice della prospettiva cercata, che verrà determinata dalla parallela alla linea d'orizzonta tirata per d_2 e dalle congiungenti il punto principale P con b_2.

207. Applicazione II. — *Costruire la prospettiva di un pavimento composto di quadrati ancati i lati paralleli e perpendicolari al quadro* (*Fig.* 70).

Sia $X\ Y\ T\ U$ il quadro, $o'\ o''$ la linea d'orizzonte, P il punto principale, F il punto di fuga, $F\ P$ eguale alla quinta parte della distanza del punto di vista al quadro.

Suppongasi inoltre che sia stato determinato sulla base del quadro il lato $a\ b$ d'uno dei quadrati del pavimento. Riporteremo queste lunghezze a sinistra e a destra sopra $X\ Y$ quante volte si potrà in $a\ f$, $a\ b$, $b\ c$, $c\ d$, $d\ e$, e congiungeremo i punti f, a, b, c, d, e con P: su queste rette si troveranno

evidentemente le prospettive dei lati dei quadrati che sono perpendicolari al quadro

I lati dei medesimi quadrati che sono paralleli al quadro avranno le loro prospettive sopra rette parallele ad *X F*, di ciascuna delle quali sarà un punto determinato dalla intersezione della prospettiva di una retta inclinata di 45° sul quadro con le rette concorrenti al punto *P*. Per avere la prospettiva della inclinata di 45° possiamo servirci della linea *f* e già divisa in cinque parti eguali: congiungeremo perciò *n* con *P* ed *f* con *F*, e la *e g* sarà la retta esteriore che somministrerà su ciascuna delle concorrenti in *P* un punto delle cercate parallele ad *X Y*.

Se al disopra della retta *h g l* ultima di quelle così determinate dovesse costruirsi la prospettiva d'un'altra porzione di pavimento, basterebbe condurre *k F*, ed unire *m* con *i*. La *m i* taglierà ancora le concorrenti in *P* in altri punti pei quali passeranno le linee parallele ad *X Y* su cui si trovano le prospettive dei lati paralleli al quadro.

Al di là e al di quà delle due estreme *P f*, *P e* si possono avere le linee contenenti le prospettive dei lati perpendicolari al quadro, riportando sull'ultima *m n* alla sinistra di *m* e alla destra di *n* il segmento *n o* quante volte è possibile, e congiungendo con *P* i punti di divisione.

208. Applicazione III. — *Costruire la prospettiva di più quadrati concentrici aventi i lati paralleli e perpendicolari al quadro* (*Fig.* 70.)

Essendo *A B* il lato parallelo al quadro del quadrato più grande, e *P F* eguale al quinto del raggio principale, divideremo *A B* in cinque parti eguali, ed *A* n essendo una di queste parti, tireremo le rette *a F*, *A P* e compiremo il quadrilatero *A B C D*. Allora le diagonali *A C*, *B D* conterranno i vertici dei quadrati concentrici, le cui prospettive potranno costruirsi immediatamente appena sieno quelli determinati sulla metà d'una sola diagonale.

CAPO V.

Una dei quadrata avente i lati paralleli e perpendicolari al quadro.

209. La prospettiva del quadrato i cui lati sono paralleli e perpendicolari al quadro ottenendosi, come abbiam visto, con somma facilità, è sorta naturalmente l'idea d'impiegarla in tutti quei casi, nei quali può il quadrato stesso circoscriversi alle figure piane di cui si cerca la prospettiva.

Con qual vantaggio essa venga impiegata in questi casi noi siamo per dimostrare nei Problemi seguenti; in alcuni dei quali abbiamo voluto usare anche un metodo speciale, quello degli abbattimenti, quantunque i problemi risoluti nel Capo precedente offrissero modo di ottenere per altra via la soluzione, siccome facilmente si accorgerà.

Problema I. *Data la prospettiva di un punto costruire quella di una orizzontale condotta per il punto dato e facente un' angolo α col quadro (Fig. 74).*

210. Sia m la prospettiva data, P il punto principale, ed F quello di fuga.

Tirando $m\,n$ parallela alla linea d'orizzonte, si costruirà su questa retta col metodo del N.° 204 la prospettiva $m\,n\,d\,e$ di un quadrato avente i suoi lati paralleli e perpendicolari al quadro. Di poi riflettendo che il quadrilatero $m\,a\,d\,e$ è la sezione fatta dal quadro nella piramide avente il vertice nel punto di vista e per base il quadrato suddetto, e che un piano orizzontale condotto per d e taglierebbe questa piramide secondo un quadrato simile al precedente ed avente $d\,e$ per lato; se immaginiamo che quest'ultimo si abbatta sul piano

del quadro in *d* e *E G*, la retta *E n* che fa con *E G* l'angolo α sarà quella richiesta: e siccome incontra il quadro in *n*, la sua prospettiva sarà *m n*.

211. *Osservazione.* — Quando il punto *n* si trovi fuori del quadro, possiamo profittare del punto *i*, in cui la *E n* incontra la diagonale del quadrato. La prospettiva di i si trova in *i''* sopra *a* e prospettiva della diagonale e sopra *i' P* prospettiva della *i i'* perpendicolare al quadro; per cui la *m i''* passerà pure per *n*

Problema II. *Data la prospettiva m n d' una retta orizzontale, costruire quella d' una seconda orizzontale condotta per m, ed inclinata sopra m n d' un angolo β (Fig 71.)*

212 La soluzione e analoga a quella del problema precedente: dopo aver costruito il quadrato *m a d e*, e l' abbattimento *E* del punto *m*, si troverà l' abbattimento *E n* della retta *m n*, o mediante il punto *n* o mediante il punto *i''* il cui abbattimento è *i*. Quindi si condurrà *E p* che faccia con *E n* l' angolo β; e se il punto *p* potrà determinarsi avremo subito la prospettiva cercata *m p*: altrimenti si costruirà sul lato *e E* un secondo quadrato *E e e H*, la cui diagonale *e H* avrà la sua prospettiva in *e b*, ed il punto o comune ad *e H* e ad *E p* servirà a determinare *o''* per cui deve passare la *m p*.

213. *Osservazione I.* — Le medesime costruzioni avranno luogo quando sia proposto di condurre per *m* una perpendicolare ad *m n*: o si debba dividere l' angolo *n m p* in parti eguali, o aventi fra loro un rapporto determinato.

214. *Osservazione II.* — Se il punto dato fosse fuori della retta data dovrebbe risolversi prima il problema del N.° 212 scegliendo un punto qualsivoglia della retta data; di poi se non esisterà sul quadro il punto di concorso di quest' ultima, si compirà la soluzione richiesta risolvendo pel punto dato il Problema del N.° 193

Problema III. *Data la prospettiva di una retta orizzontale comunque inclinata al quadro, costruire sopra di essa la prospettiva di un quadrato.*

215. Primo metodo. — Sia $a\ b$ la prospettiva data (*Fig.* 72), $o'\ o''$ la linea d'orizzonte, P il punto principale, $P\ F$ eguale al terzo della distanza del punto di vista al quadro.

Condurremo $a\ m$ parallela ad $o'\ o''$ e $P\ b$ prolungata fino alla retta $a\ m$. Costruiremo di poi la prospettiva $a\ m\ n\ p$ del quadrato avente $a\ m$ per lato ed abbatteremo il quadrato simile ad esso in $p\ n\ m_1\ a_1$. Il punto e in cui la retta $a\ b$ taglia la diagonale $p\ m$ si abbatterà in e_1 sopra $m_1\ p$, e quindi la retta $a_1\ e_1\ b_1$ potrà essere obiettiva di $a\ b$.

Ciò posto costruiscasi sopra $a_1\ b_1$ il quadrato $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ questo potrà essere l'obiettivo di quello di cui si cerca la prospettiva; e perciò osservando che il lato $a_1\ d$ incontra in d il quadro, sarà $a\ d$ la prospettiva di $a_1\ d_1$; il lato $b_1\ c_1$ incontrando in f il quadro la sua prospettiva si troverà sopra $b\ f$. Allora se per c_1 conducesi $c_1\ g$ perpendicolare al quadro, la sua prospettiva $g\ P$ incontrerà il prolungamento di $b\ f$ in un punto c, il quale sarà prospettiva del vertice c. Onde la prospettiva domandata sarà il quadrilatero $a\ b\ c\ d$.

Secondo metodo. — Quando non vogliasi imbarazzare la figura con soverchio numero di linee di costruzione, puossi operare siccome viene indicato nella *Fig.* 73, nella quale i dati e la prospettiva $a\ m\ n\ p$ del quadrato ausiliario sono identici ai precedenti.

Condurremo ad una distanza arbitraria dalla linea d'orizzonte $o'\ o''$ una retta $r\ s$ parallela ad essa; e considerandola come la traccia sul quadro di un piano orizzontale, saremo certi che questo taglierà la piramide avente per base il quadrato ausiliario secondo un quadrato simile $a_1\ m_1\ n_1\ p_1$ avente per lato $a_1\ m_1 = a'\ m'$, e che potremo costruire a parte.

Ciò posto si comprenderà facilmente che tirando la diagonale $p\ m$ e la retta $P\ e$, basterà riportare $m'\ e'$ da m_1 in e_2, condurre $e_2\ e_1$ perpendicolare ad $a_1\ m_1$, ed allora il punto e_1 in cui viene da questa ultima incontrato la diagonale $p_1\ m_1$ apparterrà al lato del quadrato simile a quello di cui deb-

biamo costruire la prospettiva. Questo lato sarà perciò $a_1 b_1$: costruiscasi su di esso il quadrato $a_1 b_1 c_1 d_1$; si riportino le lunghezze $n_1 f_1$, $n_1 c_1$, $n_1 d_1$ sopra $r s$ e respettivamente da m' in f', da m' in c', da m' in d', e si tirino le rette $P f'$, $P c'$, $P d'$ le quali serviranno a somministrare i punti f e d, e quindi il quarto vertice c della richiesta prospettiva $a b c d$.

PROBLEMA IV. *Trovare la prospettiva d'un esagono regolare* (*Fig.* 74.)

246. Sia $a b c d e f$ un' esagono regolare avente due lati $f e$, $b c$ perpendicolari alla base del quadro, o paralleli a due lati del quadrato $m n p q$ circoscritto al circolo in cui l'esagono è inscritto. In questo caso due soli vertici si troveranno sui lati del quadrato che sono paralleli alla base del quadro, e saranno le estremità del diametro perpendicolare a questa base. L'altro diametro parallelo ad essa non contiene alcun vertice dell'esagono, ma su ciascuno dei suoi prolungamenti si trovano i punti di concorso di due lati del poligono, la cui prospettiva potrà allora costruirsi nel modo seguente.

Si troverà la prospettiva $m' n' p' q'$ d'un quadrato, che supporremo circoscritto all'esagono nel modo suddetto. Le sue diagonali somministreranno il centro C', e quindi la retta $C' P$ darà le prospettive n', d' dei vertici che si trovano sul diametro perpendicolare al quadro.

Per determinare le prospettive degli altri quattro vertici immaginiamo, come al N.° 240, condotto per il lato $p' q'$ un piano orizzontale; questo produrrà nel cono avente per direttrice il circolo circoscritto all'esagono e nella piramide avente per base l'esagono stesso, due sezioni respettivamente simili al circolo e all'esagono; onde abbattendo questo piano sul quadro al di sopra di $p' q'$, il centro del circolo verrà in C_1 sulla $a' C_1$ perpendicolare ed eguale ad $a' p'$; gli archi descritti coi centri a' e C_1 e col medesimo raggio $a' C_1$ determineranno il punto b_2 e quindi l'abbattimento $a' b_2$ d'un lato dell'esagono; per cui tirando $b_2 k$ perpendicolare ad $a' p'$ e congiungendo k con P, sulla $P k$ c_1 dovranno trovarsi le prospettive del vertice b, e dell'altro che insieme con esso stà sulla medesima perpendicolare al quadro. Il lato $a' b_2$ e il suo omologo incontrano in l, la paral-

lela alla linea d' orizzonte condotta per C_1 ed avente per prospettiva la $l' C' h'$; la prospettiva di l_1 si trova in l' mediante la $P l_1$ prospettiva della perpendicolare al quadro $l_1 l_1$: talchè la retta $a' l'$, $d' l'$ somministreranno i vertici b', c'.

Gli altri due f', e' si troveranno facilmente prendendo $C' h' = C' l'$ e tirando $a' h'$, $d' h'$; di poi prendendo $m' e_1 = n' e_1$ e tirando $e_1 P$.

217. *Osservazione.* — Quando i lati dell' esagono non si trovassero nella posizione supposta rispetto alla base del quadro, sarebbe sempre possibile circoscrivere ad esso un quadrato coi lati paralleli e perpendicolari al quadro. E mediante l' abbattimento indicato, o con un processo analogo a quello del secondo metodo esposto al N.° 215 si potrà facilmente costruire la prospettiva richiesta.

PROBLEMA V. *Trovare la prospettiva dell' ottagono regolare* (*Fig.* 75.)

218. Consideriamo un' ottagono regolare qualunque $a b c d e g f h$. Al circolo $C a$, in cui esso è inscritto, circoscriviamo un quadrato $m n p q$, i cui lati sieno paralleli e perpendicolari alla base del quadro. Suppongasi che le diagonali d' un tal quadrato, le quali determinano sempre il centro del poligono, passino ciascuna per due dei suoi vertici: questi vertici si troveranno in tal caso due a due sopra una perpendicolare alla base del quadro, come su ciascun lato del quadrato si troverà uno degli altri quattro vertici, dei quali due saranno alle estremità di un diametro parallelo alla base del quadro e due a quelle di un diametro ad essa perpendicolare.

Ciò posto, per avere la prospettiva di questo ottagono basterà costruire: 1.° la prospettiva $m' n' p' q'$ del quadrato circoscritto; 2.° quella delle sue diagonali, che somministreranno la prospettiva C' del centro. In seguito la retta $C' P$ e la orizzontale $f' C' c'$ intersecheranno i lati del quadrilatero $m' n' p' q'$ nei punti a', e', f', c', prospettive di quattro vertici dell' ottagono.

Le prospettive degli altri quattro vertici si troveranno sulle diagonali $m' p'$, $n' q'$. Per determinarle, considereremo la figura richiesta come la prospettiva dell' ottagono inscritto nel

circolo avente per raggio $a' p'$, si abbatterà questo circolo sul piano del quadro al di sopra di $q' p'$, e sarà evidente che il centro verrà in C_1 sulla $a' C_1$ perpendicolare a $p' q'$ e ad una distanza da questo lato $a' C_1 = a' p'$; per cui $C_1 p'$ sarà una delle semidiagonali, ed $a' d_2$ un lato dell'ottagono. Ora abbassando dal punto d_2 la perpendicolare $d_2 k$, la retta $P k$ intersecherà le diagonali $m' p'$, $n' q'$ ne' punti b', d' prospettive di due dei vertici cercati. Presa finalmente $m' f'_1$ eguale ad $n' d'_1$ e condotta $f'_1 P$ si otterranno gli altri due vertici h' e g'.

219. *Osservazione.* — Se dopo aver costruito il quadrilatero $m' n' p' q'$ dividessimo il lato $m' n'$ in parti proporzionali a quelle in cui è diviso il lato $m n$ del quadrato circoscritto all'ottagono dalle rette parallele all'altro lato $n p$, si vedrebbe come indipendentemente dall'abbattimento fatto potrebbesi con eguale facilità determinare la prospettiva di questa figura.

Noteremo di più che ogni qualvolta i lati del quadrato, all'ottagono circoscritto nelle medesime condizioni espresse dalla figura, non riescissero paralleli e perpendicolari al quadro, converrà costruire la prospettiva del quadrato medesimo col metodo generale, per dividere poi coi processi superiormente indicati, due de' suoi lati opposti in parti proporzionali a quelle resultanti dal disegno della figura.

Questa osservazione può applicarsi all'esagono, e in generale a qualunque figura piana e regolare.

220. Applicazione — *Costruire la prospettiva di un pavimento composto di ottagoni regolari e di quadrati, disposti per modo che gli ottagoni abbiano due lati paralleli e due perpendicolari alla base del quadro* (*Fig.* 76.)

Sia $X Y T U$ il quadro, $o' o''$ la linea d'orizzonte, P il punto principale, $P F$ il terzo della distanza del punto di vista al quadro.

Se facciamo il disegno $M N R Q$ di una parte del pavimento proposto, è facile a vedersi che per i vertici di tutte le figure passano due sistemi di rette parallele fra loro delle quali le une sono parallele e le altre perpendicolari al quadro.

Di più si vede che trovata la prospettiva del sistema delle rette perpendicolari alla base del quadro, quella dell'altro sistema si avrà cercando l'incontro delle prime con la prospettiva di una retta $N S$ inclinata di 45° al quadro.

Ciò premesso, supponiamo che il disegno del pavimento sia fatto al di sotto della base XY del quadro, e che l'ottagono $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h$ abbia il suo lato $a\ b$ coincidente con $a'\ b'$ sulla XY. Proiettando su questa retta gli altri vertici in c_1 ed h_1 basterà condurre le rette $h_1\ P$, $a'\ P$, $b'\ P$, $c_1\ P$, e queste conterranno non solo la prospettive degli altri vertici dell'ottagono considerato, ma ancora quelle dei vertici degli ottagoni che stanno al di sotto di esso. Ora alla destra di $c_1\ P$ si riportino le distanze $c_1\ a'' = c_1\ b'$; $a''\ b'' = a'\ b'$; $b''\ c_2 = c_1\ b'$, e nuovamente la stesse distanze col medesimo ordine si riportino alla destra di $c_2\ P$, e lo stesso facciasi alla sinistra di $h_1\ P$ se occorre: quindi conducansi le rette $a''\ P$, $b''\ P$, $c_2\ P$, $a'''\ P$, $b'''\ P$, $c_3\ P$...

Considerando di poi la retta $h_1\ c_1$ come il lato di un quadrato, si costruirà la prospettiva $c_3\ r$ della sua diagonale, e dai punti m, m_1, m_2 . . . . r in cui sono da essa incontrate le rette suddette si tireranno altrettante parallele ad XY: avremo così i vertici di tutti i poligoni contenuti nel quadrato prospettico $h_1\ r\ s\ c_3$, i quali facilmente possono riconoscersi.

Volendo la prospettiva di altri poligoni basterà cercare sulla parallela $r\ s$ il punto s distante da r di tre volte $r\ x$, condurre $x\ P$ ed unire s con z. La retta $s\ z$ sarà pure inclinata di 45° al quadro, o la diagonale d'un altro quadrato che somministrerà come il precedente la prospettiva d'un'altra porzione del pavimento.

Le parti $r\ o$, $o\ s$, $v\ x$ che sono eguali fra loro, riportate alla destra e alla sinistra dei punti s ed r sulla $r\ s$, daranno altri punti che basterà congiungere con P per avere la prospettiva dei poligoni situati al di fuori del primo quadrato.

221. *Osservazione.* — L'esempio precedente offre la seria delle operazioni necessarie a farsi per costruire la prospettiva d'un pavimento qualunque composto di poligoni regolari, e le cui giunture sieno parallele e perpendicolari al quadro. Allorchè quest'ultima condizione non è sodisfatta si trova però sempre sodisfatta l'altra che i vertici dei poligoni si trovano su due sistemi di rette parallele, le cui prospettive sempre facili a costruirsi conducono immediatamente a quella del pavimento proposto.

Problema VI. *Trovare la prospettiva di un circolo* (*Fig.* 77.)

222. Processi analoghi a quelli impiegati nei problemi precedenti danno modo di costruire la prospettiva d'un circolo. Così supposto che il quadrilatero $m'\ n'\ p'\ q'$ sia la prospettiva del quadrato circoscritto che ha i suoi lati paralleli e perpendicolari alla base del quadro, le diagonali $m'\ p'$, $n'\ q'$ somministreranno la prospettiva C' del centro; sulla retta $C'\ P$ e sulla parallela ad $o'\ o''$ condotta per C' si troveranno le prospettive de' due diametri perpendicolare e parallelo alla base del quadro, onde i quattro punti a', a'', c', c'' da quelle determinati apparterranno alla prospettiva richiesta.

Immaginiamo ora il cono avente per vertice il punto di vista e per direttrice il circolo obiettivo situato sul piano orizzontale che passa per la base del quadro. Un secondo piano orizzontale condotto per il lato $q'\ p'$ intersecherà questo cono secondo un'altro circolo, il cui raggio sarà evidentemente eguale ad $a'\ q'$, e che potrà considerarsi siccome l'obiettivo della prospettiva cercata. Abbattendolo perciò sul piano del quadro, il suo centro verrà in C_1 sulla retta $a'\ C_1$ perpendicolare a $p'\ q'$, e basterà considerare alcuni punti del quadrante e $c\ a'$ per avere altri punti della prospettiva medesima.

Se dividesi, per esempio, il quadrante in quattro parti eguali, un punto di divisione c cadrà sulla diagonale del quadrato circoscritto, e se ne otterrà la prospettiva conducendo $c\ c_1$ perpendicolare a $p'\ q'$ e tirando $c_1\ P$: questa retta incontrerà la diagonale $q'\ n'$ in c' che sarà la prospettiva di c. Ma siccome altri tre punti del circolo si trovano sulle diagonali del quadrato circoscritto, e sono simmetrici con c rapporto ai diametri parallelo e perpendicolare alla base del quadro, così è chiaro che il punto c''', in cui il prolungamento di $o_1\ P$ incontra la diagonale $m'\ p'$, sarà la prospettiva d'uno di questi punti; le prospettive degli altri due si troveranno in c'_1 e in c'''_1 ove le medesime diagonali sono intersecate dalle parallele a $q'\ p'$ condotte per c' e c''', ovvero dalla retta $c^4\ P$, che può costruirsi prendendo $n'\ c_2 = m'\ c_1$.

Per avere le prospettive degli altri punti b e d basta cercare quelle delle quattro rette $b\ o$, $b\ s$, $o\ d$, $d\ s$, che sono

parallele e perpendicolari alla base del quadro. Prolungando le rette $d\ s$, o b fino all'incontro in s_1 e b_1 con $p'\ q'$ le loro prospettive si troveranno sul prolungamento delle rette $s_1\ P$ e $b_1\ P$; e i punti s' ed o' in cui incontrano la diagonale $q'\ n'$ saranno le prospettive dei punti s ed o. Allora le linee $s'\ b'$, $o'\ d'$ parallele a $p'\ q'$ taglieranno le rette $b_1\ P$, $s_1\ P$ nei punti b' e d' prospettive dei punti b e d.

La ispezione del resto della figura, su cui le rette $o_2 P$, $s_2 P$ sono state costruite prendendo $n'\ o_2 = m'\ o_2$, $n'\ s_2 = m'\ s_2$ e la considerazione della simmetria con b e d degli altri punti del circolo rispetto ai due diametri parallelo e perpendicolare alla base del quadro, rende chiara ragione del processo, in virtù del quale sono stati determinati gli altri punti b'', b''', b'''_1; d'', d''', d'''_1 della prospettiva richiesta, la quale si ottiene in fine riunendo con un tratto continuo tutti questi punti.

223. *Osservazione I.* — Volendo la tangente in un punto qualunque della prospettiva trovato, basterebbe costruirla nel punto corrispondente del circolo ausiliario descritto col centro in C_1. Si otterrebbe allora immediatamente sulla $p'\ q'$ il punto, in cui questa tangente incontra il quadro, e che unito con quello di contatto darebbe la tangente cercata; se quel punto d'incontro non avesse luogo sul quadro, si troverebbe la prospettiva di quello in cui incontra una delle diagonali del quadrato, o un'altro lato del quadrato etc. . . .

224. *Osservazione II.* — È facile vedere che la prospettiva $m'\ n'\ p'\ q'$ del quadrato circoscritto al circolo, le sue diagonali $m'\ p'$, $n'\ q'$, e le rette $s_2\ P$, $c_2\ P$, $o_2 P$ sono necessarie e sufficienti a costruire la prospettiva del circolo medesimo. Quanto sia semplice la costruzione della prospettiva del quadrato, noi l'abbiamo visto al N° 204, sicchè può dirsi che tutta la difficoltà nella soluzione dell'attuale Problema riducesi alla costruzione delle rette $s_2\ P$, $c_2\ P$, $o_2\ P$ . . . ec.

La proporzionalità fra i segmenti di due rette parallele intersecate da qualsivoglia numero di rette convergenti in un punto ci offre il modo di costruire agevolmente le rette indicate.

Infatti sopra una retta $O\ A$ descrivasi (*Fig* 78) un quadrante $O\ A\ B\ C\ D\ E$, e diviso questo quadrante in un

certo numero di parti eguali, per esempio in quattro, si proiettino i punti di divisione sul raggio $O\ A$. Si uniscano quindi i punti A, b, c, d con un punto qualunque F preso sul prolungamento della perpendicolare $E\ O$; si prenda $O\ m = a'\ q'$ (*Fig* 77), e condotta $m\ a'$ parallela ad $O\ F$ fino al suo incontro colla retta $A\ F$ in a' si tiri la parallela $a'\ e'$: i quattro segmenti $a'\ b'$, $b'\ c'$, $c'\ d'$, $d'\ e'$ saranno respettivamente eguali ai segmenti $q'\ s_1$, $s_1\ e_1$, $c_1\ b_1$, $b_1\ a'$ della *Fig.* 77. Poichè essendo i segmenti in cui è diviso il raggio $A\ O$ proporzionali a quelli in cui è divisa la retta $a'\ q'$, se ne deduce che questi ultimi sono proporzionali anche agli altri in cui rimian divisa la retta $a'\ e'$, e quindi si avrà:

$$a'\ q' : a'\ e' :: q'\ s_1 : a'\ b' :: s_1\ c_1 : b'\ c' :: c_1\ b_1 : c'\ d' :: b_1\ a' : d'\ e'$$

da cui, per essere $a'\ q' = a'\ e'$, ritraesi la eguaglianza dei segmenti dell'una con quelli dell'altra retta.

Se avessimo voluto i punti di divisione s_1, c_1, o_1 sopra $m'\ n'$ avremmo dovuto prendere $O\ m' = a''\ m'$. Disegnata la *Fig.* 78 sopra un foglio a parte essa può servire per costruire la prospettiva di un circolo qualunque, per la quale si giudichino sufficienti sedici punti.

225 *Osservazione III.* — La medesima *Fig* 78 oltre a somministrare il modo di determinare la prospettiva d'un circolo qualunque, dà anche nel tempo stesso la divisione dello stesso circolo in sedici parti eguali.

Se però occorresse di dividere la prospettiva d'un circolo in un numero diverso di parti eguali bisognerebbe costruire una figura analoga in cui il quadrante $A\ B\ C\ D\ E$ contenesse i punti di divisione necessari, quindi la medesima operazione fatta per ottenere la prospettiva del circolo condurrà alla suddivisione di esso nel voluto numero di parti

PROBLEMA VII *Trovare la prospettiva del circolo inscritto in un quadrato, che non ha i lati paralleli e perpendicolari alla base del quadro*

226 Sia $a\ b\ c\ d$ il quadrato circoscritto (*Fig.* 79); $x\ y$ la base del quadro, e p mezzo di $x\ y$ la proiezione del punto principale

Si può circoscrivere al circolo dato un quadrato avente

i lati paralleli e perpendicolari al quadro, e dopo avere operato come ai N.i 222, 224, per costruirne la prospettiva, si troverebbe col metodo generale quella del quadrato $a\,b\,c\,d$. Ma quando costruita la prospettiva $a'\,b'\,c'\,d'$ di questo quadrato, si trova sul quadro o sul foglio su cui si disegna, il punto di concorso o di due dei suoi lati o d'una delle diagonali, è preferibile la soluzione che noi andiamo ad esporre profittando del punto c_2 ove concorre la diagonale $a'\,c'$ (*Fig.* 80).

Uniremo con d' e b' il punto di concorso c_2, e tirata una indefinita $d''\,b''$ parallela alla linea d'orizzonte $o'\,o''$ divideremo il segmento $d''\,b''$ in parti proporzionali a quelle, in cui sarebbe divisa la $d\,b$ (*Fig.* 79) dal circolo $a\,h$, e dalle parallele ad $a\,c$ condotte per i punti di contatto t e v. A tale oggetto costruiscasi sulla $d''\,b''$ un triangolo rettangolo isoscelo $d''\,c'''\,b''$; fatto centro in c''' mezzo di $b''\,d''$ descrivasi una semicirconferenza $p'\,m\,n\,q'$ tangente ai lati $d''\,c'''$, $c'''\,b'$, e si proiettino m ed n in m' ed n' sulla $b''\,d''$. La divisione cercata della retta $d''\,b''$ sarà fatta, e le rette $c_2\,p'$, $c_2\,q'$ sufficientemente prolungate daranno sulla diagonale $b'\,d'$ i due punti p_1 e q_1 nei quali sono tangenti alla prospettiva del circolo; le altre due $c_2\,m'$, $c_2\,n'$ somministreranno ciascuna sui lati del quadrato due punti m_1, m_2; n_1, n_2 che sono pure i punti di contatto di questi lati con la prospettiva medesima. Così abbiamo sei punti di questa ultima e sei tangenti: ma se ne possono trovare altri due e le respettive tangenti, tirando le rette $n_1\,m_2$, $m_1\,n_2$, che dovranno passare per il centro, e prolungandole fino all'incontro con $c_2\,p_1$ e $c_2\,q_1$: questi punti d'incontro uniti, due a due somministreranno due rette che toglieranno la diagonale $a'\,c'$ nei punti f ed f_1 resultando in queste tangenti alla prospettiva richiesta.

227. *Osservazione. I* — La prospettiva d'un circolo concentrico al precedente si ottiene nel medesimo modo. Basta dividere in due parti proporzionali ad $h\,b$ ed $h\,s$ (*Fig.* 79) la retta $c''\,d''$ (*Fig.* 80), ed avremo il raggio del circolo ausiliario concentrico a $p'\,m\,n\,q'$, rispetto al quale si faranno le medesime operazioni che per il precedente.

228. *Osservazione II.* — Allorchè non si ha il punto di concorso d'una delle diagonali del quadrato circoscritto al circolo, e invece si trova quello di due dei suoi lati, una ope-

razione analoga alla precedente conduce alla soluzione del Problema.

229 *Osservazione III.* — L'esempio citato può avvenire frequentemente nella prospettiva delle colonne allorchè le facce del plinto delle basi non riescono parallele e perpendicolari al quadro. La prospettiva del piano di questi plinti, della proiezione del toro, e della sezione delle colonne sono dati ordinariamente sufficienti per costruire la prospettiva di queste ultime. In tal caso però bisogna determinare anche i piedi delle verticali secondo cui la colonna è toccata dai piani tangenti condotti per il punto di vista. Questi piani hanno per tracce le rette o *r*, o *s* tangenti al circolo di raggio *h r* (*Fig.* 79); le prospettive dei punti di contatto *r*, *s* si potranno determinare col metodo generale; per quelle delle tangenti basterà l'applicazione del principio 3.° del N.° 137.

230. Applicazione — *Costruire la prospettiva della pianta di un tempio circolare sostenuto da dodici colonne.* (*Fig.* 81).

Sia *A* la pianta del tempio, *x y* il quadro, *p* mezzo di *x y* la proiezione del punto principale; *x i'*, *y i* siano i lati dell'angolo ottico. Prolungando *x y* di una quantità *y* o, = *y p* e tirando o, *p*, perpendicolare ad *x y*, sarà o, *p*, il raggio principale.

Debbasi costruire la prospettiva richiesta sopra il quadro *X Y T U*, sul quale la linea d'orizzonte sia o' o''. Determinati, siccome abbiamo detto ai N.i 165 a 169, il punto di fuga *F*, la scala di fuga *X O* e quella di larghezza *O F*₁, costruiremo la prospettiva n' *b'* *c'* *d'* del quadrato *a b c d* circoscritto al circolo esterno della pianta ed avente i lati paralleli e perpendicolari al quadro; e potremo ottenere subito in grazia delle diagonali *a' c'*, *b' d'* i quattro punti nel quale il circolo medesimo è toccato dai lati del quadrato.

Mediante l'abbattimento del semicircolo descritto sopra *a'' b''* come diametro, e delle tangenti *e'' f''*, *g'' f''* condotte ai punti di mezzo dei due quadrati, si troveranno immediatamente altri quattro punti della prospettiva del circolo sulle diagonali *a' c'*, e *b' d'*; si avranno pure le prospettive *e'*, *g'* dei punti *e* e *g*, e quindi la prospettiva *e' f' g' h'* dell'altro quadrato di cui la metà è sul piano indicata dal triangolo

e f g, e di cui i lati debbono resultare tangenti alla prospettiva del circolo in questi ultimi punti. Gli otto punti ora determinati e le respettive tangenti bastano evidentemente alla costruzione della prospettiva del circolo esterno.

Collo stesso metodo, o meglio servendosi convenientemente della scala di cui si è parlato al N.° 224 costruiremo la prospettiva dei circoli concentrici al primo, che si vedono disegnati in pianta.

Per avere le prospettive delle basi delle colonne sarà sufficiente trovare quelle dei plinti di ciascuna di esse. A tale oggetto basterà costruire la prospettiva de' due lati di questi plinti che tagliano sotto l'angolo il meno acuto le due circonferenze, fra le quali sono le basi medesime comprese.

Quali essi siano viene indicato in pianta dalle rette prolungate fino ai lati del primo quadrato circoscritto al circolo esterno. Divideremo pertanto coi metodi noti i lati del quadrilatero a' b' c' d' in parti proporzionali a quelle in cui vengono divisi i lati del quadrato dalle rette suddette, e le congiungenti dei respettivi punti di divisione somministreranno le prospettive domandate.

231. *Osservazione.* — Si hanno riprove dell'esattezza del disegno, tanto dalla applicazione del metodo generale, quanto dalla natura del soggetto.

Così scorgesi facilmente che se per p_1 conducesi p_1 q parallela alle rette congiungenti i lati delle basi delle colonne 6 e 12, e si riporta o, q sopra x y da p in q_1 e q_2, il primo di questi due punti sarà la proiezione sulla base del quadro di quello in cui debbono concorrere le prospettive dei lati delle basi 12 e 6, 3 e 9; e il secondo sarà proiezione del punto di concorso delle prospettive dei lati delle basi 1 e 7, 4 e 10.

Talmente che determinate col metodo generale le prospettive q'_1 e q'_2 dei punti q_1 e q_2, si avranno, proiettandole sulla linea d'orizzonte, i punti c e c' che saranno quelli di concorso sopra enunciati, e che potranno servire a verificare l'esattezza delle costruzioni non solo, come anche a determinare direttamente le prospettive dei lati che nei punti stessi concorrono.

CAPO VI.

Prospettive di fronte e prospettive oblique.

232. Dicesi *Prospettiva di fronte* quella di un oggetto, del quale le linee principali che ne costituiscono lo insieme sono perpendicolari e parallele al quadro: per lo contrario dicesi *obliqua* la prospettiva quando le linee principali dell'oggetto hanno una posizione qualunque rispetto al quadro.

Per la costruzione delle seconde è necessario l'impiego del metodo generale stabilito al N.° 174; la costruzione delle prime può farsi ordinariamente senza di esso.

L'oggetto infatti del metodo indicato quello si è di conservare nella prospettiva i rapporti di grandezza che sussistono nelle diverse parti del corpo obiettivo, e quelli di distanza che esse hanno fra loro, col quadro, e col punto di vista.

Nelle prospettive di fronte si può raggiungere il medesimo scopo mediante una scala prospettica fondata sui principii dimostrati ai N.i 176, 177 e determinata dall'altezza della linea d'orizzonte sulla base del quadro, altezza cognita sempre ed alta perciò ad essere espressa in numeri.

La linea d'orizzonte, lo abbiam già detto al N.° 144, è la intersezione del piano del quadro col piano orizzontale condotto per il punto di vista, cioè per l'occhio dello spettatore che osserva il corpo o la immagine di esso fatta sul quadro. Quindi qualunque sia la posizione dello spettatore rispetto all'oggetto, è sempre in facoltà di colui che ne disegna la immagine supporre che quegli stia osservando l'oggetto stesso o in piedi sul piano orizzontale che passa per la base del quadro, o assiso sul medesimo piano, o collocato a quell'altezza che crederà più conveniente per osservare d'un solo colpo d'occhio lo insieme dell'oggetto. Sapendo che la statura media dell'uomo è 1m 70, sarà nota tanto nel primo quanto nel secondo caso l'altezza della linea d'orizzonte dalla base del quadro, nel terzo caso verrà questa altezza somministrata sempre

da quella che ha il punto scelto per punto di vista sopra il piano orizzontale che passa per la medesima base.

233. Suppongasi pel quadro *X Y T U* (*Fig* 83), che l'osservatore trovisi coi piedi collocato sul piano orizzontale condotto per *X Y*: allora l'altezza della linea d'orizzonte *o' o'' o'''* esprimerà quella dell'uomo, e quindi la verticale *r s* (*Fig.* 82) compresa fra quella linea e il prolungamento della base del quadro dovrebbe considerarsi di 1m 70; ma essendo più conveniente eliminare le frazioni, e d'altronde non arrecando alterazione sensibile un piccolo aumento in tale altezza, riterremo sempre in questo caso che la verticale *r s* sia di 2 metri.

Dividendo ora in due parti eguali la metà di *r s*, e riportandone una alla destra in *s t* e l'altra parte alla sinistra di *s* in *s u*, la retta *u t* rappresenterà 1 metro; laichè dividendo *u t* in 10 parti eguali, ciascuna di esse esprimerà 1 decimetro, che volendo potrà ancora decomporsi in centimetri.

Ciò posto si congiungano *u* e *t* con *r*, e qualunque retta *a b* parallela ad *o' o''* ovvero ad *u t*, compresa fra *r u* ed *r t* rappresenterà 1 metro (N.° 176); ciascuna poi delle parti in cui verrà tagliata dalle congiungenti i punti di divisione della *t u* con *r* esprimerà una parte aliquota del metro.

234. Ora al modo istesso che qualunque parte della *X Y* come della *X o'* ovvero della *Y o''* può esser misurata dalla retta *u t* presa per unità di misura, così prolungando *b a* in b_1 a_1 e considerando b_1 a_1 come la prospettiva d'una retta parallela ad *X Y* collocata sul piano orizzontale che passa per la *X Y* medesima, dovremo misurare con la *a b* presa per unità di misura ciascuna parte di essa e qualsivoglia verticale *c d* inalzata sul piano verticale di cui la traccia orizzontale ha per prospettiva a_1 b_1.

Per lo contrario, quando sulle base del quadro o sopra i suoi bordi verticali dovessimo riportare una lunghezza espressa in numeri adopreremo la unità di misura *u t*, mentre per qualunque altro piano parallelo al quadro, e la cui traccia orizzontale avesse per prospettiva a_1 b_1, sarà unità di misura corrispondente, per le orizzontali e per le verticali da tracciarsi sopra di esso, quella parte del prolungamento di a_1 b_1 che rimarrà compresa fra le rette *r u*, *r t*.

Sono queste le ragioni per cui la figura *u r t* chiamasi *Scala prospettica*.

235. Nei Problemi che seguono noi avremo luogo di impiegare questa scala, come il Metodo generale del N.° 174. Abbiamo alternato l'uso dell'una con quello dell'altro in esempi analoghi, perchè ci è sembrato che in questo modo meglio si giungesse ad apprezzare il partito che si può trarre dalle prospettive di fronte e da quelle oblique. Vedremo che la costruzione delle prime è incomparabilmente più semplice e spedita di quella delle seconde; ma scorgeremo altresì con altrettanta facilità che mentre per un dato oggetto non si può costruire che una sola prospettiva di fronte, si può costruire invece un numero quasi illimitato di prospettive oblique dell'oggetto stesso. Imperocchè non vi può essere che un solo modo di riguardare l'oggetto in quistione allorchè vuolsi osservare la condizione che le linee principali di esso riescano parallele e perpendicolari al quadro; mentre tolta di mezzo una simile condizione, e fissata anche se piace la posizione del quadro rispetto all'oggetto, nell'infinito numero di punti di vista dai quali può questo essere riguardato rimane libera facoltà al disegnatore di scegliere quello che più idoneo gli sembra a riprodurne la immagine.

Gli esempi da noi scelti non sono complicati e nemmeno numerosi, chè nol comporterebbe la natura di questa opera, ma saranno sufficienti per famigliarizzare lo studioso coi metodi esposti, e porlo in grado di costruire la prospettiva di qualunque oggetto.

PROBLEMA I. *Costruire la prospettiva di fronte di una porta rettangolare praticata in un muro verticale.* (*Fig.* 83).

236. Il quadro è *X Y T U*, la linea d'orizzonte o' o'', *P* il punto principale, *F* il punto di fuga distante da *P* della metà della distanza del punto di vista al quadro.

Impiegheremo la scala prospettica *r t u* (*Fig.* 82); e invece della proiezione orizzontale dell'oggetto proposto, ne supporremo note le dimensioni principali.

PRIMO CASO. Sia il muro, in cui la porta è praticata, perpendicolare al quadro; le due rette *e* e g_1 concorrenti in

P potranno rappresentarne la sua proiezione orizzontale. Trattasi di costruire su ciascuno dei piani verticali *e g h*, e_1 g_1 h_1 un rettangolo avente per dimensioni la larghezza e l'altezza della porta.

Supponiamo che la prima sia 2,^{m} 00 e la seconda 3,^{m} 50, e che in *i* si trovi uno dei vertici inferiori del rettangolo da tracciarsi sul piano e *g h*. Condurremo per *i* una parallela ad *X Y* che prolungheremo fino a tagliare la scala *r t u* in *a b*. Sarà *a b* il metro (N.° 234); onde riportandolo da *i* in *i f*, e tirando *f F*, il punto i_1 in cui la *e g* viene tagliata da questa retta sarà il vertice omologo ad *i*, poichè la lunghezza $i\ i_1$ rappresenterà 2 metri (N.° 204). Elevando la verticale *i l*, e col metro *a b* prendendo su questa una lunghezza *i l* eguale a 3,^{m} 50, sarà *i l* l'altezza del rettangolo; onde basterà tracciare *l P*, condurre la verticale i_1 l_1 fino all'incontro di *l P*, e il quadrilatero *i* i_1 l_1 *l* sarà la prospettiva del rettangolo sul piano *e g h*.

Per costruire l'altro rettangolo sul piano e_1 g_1 h_1 non havvi da fare altro cosa che condurre per i_1 una parallela ad *o' o''* fino all'incontro i_2 con e_1 g_1; da i_2 elevare una verticale fino all'incontro l_2 colla parallela ad *o' o''* condotta per l_1, e finalmente prolungare *P* l_2 fino a tagliare la *i l*.

Così la prospettiva della porta è completamente costruita. La fascia che la circonda esige la ripetizione delle operazioni sopra indicate; quindi non ci tratterremo ulteriormente su questo soggetto.

Secondo caso. — Sia parallelo al quadro il muro che contiene la porta, e le due rette *g m*, g_1 m_1 ne rappresentino la proiezione orizzontale.

Prolunghisi la *q s* parallela a *g m* fino a tagliare la scala *r t u* in *n p*; sarà *n p* il metro: e se *q* dovesse essere uno dei vertici inferiori del rettangolo da costruirsi sul piano *q s*, basterà prendere *q s* eguale a due volte *n p*, sulla verticale *q* q_1 riportare *q* q_1 eguale a 3 volte e mezzo *n p*; quindi tirare la orizzontale q_1 s_1 fino all'incontro s_1 con la verticale del punto *s*: il rettangolo *q* q_1 s_1 *s* sarà la prospettiva di un rettangolo eguale in dimensioni a quello costruito sul piano *e g h*.

Mediante le congiungenti il punto *P* coi vertici di questo rettangolo si otterrà la prospettiva di quello che deve essere

tracciato sull'altro piano $h_1 g_1 m_1$ per completare la prospettiva della porta.

237. *Osservazione I.* — La retta $q_1 s_1$ poteva determinarsi indipendentemente dalla scala $n p$. Poichè la porta $q q_1 s_1 s$ essendo della stessa altezza dell'altra $i l l_1 i_1$ è evidente che i prolungamenti delle rette $l l_1$, $q_1 s_1$ e di tutte le altre respettivamente ad esse parallele debbono incontrarsi due a due in un medesimo punto delle verticali $g h$, $g_1 h_1$ intersezioni comuni delle facce dei muri in cui le porte medesime sono praticate.

238. *Osservazione II.* — Potrebbe avvenire che in un medesimo muro verticale si trovassero più aperture rettangolari equidistanti e di eguali dimensioni.

Si determineranno allora col metodo spiegato nel primo caso del N.° 236 i piedi i, i_1 dei lati verticali dell'aperture più vicine alla base del quadro, e ripetendo la soluzione data al N.° 189 per la retta $A_1 B_1$ (*Fig.* 60), si troveranno pure i piedi dei lati verticali corrispondenti alle altre aperture. Ciò fatto basterà ritrovare l'altezza $i l$ della prima, e la retta $l P$ somministrerà immediatamente l'altezza prospettica di tutte le susseguenti.

239. *Osservazione III.* — Quando il piano e $g h$ invece di essere verticale facesse un angolo qualunque col piano orizzontale che passa per $X Y$, dovremmo sempre misurare l'altezza della porta sopra la verticale del punto i, e condotta per l una parallela ad $X Y$ prendere su questa alla sinistra di l una lunghezza tale che abbia con $i l$ il rapporto determinato dalla inclinazione del muro. La retta che congiunge il punto i colla estremità di questa lunghezza sarebbe lo spigolo corrispondente della porta.

PROBLEMA II. *Costruire la prospettiva obliqua di una porta rettangolare.*

240. Sia dentro l'angolo ottico l o l' (*Fig.* 85. *a*) proiettato il muro in $c b$, la porta in $c d$. La sua soglia inferiore c sia elevata dal piano orizzontale, che passa per la base del quadro, della quantità $b c$; la sua altezza sia $c f$.

Il quadro infine su cui vuolsi costruire la prospettiva richiesta sia $X\ Y\ T\ U$ (*Fig.* 85).

La semplicità dell'oggetto non esigerebbe la costruzione della prospettiva ausiliaria della sua proiezione orizzontale; ma siccome esso fa parte, come la figura dimostra, di un'altro oggetto più complicato, noi abbiamo supposto abbassato il piano orizzontale che passa per $X\ Y$ della quantità $X_2\ Y_2$, e la linea d'orizzonte $o'\ o''$ portata sopra $X\ Y$: onde la scala di fuga sarà $X_2\ P_1$, la scala di larghezza $O_1\ F'_2$, e il punto di fuga si troverà in F_1. Suppongasi in oltre che il piano orizzontale $X_2\ Y_2$ sia tagliato da quello contenente la scala d'altezza secondo $X\ X_1$; allora l'altro piano orizzontale che passa per $X\ Y$ sarà intersecato da quest'ultimo secondo $o'\ X_1$, e il prolungamento di $F'_2\ O_1$ incontrando in O' la retta $X\ X_1$ somministrerà per scala d'altezza la retta $O'\ Z'$, sulla quale dovremo riportare le altezze dell'oggetto a partire dal punto y' (N.° 183).

Ciò posta si determinino col metodo generale le prospettive c_1 e d_1 dei punti c, d, ed esse basteranno al tracciamento della retta $c_2\ d'_2$ prospettiva ausiliaria della proiezione orizzontale della faccia anteriore del muro. Conducendo la $d_2\ d'_2$ parallela ad $o'\ o''$, e dal punto d'_2 elevando la verticale $d_2\ d''_2$, basterà proiettare d''_2 sulla verticale del punto d_2 per avere le prospettive sul quadro del punto corrispondente a d_2. Ora osservando che la faccia verticale $c'_1\ d_2$ del muro taglia il piano $X_1\ X\ U$ secondo la verticale $c'_1\ c''_2$, il punto c'' in cui quest'ultima incontrerà la $o'\ X'_1$ apparterrà alla prospettiva sul quadro della proiezione orizzontale della faccia medesima: onde questa prospettiva sarà la retta $c''\ c'_2\ d'_2$.

Sulla scala d'altezza $O'\ Z'$ si prenda a partire da y' la $y'\ e' = b\ e$, $y'\ f' = b\ f$: le due rette $o'\ e'$, $o'\ f'$ saranno le intersezioni col piano contenente la scala medesima di due piani orizzontali condotti per le soglie inferiore e superiore della porta. Mediante la parallela ad $o'\ o''$ tirata per d_1 che incontra in d'_1 la $X\ X_1$, e mediante la verticale del punto d'_1 si determineranno, come precedentemente si è fatto pel punto d'_2, i punti d' e d'' prospettive di uno estremo di ciascuna di quelle soglie; in grazia poi della stessa verticale $c'_1\ c''_2$, che incontra in c''_2 e c''_2 le orizzontali $o'\ e'$, $o'\ f'$, potranno imme-

diatamente aversi le prospettive $d'c'$, $d''c''$ degli spigoli esteriori delle soglie, i quali resteranno determinati dalla verticale del punto c_1.

PROBLEMA III. *Costruire la prospettiva di fronte di una scala, di cui i gradini hanno la loro più grande dimensione parallela al quadro.*

241. La proiezione orizzontale della scala è *A* (*Fig.* 84 *a*) componesi di 6 gradini compreso un pianerottolo, la cui larghezza equivale a quelle insieme di 4 gradini; l'altezza di questi è metà della larghezza. Due muri perpendicolari al quadro li sostengono, i quali hanno tre riseghe orizzontali a, a'; b, b'; c, c' corrispondenti al primo gradino, al pianerottolo e all'ultimo ripiano a cui termina la scala. L'altezza delle riseghe sul secondo gradino è eguale a quella di un gradino; sul quarto e sul sesto è eguale a quella di due gradini.

Alla distanza poi di tre larghezze di un gradino si trova un muro *E G* parallelo al quadro a cui fa capo l'ultimo ripiano della scala.

Ciò posto, supponiamo che la faccia verticale del primo gradino sia sul piano verticale $c\,c_1$ (*Fig.* 84); si prolungherà questa retta finchè occorre per determinare sopra una scala prospettica analoga a quella disegnata in $r\,t\,u$ (*Fig.* 82), l'unità di misura corrispondente al piano medesimo. Di poi si riporteranno sopra $o\,c_1$ le lunghezze $c\,d$, $d\,d_1$ e $d_1\,c_1$ respettivamente eguali alla grossezza dei muri che sostengono la scala e alla dimensione maggiore dei gradini.

Immaginiamo condotto, a quell'altezza che si vorrà, un piano orizzontale $x\,y$; si proiettino sopra la retta $x\,y$ i punti c, d, d_1, c_1 e si conducano al punto principale *P* le rette $c'P$, $d'P$, d'_1P, c'_1P; è evidente che queste rette, mentre somministrano la prospettiva ausiliaria delle proiezioni orizzontali dei muri in cui sono intestati i gradini, comprendono fra loro anche quella della proiezione orizzontale di tutta la scala.

Le facce orizzontali e verticali dei gradini tagliano le facce interne dei due muri $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$ (*Fig.* 84 *a*) secondo una linea spezzata la quale non è altra cosa che il profilo della scala. Si comprende facilmente che costruita la prospettiva di

questo profilo sull'uno e sull'altro muro, si otterrà subito quella della scala congiungendo convenientemente due a due i diversi vertici dei due profili. Nel caso attuale rimane la scala intieramente a sinistra del punto di vista, e perciò si vedrà soltanto il profilo sul muro $a\ b\ e$. Ciò peraltro non impedirebbe la costruzione anco dell'altro profilo; ma siccome gli spigoli dei gradini riescono paralleli e perpendicolari al quadro, così è solo necessaria e sufficiente la prospettiva del profilo visibile.

Suppongasi pertanto la distanza del punto di vista al quadro doppia di $P\ F$, e proponiamoci di costruire quest'ultimo profilo.

Osserveremo che, trovandosi esso nel piano verticale $d\ d'\ P$, la prospettiva ausiliaria della sua proiezione orizzontale sarà sulla retta $d'\ P$. Immaginiamo prolungate tutte le facce orizzontali dei gradini; le loro intersezioni col piano $d\ d'\ P$ saranno orizzontali, e le loro prospettive concorrenti al punto P taglieranno la $d\ d'$ nei punti 1, 2, 3, 4 . . . equidistanti fra loro dell'altezza assegnata a ciascun gradino, altezza che deve determinarsi con la unità di misura stabilita sulla scala prospettica dal prolungamento della $c\ e_1$.

Per costruire la larghezza prospettica del primo gradino, si tirerà per il punto 1 una parallela a $d\ d_1$, si prenderà su questa $1.\ v = 1.\ d$, e le due rette $1.\ P$, $v\ F$ somministrando il punto s, faranno conoscere la prospettiva s del vertice di un quadrato avente i lati paralleli e perpendicolari al quadro doppi di $1.\ d$. Onde $1.\ s$ sarà la prospettiva della retta, secondo la quale il piano $d\ d'\ P$ è intersecato dalla faccia orizzontale del primo gradino.

Si proietti $1.\ s$ sopra $d'\ P$ in $d'\ s'$, ed s' sarà la proiezione non solo del punto s, ma anche dello spigolo verticale corrispondente del secondo gradino; onde è manifesto, che riportando sulla $d'\ P$ tante parti eguali a $d'\ s'$ quante occorrono per i gradini per il pianerottolo e per l'ultimo ripiano della scala, basterà dai punti di divisione condurre altrettante verticali fino all'incontro delle respettive rette condotte dai punti di divisione della $d\ d'$ al punto P, per ottenere il cercato profilo della scala medesima.

La divisione di $d'\ P$ sarà somministrata dalla $x\ y$, su cui

potrà determinarsi la quantità $d'.1$ corrispondente alla larghezza d'un gradino, congiungendo il punto s' con o' o con qualunque altro punto della linea d'orizzonte.

Riporteremo allora la $d'.1$ in 1. 2 e in 2. 3, quindi prenderemo la lunghezza 3. 4 eguale a quattro volte $d'.1$, poi 4. 5 e 5. 6 eguali a $d'.1$, e finalmente 6. 7 eguale a tre volte la $d'.1$. Tutti i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 si uniscano con o', e la $d'P$ rimarrà divisa nel modo ricercato.

In virtù di questa operazione la $d'm'$ sarà proiezione del profilo corrispondente ai primi quattro gradini; la $m'i'$ quella della retta secondo cui il muro $a\,c$ è tagliato dal pianerottolo, la $i'h'$ quella del profilo degli ultimi due gradini; infine la $h'e'$ sarà proiezione della retta secondo la quale il ripiano della scala interseca il muro medesimo. Abbassando allora da questi punti di divisione della $d'e'$ altrettante verticali fino all'incontro delle respettive congiungenti il punto P coi punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 della $d\,d'$, troveremo il profilo richiesto.

Non aggiungeremo molte parole per render conto del come è stata costruita la prospettiva delle facce secondo le quali sono tagliati i muri che sostengono la scala.

Si osserverà che se dai punti s', m', i', h', e' conducansi altrettante parallele alla linea d'orizzonte, verranno a determinarsi negli spazi compresi fra le parallele $c'P$, $d'P$ e fra le altre d'_1P, c'_1P:

1.° i quadrilateri $c'\,d'\,s'\,t'$, $d'_1\,c'_1\,t''\,s''$ proiezioni della prima risega su ciascun muro;

2.° i quadrilateri $t'\,s'\,m'\,n'$, $s''\,t''\,n''\,m''$ proiezioni delle facce inclinate corrispondenti alla prima parte della scala;

3.° i quadrilateri $n'\,m'\,i'\,l'$, $m''\,n''\,l''\,i''$ proiezioni delle riseghe corrispondenti al pianerottolo;

4.° i quadrilateri $l'\,i'\,h'\,g'$, $i'\,l''\,g''\,h''$ proiezioni delle facce inclinate corrispondenti alla seconda parte della scala;

5.° i quadrilateri $g'\,h'\,e'\,f'$, $h''\,g''\,e''\,f''$ proiezioni dei due ripiani superiori dei muri corrispondenti al ripiano della scala.

Le verticali abbassate dai vertici dei rammentati quadrilateri fino all'incontro delle rette già tracciate sul piano $d\,d'\,P$ che, a seconda dei dati superiormente espressi, somministrano

le altezze dei punti in questione, saranno sufficienti per la costruzione completa delle rammentate facce.

242. *Osservazione.* — La prospettiva ausiliaria $c' f' f'' c'_1$ della proiezione orizzontale della scala non era indispensabile per costruire la prospettiva di quest'ultima.

Poichè è manifesto che dopo aver determinato il punto s potevasi inalzare la piccola verticale $s\,s_1$ fino all'incontro della retta 2. P, di là condurre una parallela alla linea d'orizzonte, e riportare sopra di essa la lunghezza di quella piccola verticale da s_1 in v_1. Allora congiungendo v_1 con F avremmo ottenuta la larghezza prospettica del secondo scalino. Ripetendo successivamente questa operazione, con le convenienti modificazioni per il pianerottolo e per l'ultimo ripiano avremmo facilmente trovata la prospettiva del profilo.

Problema IV. *Costruire la prospettiva di fronte di una scala appoggiata ad un muro verticale e perpendicolare al quadro.*

243. Prendiamo ad esempio una di quelle scale che sogliansi costruire all'esterno delle fabbriche, per dare accesso al piano terreno elevato al di sopra del suolo naturale, e che hanno una base quadrata o rettangolare, presentando ordinariamente l'accesso alla porta tanto di fronte che dai lati.

Supponiamo che la proiezione orizzontale della scala sia B (*Fig.* 84 *b*) di forma rettangolare, e composta di due quadrati o $n\,p\,q$, $m\,r\,s\,t$, separati fra loro da un rettangolo $m\,n\,o\,r$ corrispondente all'apertura della porta. I vertici degli angoli retti di ciascheduno gradino si troveranno proiettati sulle due diagonali dei quadrati, le quali saranno inclinate di 45° al quadro e concorreranno in uno stesso punto v della retta che divide in due parti eguali tutta la proiezione.

Il quadro è quello stesso su cui è stata costruita la prospettiva precedente, onde si ha la medesima linea d'orizzonte, il medesimo punto principale P, e lo stesso rapporto fra la distanza del punto di fuga F_1 dal punto P e la distanza del punto di vista al quadro. Deve pure intendersi che per le dimensioni delle diverse parti dell'oggetto bisogna servirsi della medesima scala prospettica adoperata nel problema antecedente.

Sia $D\ C\ B$ la prospettiva del muro al quale sta appoggiata la scala (*Fig.* 84). Se per il punto D_1 preso sulla verticale del punto D si immagina condotto un piano orizzontale, questo taglierà il quadro secondo $D_1\ e'_2$ parallela ad $o'\ o''$, e il muro secondo $D_1\ B$ concorrente in P. Possiamo supporre che la scala sia proiettata su quel piano; cerchiamo le prospettiva della sua proiezione.

Tirata per D una parallela ad $o'\ o''$ fino a determinare sulla scala prospettica la unità di misura corrispondente al piano $D\ D_1\ e_2$, si prenderà sulla $D_1\ e'_2$ una parte $D_1\ E_1$ eguale alla dimensione $p\ q$ della scala (*Fig.* 84. *b*) e la $E\ P$ conterrà la prospettiva ausiliaria del lato corrispondente a $p\ s$. A cagione poi di $P\ F_1$ eguale alla metà della distanza del punto di vista al quadro, riporteremo sulla $D_1\ e'_2$, a partire dal punto E_1, le grandezze $E_1\ e'_1$, $e'_1\ e'_2$, $e'_2\ e'_3$ eguali respettivamente alla metà delle dimensioni $p\ o$, $o\ r$, $r\ s$, e congiungeremo i punti e'_1, e'_2, e'_3 con F_1. Sulla retta $E_1\ P$ si determineranno allora i tre segmenti $E_1 e'$, $e'\ e''$, $e''\ e'''$ tali che le parallele ad $o'\ o''$ condotte per i punti e', e'', e''' daranno:

1° la figura $D_1\ E_1\ e'''\ d_1$ prospettiva ausiliaria della proiezione orizzontale della scala.

2° la figura $D_1\ E_1\ e'\ d_1$ prospettiva del primo quadrato corrispondente a $p\ q\ r\ o$ (*Fig.* 84. *b*).

3° la figura $e'\ e''\ d_2\ d_1$ prospettiva del rettangolo corrispondente alla porta.

4° la figura $e''\ e'''\ d_3\ d_2$ prospettiva del secondo quadrato contiguo.

Resulta da ciò: che $D_1\ d_1$ sarà la prospettiva ausiliaria del profilo fatto nel muro $D\ C\ B$ dai gradini della scala; $d_1\ d_2$ quella della larghezza della porta, e $d_1\ d_3$ quella del profilo fatto nello stesso muro dai gradini opposti ai precedenti: infine le rette $E_1\ d_1$, $e'''\ d_3$ saranno le prospettive delle diagonali dei due quadrati, e conterranno quelle dei vertici degli angoli fatti dagli spigoli orizzontali dei gradini.

Prendansi ora sulla retta $D_1\ E_1$ le parti $D_1\ r$, $r'\ r''$, $r''\ E_1$ respettivamente eguali alla larghezza del pianerottolo e dei gradini; le rette $r'\ P$, $r''\ P$ daranno la direzione delle prospettive ausiliarie dei gradini perpendicolari al quadro, e i punti n_1, q_1; n'_1, q'_1 in cui incontrano le diagonali $E_1\ d_1$, $e'''\ d_3$

saranno le prospettive ausiliarie dei vertici degli angoli suddetti; per cui basterà condurre da questi punti le parallele n'_t n', q'_t q' . . . ad o' o'' per avere le prospettive ausiliarie dei gradini paralleli al quadro.

Resta ora che si trovino le prospettive vere di tutti questi punti. A tale oggetto sopra $D\,D_t$ si riporteranno le parti $D\,d$, $d\,d'$, $d'\,d''$ eguali alla altezza di un gradino, si uniranno i punti d, d', d'' con P, e quelli in cui queste rette incontrano le verticali condotte da q', n', d_t determineranno il profilo $D\,d\,m\,n\,p\,q\,s'_t$ fatto nel muro dai gradini paralleli al quadro.

Le rette $D\,E$, $d\,e$, $m\,m_t$, $n\,n_t$, $p\,p_t$, $q\,q_t$ parallele ad $o'\,o''$ incontreranno le verticali condotte da E_1, q'_t, n'_t, nei punti E, e, m_t, n_t, p_t, q_t che uniremo con P per avere le prospettive delle costole dei gradini perpendicolari al quadro: queste termineranno là dove sono incontrate dalle verticali dei punti e''', q'_2, n'_2: e condotte finalmente da quei punti d'incontro altrettante parallele ad $o'\,o''$ si compirà la prospettiva di tutta la scala.

244. *Osservazione I.* — Non rendiamo conto della prospettiva della porta essendo ciò che è stato detto al N.° 236 più che sufficiente per eliminare qualunque difficoltà in proposito.

245. *Osservazione II.* — I vertici e, n_t, q_t, e gli altri e_2, n_2, q_2 degli angoli retti fatti dai gradini si devono trovare su due rette, le cui prospettive ausiliarie sono, lo abbiamo già detto, le diagonali $E_t\,d_t$, $e'''\,d_2$: queste prolungate sufficientemente s'incontrano in un certo punto o_t che sarà la prospettiva ausiliaria del punto o_2 in cui s'incontrano le prime; perciò i due punti o_t, o_2 devono trovarsi sopra una medesima verticale se il disegno è esatto.

PROBLEMA V. — *Costruire la prospettiva obliqua d'una scala.*

246. La Figura 85. *a* contiene entro l'angolo ottico *l* o *l'* la proiezione orizzontale della scala rappresentata dalla Figura 84. *a*, e sul piano verticale $x'\,y'$ abbattuto la sua proiezione verticale.

L'angolo ottico *l* o *l'*, e il quadro $X\,Y\,T\,U$ (*Fig* 85), sul quale ci proponiamo di costruire la prospettiva richiesta, sono

quelli stessi che hanno servito alla prospettiva obliqua della porta (N.° 240). Onde conserveremo lo stesso piano orizzontale ausiliario $X_1 F_1$, la medesima scala di fuga $X_1 P_1$, lo stesso punto di fuga F_1, la medesima scala di larghezza $O_1 F_1$ e la medesima scala di altezza $y' Z'$.

Dopo aver determinata, seguendo il metodo generale, la prospettiva della proiezione orizzontale dei due muri sostenenti la scala, si cercheranno sulla scala di fuga $X_1 P_1$ le prospettive dei punti in cui la $x z$ (*Fig.* 85. *a*) è incontrata dalle proiezioni orizzontali dei gradini o dai loro prolungamenti; di poi conducendo per il punto e_1 una retta $e_1 f_1$ parallela ad $X_1 P_1$ si troveranno sopra di essa i punti in cui verrebbe ad essere incontrata dalle parallele ad $e_1 e_1$ condotte per i diversi punti trovati sopra $X_1 P_1$, ripetendo a tale oggetto le costruzioni che han servito alla soluzione del secondo caso contemplato nel Problema del N.° 194 (*Fig.* 65). Per tal modo giungeremo con molta facilità e speditezza a costruire le prospettive delle proiezioni orizzontali di tutti i gradini.

La prospettiva della scala dipende da quella del suo profilo tracciato su due piani verticali che possono essere non solo quelli rappresentati da $g_1 s_1$ o $g_2 s_2$ ai quali essa termina, ma altresì due altri qualunque non escluso quello contenente la scala d'altezza.

La proiezione dell'oggetto rispetto al quadro è tale nella nostra figura che possiamo con facilità trovare il profilo della scala su quest'ultimo piano; onde profitteremo di esso e dell'altro formato sul piano $g_2 s_2$.

Si riporterà sulla scala di fuga, a partire da y', sei volte l'altezza d'un gradino, tanti essendo i gradini della scala; i punti di divisione si uniranno con o' ed avremo le linee secondo le quali il piano contenente la scala d'altezza può intendersi intersecato dalle facce orizzontali dei gradini indefinitamente prolungate.

Il piano verticale $e_2 e_2$ sufficientemente prolungato taglia evidentemente il piano contenente la scala d'altezza secondo la verticale $e_2 e''_2$, e la parte $e'_3 e''_3$ di questa verticale sarà la retta secondo la quale lo stesso piano è intersecato dal prolungamento della faccia verticale del primo gradino. Immaginando egualmente prolungati i piani contenenti le facce

Digitized by Google

verticali di tutti gli altri gradini, troveremo immediatamente la linea spezzata $e'_3\ e''_3 \ldots c''_1$ che sarà il profilo della scala sul piano $X'_1\ y'\ Z'$.

Occupiamoci ora del profilo orizzontalmente proiettato in $g_1\ s_1$. Osserveremo che tutti i vertici degli angoli salienti si trovano sopra una medesima retta, e che sopra una retta ad essa parallela si trovano pure i vertici degli angoli rientranti; talchè trovate le prospettive di queste due rette non dovremo fare altro cosa che elevare dai punti di divisione della $g_1\ s_1$ altrettante verticali per ottenere le prospettive dei vertici suddetti.

Troviamo il punto g'', in cui un piano parallelo al quadro incontra la retta $o'\ X'_1$, e la parallela alla linea d'orizzonte condotta per g'', somministrerà il punto g'; prolunghiamo la verticale $g'_1\ g''_1$ fino all'incontro con la retta $o'\ e''_3$, e la parallela alla linea d'orizzonte condotta per quel punto somministrerà il punto g''. Analogamente si troveranno i punti i' ed i'', ed allora le rette $g'\ i'$, $g''\ i''$ comprenderanno il profilo cercato, che si determinerà, siccome sopra abbiamo detto. In un modo analogo troveremo il profilo proiettato in $m_1\ n_1$. Uniti infine convenientemente i vertici del profilo $g'\ g''\ \ i''\ldots s''$ con quelli dell'altro $e'_3\ e''_3 \ldots e''_1$, otterremo la prospettiva di tutti i gradini.

Dalle proiezioni dell'oggetto (*Fig* 86. *a*) ricavansi le altezze dei vertici del profilo dei due muri, altezze che sono determinate da quelle dei gradini. Esaminando accuratamente il disegno ed operando in un modo affatto analogo per determinare la prospettiva dei gradini medesimi, sarà facile trovare quella delle facce oblique e delle risegbe secondo le quali i muri stessi resultano tagliati.

247. *Osservazione I.* — Altorchè la inclinazione della retta $g_1\ g_2$ e quella delle sue parallele è tale da non aver luogo entro i limiti del foglio su cui si disegna lo incontro loro colla retta $X\ X_1$, non havvi altro di meglio a fare che costruire sul piano $g_2\ s_2$ il profilo opposto a quello determinato sul piano $g_1\ s_1$.

248. *Osservazione II.* — Potrebbe talvolta trovarsi anche il punto di concorso delle due rette $g_1\ s_1$, $g_2\ s_2$. In questo caso avremo un mezzo fecondo di verificazioni della esattezza

del disegno, non che di semplicizzazioni; poichè queste rette sono proiezioni non solo dei lati orizzontali dei profili della scala, e di quelli delle riseghe dei muri; ma sono proiezioni altresì delle rette fra cui i profili sono compresi, e dei lati delle facce inclinate dei muri

PROBLEMA VI. *Costruire la prospettiva di fronte di un arco sopra un muro verticale.*

249. Sia il muro perpendicolare al quadro, ed e $g\ h$ (*Fig.* 83) sia la prospettiva della sua faccia anteriore; $x_1\ z_1$ la proiezione dell'arco. Immaginiamo condotto per $g\ h$ un piano $g\ h\ m$ parallelo al quadro; si prolunghi $g\ m$ fino a tagliare la scala prospettica $u\ r\ t$ (*Fig.* 82), e colla retta $u\ p$ presa per unità di misura, si costruisca sulla orizzontale $x\ z$ l'arco $x\ y\ z$ che supporremo semicircolare ed avente per centro o, per raggio o y. Conducansi pei punti x, z ed y le respettive tangenti ed avremo la figura $x\ x_1\ z_1\ z$ circoscritta al semicircolo, pei punti di mezzo s e t dei quadranti si tirino pure le tangenti all'arco, e queste concorreranno in un medesimo punto y_1 della verticale o y condotta pel centro. Le prospettive di queste tangenti e delle orizzontali $x\ z$ e $t\ s$ sono facilissime a costruirsi e fanno conoscere immediatamente quelle dei punti di contatto

Consideriamo i piani orizzontali condotti per i punti y_1, y, s e t, z e x. Essi taglieranno la $g\ h$ nei punti y_2, x'_2, t_2, o_2, ed il piano e $g\ h$ secondo altrettante rette $y_2\ y'_2$, $x'_2\ x'_1$, $t_2\ t'_2$ $o_2\ x'$ tutte concorrenti in P, e che saranno respettivamente prospettive delle orizzontali $y_1\ y_2$, $y\ x'_2$, $s\ t_2$, o o_2 su cui si hanno a trovare quelle dei punti y_1, y, s e t, z e x.

Dividiamo in due parti eguali la retta $x_1\ z_1$ (N.° 488), e per il punto di mezzo o, come per gli estremi x_1 e z_1 eleviamo altrettante verticali; queste taglieranno:

1.° Le orizzontali $y_2\ y'_1$ e $x'_2\ x'_1$ nei punti y'_1 ed y' prospettive del punto di concorso delle tangenti in s e t, e della sommità dell'arco

2.° La orizzontale o, x' nei punti x', z' ed o' prospettive delle origini e del centro dell'arco

3.° La orizzontale $x'_2\ x'_1$ nei punti x'_2, x'_1 prospettive

dei punti x_1, z_1 nei quali le tangenti alle origini incontrano quella condotta alla sommità dell'arco.

Conducendo pertanto le secanti $o' x'_1$ $o'_1 z'_1$ si troverà la orizzontale t_2 t' intersecata nei punti s' e t' prospettive del mezzo di ciascun quadrante. Allora le rette y'_1 t', y'_1 s' dovranno riuscire tangenti alla prospettiva dell'arco nei medesimi punti t' ed s'.

In grazia di tali operazioni siamo giunti a costruire della prospettiva domandata cinque punti e cinque tangenti, che in generale bastano per tracciarla con tutta la possibile approssimazione.

Cogli stessi principi è stata costruita la prospettiva dell'arco concentrico più piccolo.

Un punto qualunque di quella dell'arco tracciato sulla faccia posteriore e_1 g_1 h_1 del muro si può invece ottenere conducendo un piano parallelo al quadro per il punto s'' dell'arco eguale tracciato sulla faccia anteriore, punto che è proiettato orizzontalmente in s_2. Questo piano taglierà la superficie cilindrica compreso fra i due archi secondo una generatrice s'' t'' che sarà parallela ad o' o'', a cui pure resulterà parallela la sua proiezione orizzontale s_2 t'_1. Il punto t'_1 è proiezione orizzontale di quello nel quale la generatrice indicata taglia la faccia posteriore del muro; onde la verticale corrispondente somministrerà sopra s'' t'' il punto t'' appartenente all'arco in quistione.

250. *Osservazione I.* — In qualunque piano parallelo al quadro poteva costruirsi l'arco proposto, purchè si avesse cura di tracciarlo colla unità di misura corrispondente determinata sulla scala prospettica dal prolungamento della traccia orizzontale del piano stesso. Potevasi anche tracciare un solo quadrante sopra la retta x' x'_1, presa per raggio e determinata colla scala corrispondente al piano x' x_2 f_1, siccome vien dimostrato dalla figura.

251. *Osservazione II.* — Se l'arco dato fosse stato minore di una semicirconferenza, o invece di appartenere al circolo fosse stato di natura diversa, avremmo potuto facilmente trovar modo di costruire le prospettive dei suoi punti e delle sue tangenti operando analogamente a quello che sull'esempio proposto abbiam fatto.

252. *Osservazione III.* — Le medesime rette y, y'_1, x', x'_1... che hanno servito a determinare la prospettiva di un solo arco sul piano $c\,g\,h$, sarebbero sufficienti per determinare quella di un numero qualsivoglia di archi eguali, e collocati alle medesime altezze sullo stesso muro.

253. *Osservazione IV* — Se la faccia anteriore del muro fosse inclinata all' orizzonte, lo che avviene nei muri a scarpa, la prospettiva dell' arco sopra di essa potrebbe trovarsi, immaginando questa faccia rialzata e in posizione verticale, e quindi costruendo col metodo del N.° 249 la prospettiva ausiliaria dell' arco. Dipoi colle prospettive delle proiezioni orizzontali delle rette su cui trovansi i diversi punti di quest' ultimo, o col mezzo superiormente indicato per la ricerca del punto t'' sarà facile determinare la prospettiva in questione.

Problema VII. *Costruire la prospettiva obliqua di una o più arcate aperte in un muro verticale.*

254. Sia dentro l' angolo ottico I o I' (*Fig.* 86. a) proiettato in $x\,y$ il quadro, in p il punto principale, in $a\,b$ il muro; e sia e d l' apertura d' un' arcata semicircolare, e e il suo raggio, e la proiezione del centro elevato dal piano orizzontale della quantità $e\,f$.

Suppongasi trovato sul quadro $X\,Y\,T\,U$ (*Fig.* 86) la prospettiva $n'\,b'$ della retta secondo la quale la faccia anteriore del muro interseca il piano orizzontale condotto per $X\,Y$ e determinata l' apertura $c'\,d'$ dell' arcata, non che la prospettiva e' della proiezione orizzontale del centro. Suppongasi inoltre che il piano contenente la scala d' altezza intersechi secondo $o'\,X'_1$, il piano orizzontale che passa per la base del quadro, e che la scala d' altezza sia $y'\,Z'$. Prenderemo su questa a partire da y' le lunghezze $y'\,y''$, $y''\,y'''$ respettivamente eguali all' altezza e f della nascita dell' arco e al raggio $e\,f$ (*Fig.* 86. a), e si avranno così le orizzontali $o'\,y''$, $o'\,y'''$ secondo cui il piano verticale $X'_1\,o'\,U$ è tagliato dai due piani orizzontali condotti per le origini dell' arco e per la sua sommità.

Immaginiamo prolungata la faccia anteriore del muro quanto

occorre per tagliare il piano contenente la scala d'altezza, è evidente che il prolungamento di $b'a'$ incontrando la $o'X'_1$, in a'_2 sarà $a'_2 a'_1$ la intersezione di quella faccia col piano indicato, onde mentre $a'_2 f_2$ sarà eguale all'altezza delle origini dell'arco, la $f_2 g_2$ ne sarà il raggio; e perciò se descrivesi col centro in f_2 il quadrante $g_2 t_2 x_2$, la figura $a_2 c_2 x_2 t_2 g_2$ sarà il semiprofilo della intera arcata.

Costruiscansi, come nel Problema del N.° 249, le tangenti $x_2 z_2$, $z_2 g_2$, $t_2 h_2$ all'origine alla sommità e al punto di mezzo del quadrante, e si tiri la orizzontale $t_2 a_2$: le congiungenti il punto o' coi punti h_2 ed s_2 saranno le intersezioni col piano verticale $X'_1 o' U$ di altri due piani orizzontali condotti l'uno per il punto nel quale concorrono le tangenti ai punti di mezzo de' due quadranti dell'arco, l'altro per questi due punti stessi; talchè non rimarrà altra cosa a fare che determinare sul quadro le prospettive delle rette secondo le quali questi ultimi piani orizzontali e quelli precedentemente condotti per le origini e per la sommità dell'arco intersecano la faccia anteriore $a'b'$ del muro. Un punto di ciascuna di questa orizzontali si trova evidentemente in f_2, s_2, g_2, h_2 ove la faccia anteriore del muro taglia le rette che determinano le altezze dei notati punti dell'arco; se ne può trovare poi un altro immaginando condotto per l'asse $e'e''$ un piano parallelo al quadro; poichè questo taglierà il piano contenente la scala d'altezza secondo la verticale $e'_2 e_2$, e per conseguenza le orizzontali $o'f_2$, $o's_2$, ... nei punti f_1, s_1, g_1, h_1 e le proiezioni loro f', t'', g', h' fatte sopra la $e'e''$ saranno i punti cercati. Allora le rette $f'f_2$, $t''t_2$, $g'g_2$, $h'h_2$ saranno le prospettive delle orizzontali contenenti i diversi punti dell'arco da costruirsi.

Ciò posto; le verticali elevate da e' e d' somministreranno sopra $f_2 f'$ le origini x' e z' dell'arco, e sulla $g_2 g'$ i punti x'', z'' i quali congiunti con f' determinano sopra la $t_2 t''$ il mezzo t' ed s' di ciascun quadrante. La sommità dell'arco è g', il punto di concorso delle tangenti in t' ed s' è h': laonde tirate queste tangenti $h't'$, $h's'$ si potrà facilmente costruire la prospettiva domandata.

255. *Osservazione I.* — La costruzione del semiprofilo $a'_2 c_2 x_2 t_2 g_2$ non è subordinata alla condizione che la faccia anteriore del muro $a'b'$ possa intersecare il piano $X'_1 o' U$.

E chiaro infatti che determinate una volta le due orizzontali $o'\ y''$, $o'\ y'''$ condotte per le origini e per la sommità dell'arco, non la sola verticale $a'_2\ a_5$ ma qualunque altra retta ad essa parallela sarebbe stata capace di somministrare l'altezza delle origini e il raggio dell'arco, e di offrire quindi il modo di costruire quel semiprofilo. Vogliamo anzi notare che questo non è affatto indispensabile, in quanto che le altezze $a'_3\ s_3$, $a'_4\ h_4$ dei punti di mezzo dei quadranti e di quello in cui concorrono le tangenti in questi ultimi potrebbero dedursi anche dalla proiezione verticale dell'oggetto, ma a cagione della piccola scala nella quale è ordinariamente disegnata la proiezione medesima torna più comodo, e riesce senza dubbio più esatto l'impiego del semiprofilo ausiliario.

256. *Osservazione II* — Allorchè non può aver luogo sul quadro la intersezione della faccia anteriore del muro col piano contenente la scala d'altezza, è forza determinare sulle due verticali dei punti c', d', o sopra due altre qualunque tracciate però sulla faccia anteriore del muro, i punti corrispondenti ad f', t'', g', h' usando il medesimo processo che si è impiegato per determinare quei punti sulla verticale $e'\ e''$.

Non vi è che il caso in cui si trovi sul quadro il punto di concorso delle orizzontali f, f', t, t'' . . . . il quale possa dispensarci da questa doppia operazione.

257. *Osservazione III* — Per l'arco tracciato sulla faccia posteriore $n''\ b''$ del muro è necessario ripetere le medesime costruzioni ora indicate dopo aver determinati i punti d'', e'', c'' corrispondenti a d', e', c' che debbono trovarsi sopra delle rette $d'\ d''$, $e'\ e''$, $c'\ c''$ perpendicolari al piano $n'\ b'$.

Ma se per avventura si trovasse sul quadro il punto di concorso di quelle rette, converrà cercare ciascun punto a'' dell'arco nel modo indicato al N.° 249, considerando cioè la generatrici $(s_1\ s'_1,\ s'\ s'')$ . . . della superficie cilindrica costituente l'arcata.

258. *Osservazione IV.* — Se più arcate eguali $c\ d$, $c_1\ d_1$, $c_2\ d_2$ . . . fossero aperte nello stesso muro $a\ b$ (*Fig.* 86. *a*), la prospettiva di tutte si troverebbe colla medesima facilità con cui si è potuta determinare quella di una sola, poichè i punti di nascita degli archi, le loro sommità, i punti di mezzo di ciascun quadrante, e quelli in cui le verticali dei loro centri

sono incontrate dalle tangenti in questi punti si trovano evidentemente sulle medesime rette orizzontali.

Solo in questo caso conviene cercare la prospettiva ausiliaria a_1 b_1 (*Fig.* 86) della proiezione orizzontale del muro, per operare la divisione di questa retta secondo dimostra la (*Fig.* 86. *a*). A tal fine, dopo averne costruite le estremità a_1 e b_1 sceglieremo sulla linea d'orizzonte ausiliaria X Y un conveniente punto di concorso C che uniremo con b_1 all'oggetto di determinare sulla orizzontale condotta per a_1 la lunghezza a_1 b_2 da dividersi in parti proporzionali a quelle in cui si trova divisa la a b dai piedi degli spigoli verticali delle arcate e dei loro assi. I punti di divisione della a_1 b_2 congiunti con C daranno luogo alla divisione di a_1 b_1 nel modo voluto.

Trovate finalmente le prospettive delle orizzontali che passano per le origini, le sommità, i punti di mezzo dei quadranti e per quelli di concorso delle tangenti in quest'ultimi, seguendo lo stesso processo indicato al N.° 254, basterà elevare dai punti di divisione della a_1 b_1 altrettante verticali; e dai loro punti d'incontro con quelle orizzontali nascerà facilmente la prospettiva cercata.

259. *Osservazione V.* — Le difficoltà non aumentano nel caso in cui fosse richiesta la prospettiva di una o più arcate aperte in un muro, la cui faccia anteriore fosse inclinata all'orizzonte, che è quanto dire in un muro a scarpa. Poichè è sempre possibile costruire le prospettive delle proiezioni orizzontali delle linee di nascita delle sommità ec. le quali nel caso del muro verticale coincidono tutte con la retta a_1 b_1; e da quelle il passaggio alle prospettive delle obiettive rientra nel metodo ordinario.

PROBLEMA VIII. *Costruire la prospettiva di una serie di arcate circolari parallele, ed aventi il loro centro sopra una medesima retta perpendicolare al quadro.*

260. Supponiamo che le arcate proposte sieno costruite a sostegno di una volta a botte avente per asse la retta che passa per i loro centri. La *Fig.* 87. *a* sia la proiezione orizzontale dei muri A, B, su cui è costruita la volta, e di tutti i pilastri o piedritti degli archi che la sostengono; nel quadro

X Y T U (*Fig.* 87) sia $o' o''$ la linea d'orizzonte, *P* il punto principale, *P F* il terzo del raggio principale.

Si costruirà a parte una scala prospettica come è stato insegnato al N.° 233, e se vuolsi che le facce anteriori dei pilastri più vicini al quadro si trovino sul piano verticale $a\,a_1$ si prenderà su questa retta, a partire dal punto *a*, una lunghezza *a b* che esprima la dimensione di questa faccia; si tireranno *a P* e *b P*, e presa *b c* eguale al terzo della grossezza effettiva dei pilastri, la retta *c F* determinerà sulla *b P* il punto d, e quindi sarà *b d* la grossezza prospettica del primo pilastro.

Sommando in seguito la distanza fra i pilastri con la grossezza, si riporterà il terzo della somma da *b* in *e* sulla orizzontale $a\,a_1$; si unirà *F* con c, e il punto b_1 in cui la *b P* è incontrata dalla *F* e sarà la prospettiva del punto analogo a *b* ma corrispondente al secondo pilastro.

I punti d e b_1 sono, per la costruzione che li ha somministrati, i vertici di due quadrati aventi i lati paralleli e perpendicolari al quadro, e tripli respettivamente di *b c*, *e* di *b e*. Ora dalla *Fig.* 87. *a*, è facile rilevare che i vertici d ed e dei quadrati corrispondenti a tutti i pilastri si trovano sopra due rette parallele all'asse della volta, per cui anche i punti corrispondenti a c e ad *e* della *Fig.* 87 si troveranno sopra due rette parallele a questo asse. Quindi può inferirsene che unendo c ed e con *P*; ed unendo con *F* i punti c_1 ed e_1, in cui le rette *c P* ed *e P* incontrano la $a_1\,a_2$, si avrà sulla *b P* determinata la prospettiva $b_2\,d_1$ della grossezza del secondo pilastro, e il vertice omologo a *b* sul terzo pilastro.

Nello stesso modo si avranno le prospettive delle basi dei pilastri seguenti ed appoggiati al muro sinistro.

Per avere le basi di quelli appoggiati al piedritto destro della volta, si riporterà da *a* in a_1 la distanza fra i piedritti e preso $a_1\,b_1 = a\,b$ si condurranno le rette $a_1\,P$, $b_1\,P$ le parallele ad *X Y* condotte per *d*, b_2, d_2... determineranno le basi cercate $a_1\,b_1\,d_1$, $a_2\,b_2\,d_2$....

La ragione di questa operazione si trova facilmente osservando, che le basi dei pilastri sono comprese fra due sistemi di rette, le une parallele e le altre perpendicolari al quadro.

Trovate le prospettive delle basi, si condurranno dai punti

a, b; a_1, b_1 le verticali $a\ a'$, $b\ b'$; $a_1\ a'_1$, $b_1\ b'_1$ tutte eguali all'altezza effettiva dei pilastri: la orizzontale $a'\ a'_1$ determinerà la nascita del primo arco, e le rette $a'\ P$, $b'\ P$; $a'_1\ P$, $b'_1\ P$ saranno perciò le prospettive delle rette orizzontali e parallele costituenti il piano d'imposta di tutti gli archi che sostengono la volta. Laonde le prospettive complete delle facce visibili parallele al quadro si otterranno conducendo per i vertici corrispondenti delle loro basi altrettante verticali, e saranno:

$a\ b\ b'\ a'$, $a_2\ b_2\ b'_2\ a'_2$ . . $a_3\ b_3\ b'_3\ a'_3$, ...

mentre quelle delle facce di grossezza che sono perpendicolari al quadro saranno:

$b\ d\ d'\ b'$, $b_2\ d_2\ d'_2\ b'_2$ . . . . $b_3\ d_3\ d'_3\ b'_3$ . . . .

i punti d', d'_1; b'_2, b'_3; d'_2, d'_3. . . . dovranno trovarsi sopra altrettante rette parallele alla linea d'orizzonte.

Siccome i centri di tutti gli archi sono sull'asse della volta che è orizzontale e perpendicolare al quadro, basterà trovare uno di essi per esempio quello (s, s') che è al mezzo della corda ($b\ b_1$, $b'\ b'_1$): allora la retta $s'\ P$ determinerà sulla prospettiva delle corde di tutti gli altri il centro e il raggio dell'arco corrispondente.

261. *Osservazione.* — Quando l'asse della volta a botte non fosse perpendicolare al quadro si devono fare le stesse operazioni e nel medesimo ordine: esse riescirebbero un poco più complicate, ma non più difficili.

E se la direttrice della volta invece di essere circolare, fosse ellittica o policentrica, le medesime costruzioni determinerebbero egualmente gli assi nel primo caso, e i centri nel secondo di ciascheduno degli archi che la sostengono.

PARALLELA IX. *Costruire la prospettiva di una volta a crociera.*

262. La volta a crociera ricuopre un'area che ordinariamente è quadrata, ma può essere anche rettangolare o parallelogrammica: essa componesi di quattro parti appartenenti due a due ad una medesima superficie cilindrica. Per concepire la sua natura, suppongasi un'area quadrata $a\ b\ c\ d$, (*Fig* 88. *a*) e sul piano verticale $a_1\ b_1$, come sul suo opposto e parallelo $c_1\ d_1$ s'immaginino descritti all'altezza del piano di nascita

due semicircoli aventi per diametro n b, e quindi costruita la superficie cilindrica che ha uno di questi semicircoli per direttrice e le generatrici perpendicolari al suo piano. S'immaginino in seguito descritti sugli altri due piani verticali paralleli $n_2 d_2$ e $b_2 c_2$ altri due semicircoli aventi il loro diametro eguale a $b c = n b$ e il loro centro situato alla medesima altezza dei precedenti; e si concepisca un'altra superficie cilindrica che abbia per direttrice uno di questi semicircoli e le sue generatrici perpendicolari al suo piano. Le due superficie cilindriche si taglieranno, e le quattro porzioni di esse comprese fra i quattro semicircoli costituiranno la volta che ricuopre l'area proposta.

La intersezione di questi cilindri si compone di due ellissi che hanno per proiezioni le diagonali $a c$ e $b d$; il loro punto comune o è la proiezione della sommità della volta.

La volta in questione può esser sostenuta da quattro pilastri posti agli angoli dell'area: in questo caso che è quello da noi considerato, quattro archi di egual grossezza dei pilastri limitano la volta dai quattro lati dell'area medesima. Noi supporremo inoltre che i piani di questi archi, o ciò che torna lo stesso, le facce dei pilastri sieno parallele e perpendicolari al quadro.

Ciò premesso, sia $X Y T U$ il quadro (*Fig.* 88): $o' o''$ la linea d'orizzonte, P il punto principale, e il punto di vista sia distante dal quadro di due volte $P F$. Prendasi $a' b'$ parallela ad $o' o''$ per prospettiva della traccia orizzontale della faccia anteriore del primo pilastro di sinistra: si prolungherà $a' b'$, si prenderà $b' a''$ eguale alla distanza $a_1 b_1$; $a'' b'' = a' b'$, e si costruirà di poi la prospettiva delle parti visibili delle basi dei quattro pilastri come è stato praticato al N.° 260. Dai punti a', b', c'; n_2, b_2, ...; a'', b'', c''; n_3, ... si condurranno altrettante verticali; e presa $n' a'_1$ eguale all'altezza dei pilastri, la parallela ad $o' o''$ condotta per a'_1 taglierà le verticali precedenti in tanti punti che congiunti con P daranno le prospettive $a'_1 P$, $b'_1 P$ ... delle orizzontali prodotte dalla intersezione del piano di nascita della volta coi piani verticali delle facce dei pilastri perpendicolari al quadro, per cui si avranno subito le prospettive delle basi superiori.

Sul mezzo della retta $b'_1 a''$, e sull'altra ad essa parallela che congiunge i vertici omologhi delle basi superiori dei due

pilastri opposti, si troveranno i centri de' due semicircoli basi del cilindro perpendicolare al quadro; talchè si potranno costruire subito le loro prospettive, delle quali una sarà b', n' a''_1. Anche sui piani verticali a' P, b'' P perpendicolari al quadro dovrà costruirsi la prospettiva dei semicircoli corrispondenti, quando la posizione del punto di vista sia tale che resultino visibili sul quadro, come avviene nell'attuale figura sopra il piano a' P. La costruzione di questi può farsi come abbiamo indicato al N.° 249 profittando del semicircolo b', n' a'', o dell'altro ad esso parallelo.

La prospettiva della volta sarà ottenuta allorchè avremo costruita quella dei suoi spigoli salienti. Le rette c' a_2, b_2 c'' sono le prospettive delle proiezioni orizzontali di questi spigoli, ed a è la prospettiva della proiezione della sommità. Due sono i metodi atti a determinare la prospettiva domandata.

Primo Metodo. — Conducasi una retta qualunque m P: sarà essa la prospettiva della proiezione orizzontale d'una delle generatrici perpendicolari al quadro: il piano verticale condotto per questa generatrice taglierà il semicerchio b'_1 n' a'', in un punto la cui prospettiva è la estremità m' della verticale m m'; laonde m' P sarà la prospettiva della generatrice suddetta. Ora è evidente che se dai punti u, u_1 in cui m P taglia le diagonali c' a_2, b_2 c'' s'inalzano le verticali u u', u_1 u'_1 fino al loro incontro con m' P, i punti u' ed u'_1 apparteranno ai semispigoli a o, d o della volta.

Tirando le orizzontali m' m'', u' u'_3, u'_1 u'_2, la prima determinerà il punto m'' situato alla medesima altezza di m' sul semicerchio b'_1 n' a''_1, e le altre due saranno le prospettive di due generatrici parallele al quadro, e contenute nel piano orizzontale condotto per m'' P; talchè la generatrice m'' P essendo contenuta nel medesimo piano, taglierà le precedenti nei punti u'_2, u'_3 che apparterranno all'altra metà o b, o c degli spigoli medesimi (*Fig.* 88 a).

I punti u'_2, u'_3 si possono ottenere ancora, conducendo P m_1 in modo che tagli b' a'' in un punto m_1 distante da a'' quanto lo è m da b', e dai punti u_2, u_3 in cui questa retta interseca le diagonali c' a_2, b_2 c'' elevando due verticali fino all'incontro delle orizzontali condotte dai punti u', u'_1.

Nel modo istesso possiamo determinare altrettanti punti

quanti vogliamo. La prospettiva della sommità della volta si troverà prolungando P a fino in n che sarà il punto di mezzo di $b' a''$; di là conducendo la verticale $n n'$, e congiungendo n' con P si avrà la prospettiva $n' P$ della generatrice che passa per la sommità cercata. d'altronde la proiezione orizzontale di questa ha per prospettiva il punto a; dunque il punto s' in cui la retta $n' P$ è incontrata dalla verticale condotta per a sarà la sommità richiesta.

Secondo Metodo. — Immaginiamo condotti per i punti del semicircolo $a_1 b_1$ (*Fig.* 88. *a*) abbattuti in m ed m_1 due piani tangenti alla superficie cilindrica che ha per direttrice il semicircolo stesso. Le sezioni fatte da questi piani tangenti nel piano del semicircolo $a_1 b_1$ saranno due tangenti ad esso nei punti m ed m_1, e concorrenti in un medesimo punto della verticale condotta per il suo centro, poichè noi supponiamo che questi punti si trovino sopra una medesima retta parallela ad $a_1 b_1$. Le sezioni fatte dagli stessi piani tangenti nei piani degli spigoli della volta saranno pure altrettante tangenti a questi spigoli, le quali concorreranno evidentemente in un medesimo punto della verticale condotta per la sua sommità o. I punti di contatto si troveranno sulle rette proiettate orizzontalmente in $m u'$, $m_1 u'''$ perpendicolari al quadro, e il punto di concorso delle tangenti si troverà alla medesima altezza di quello in cui concorrono le tangenti al semicircolo $a_1 n b_1$. Finalmente un piano orizzontale condotto per la sommità della volta riescirà tangente alle due superficie cilindriche che la compongono, e i piani degli spigoli rimarranno intersecati secondo due rette tangenti nella sommità dell'uno e dell'altro spigolo.

Rammentando ora che le prospettive d'una curva e della sua tangente resultano tangenti fra loro nella prospettiva del loro punto di contatto, si vede che costruendo le tracce dei piani tangenti sul piano del semicircolo direttore, le loro intersezioni coi piani degli spigoli conosciuti a priori, le generatrici di contatto, si riesce a trovare non solo la prospettiva dei diversi punti degli spigoli, ma anche quella delle loro tangenti in questi punti.

Prendasi la verticale indefinita $b' b'_1$ per scala d'altezza, e scelto il punto C sulla linea d'orizzonte, sia $C b'$ la intersezione d'un piano verticale condotto per $b' b'_1$ col piano oriz-

zontale che passa per a' a''. Se per la sommità della volta s'immagina condotto il piano tangente, sarà il piano b'_1 b' a'' da esso tagliato secondo la n' N' parallela ad o' o'', e il piano contenente la scala d'altezza secondo la orizzontale N' C; onde questa retta sarà capace di somministrare l'altezza prospettica di tutti i punti della generatrice che passa per la sommità della volta. Così volendo questo punto, si tirerà da s la verticale s t'_1 e la parallela alla linea d'orizzonte s s_1; da s_1 la verticale s_1 $s_{1'}$, e la orizzontale del punto s_1 darà sulla s t'_1 la prospettiva s'_1 della sommità.

Il piano dello spigolo, la cui traccia orizzontale ha per prospettiva la retta a_3 s c' taglia il piano C b' b'_1 secondo la verticale c''_1, n'', talchè n'' sarà un punto della intersezione del piano C N' n' coll'altro a_3 s c''_1; un altro punto è s'_1: dunque congiungendo n'' con s'_1, la retta n'' s'_1 sarà tangente in (s, s'_1) allo spigolo c' a_3. Per la medesima ragione prolungando c'' b_1 fino in p_1 sulla C b', la verticale elevata da p_1 determinerà sulla C N' il punto p' che basterà unire con s'_1 per avere la tangente nella sommità della volta allo spigolo b_3 c''.

Cerchiamo i punti situati sulla generatrice (m P, m' P) il piano orizzontale condotto per questa generatrice taglia il piano b'_1 b' a'' secondo la m' M' parallela ad o' o'', e il piano contenente la scala d'altezza secondo la C M'; laonde condotte dai punti u, u_1 le orizzontali u $u_{1'}$, u_1 $u_{1'}$ e le verticali u_1 u'_1, u_1 u'_1 fino alla retta C M', le parallele ad o' o'' tirate da u'_1 e da u'_1 determineranno sulla m' P i punti cercati u', u'_1, e i loro prolungamenti taglieranno la generatrice simmetrica (m$_1$ P, m'' P) in altri due punti u'_2, u'_2 che si troveranno coi primi sullo stesso piano orizzontale m'' M' C.

Per avere le tangenti nei quattro punti u', u'_1, u'_2, u'_3 basta trovare il loro punto di concorso sulla verticale s s'_1. A tale oggetto si osservi che il piano tangente lungo la generatrice m' P taglia il semicircolo b'_1 n' a'', secondo la tangente m' t, e quindi il punto t determina l'altezza del punto di concorso cercato. Condotto allora il piano orizzontale t T, C, e prolungata la verticale del punto s_1 fino in t_1, si tirerà da t_1 una parallela ad o' o'', ed avremo il punto t'_1 richiesto o sulla retta che congiunge t con P, o sulla verticale del punto a.

Noteremo finalmente che gli spigoli verticali dei pilastri

riescono necessariamente tangenti agli spigoli della volta nei loro punti di nascita; quindi noi abbiamo trovato per ciascuno spigolo cinque punti e cinque tangenti, che sono ordinariamente sufficienti per costruirne la prospettiva

263. *Osservazione I.* — Il primo metodo oltre a non dare le tangenti nei punti che si determinano, ha l'inconveniente di somministrare questi punti mediante la intersezione di rette che talvolta può aver luogo sotto un angolo molto acuto è inapplicabile per trovare la sommità della volta nel caso in cui il punto principale P si trova sulla verticale del punto s.

Il secondo metodo invece non è soggetto ad eccezione alcuna; i punti cercati possono aversi sempre con la intersezione di due linee che si tagliano ad angolo retto, o quasi retto; e somministra per ciascuno di essi la respettiva tangente. Per tutti questi motivi esso è preferibile all'altro.

264. *Osservazione II.* — Sovente avviene nelle costruzioni che più volte a crociera eguali si succedono sostenute da due file di pilastri equidistanti. In questo caso si osserverà che le sommità o (*Fig.* 88. *a*) di tutte si troveranno sopra una medesima retta orizzontale, che lo stesso ha luogo per ciascun gruppo di punti u, u'; u'', u''' appartenenti agli spigoli Talche determinata la prospettiva della proiezione orizzontale di tutti gli spigoli e dei pilastri le operazioni indicate per conseguire il disegno della immagine di una sola volta a crociera bastano per quella di un qualsivoglia numero di queste volte purchè siano di eguali dimensioni ed aventi la loro origine sopra un medesimo piano orizzontale.

265. *Osservazione III.* — Ogni qualvolta si creda meglio attenersi al secondo piuttosto che al primo metodo per costruire la prospettiva della volta, gioverà ricorrere alle linee già tracciate sul piano contenente la scala d'altezza per costruire la prospettiva del semicircolo visibile sul piano verticale $a'P$.

Poichè è evidente che il punto s'' in cui la orizzontale del punto s incontra la $a'a_1$ sarà la proiezione orizzontale prospettica del centro di quel semicircolo; onde sulla verticale condotta da s'' si troverà la sommità della prospettiva di esso là dove la verticale medesima è incontrata dalla orizzontale del punto s_1, e si troverà pure il punto t''_1, ove con-

correr debbono le tangenti ai punti di mezzo dei quadranti, il quale verrà determinato dall'incontro della orizzontale $t_1 t'_1$.

Parimente la orizzontale del punto u_1 somministra sopra $a' a_2$ la proiezione orizzontale prospettica del mezzo del quadrante che ha la sua origine in a'_2; e siccome l'altezza di questo punto è data dalla orizzontale $u'_2 u'_1$ così la sua prospettiva si troverà in u''_1 ove quella orizzontale è tagliata dalla verticale elevata da u'.

266. *Osservazione IV.* — Se le generatrici della volta a crociera fossero inclinate in un modo qualunque al quadro, il processo della soluzione precedente non soffrirebbe modificazione alcuna.

Problema X. *Costruire la prospettiva di una volta a schifo*

267. Supponiamo l'area quadrata *a b c d* (*Fig.* 88 *a*) chiusa da quattro muri *a b*, *b c*, *c d*, *d a* terminati ad un medesimo piano orizzontale che è quello di nascita della volta. Immaginiamo che i due muri *a b*, *c d* prolungandosi al di sopra del piano di nascita si pieghino però per modo da formare una superficie avente per direttrice una curva proiettata in *b c*, e che i due muri *b c*, *a d* prolungati al di sopra del piano di nascita si pieghino a partire da quel piano per modo da formare una seconda superficie cilindrica avente per direttrice un'altra curva proiettata in *a b*; le due superficie si intersecheranno secondo due linee piane proiettate in *a c* e *b d*, e formeranno la volta a schifo, i cui spigoli sono rientranti a differenza di quelli della volta a crociera che sono salienti

La prospettiva di queste volte si riduce evidentemente a quella degli spigoli e dei muri che servono ad essa di piedritti. Noi abbiamo considerato nella *Fig.* 89 una di queste volte: abbiamo supposto che i piedritti sieno paralleli e perpendicolari al quadro, che *P* sia il punto principale, *F F'* la linea d'orizzonte, e *P F* eguale alla metà della distanza del punto di vista al quadro

Costruita la prospettiva delle tracce orizzontali dei muri e quella delle loro intersezioni fino alla nascita della volta, non manchera che la prospettiva degli spigoli alla completa soluzione

del problema. Supponiamo che la volta abbia un' apertura rettangolare alla sommità, e che perciò le direttrici di ambedue i cilindri parallele e perpendicolare al quadro, sieno due quadranti eguali; i piani degli spigoli riesciranno inclinati di 45° al quadro, e la prospettiva delle tracce dei primi sul piano di nascita sarà quella delle proiezioni dei secondi.

Il quadrante $n\ u\ s$ descritto col centro in o sulla linea di nascita e col raggio $o\ n$ sia la direttrice del cilindro che nasce sul muro di sinistra: sarà P o o' la prospettiva del suo asse; onde presa $o\ x$ eguale alla metà di $o\ n$, e tirata $F\ x$ avremo il punto o', quindi la $n\ o'$ diagonale d'un quadrato avente per dimensioni $n\ o$, $o\ o'$ che sarà proiezione dello spigolo corrispondente a $d\ b$ (*Fig.* 88 *a*) sul piano di nascita della volta: le prospettive adunque di tutti i punti di questo spigolo si troveranno sopra le verticali condotte dalle loro proiezioni prese sulla $n\ o'$.

Così per ottenere la sommità dello spigolo che è proiettata in o', si condurrà la verticale $o'\ t'$, e la retta $P\ s$ che è generatrice del cilindro formato dal muro sinistro; questa retta incontrerà la $t'\ o'$ in s' prospettiva della sommità cercata. Considerando un altro punto qualunque (u_1, u) della direttrice, la retta $P\ u$ determinerà sulla $n\ o'$ la proiezione u_2; la verticale condotta da u_2 e la retta $P\ u_1$ generatrice corrispondente al punto considerato, determineranno in seguito col reciproco loro incontro la prospettiva u' del punto cercato.

In egual modo può costruirsi lo spigolo destro della volta.

268. *Osservazione I.* — Lo spigolo $n\ u'\ s'$ può considerarsi come prospettiva della proiezione obliqua del quadrante $n\ u\ s$ fatta sul piano verticale $n\ o'\ t'$ da rette perpendicolari al piano del quadrante medesimo. Quindi un punto qualunque u' può determinarsi ancora cercando le proiezioni prospettiche su quel piano delle ordinata $u\ z$ e della tangente $u\ t$ al quadrante. Tiriamo a tale oggetto la verticale $n\ s''$ e prolunghiamo la $z\ u$ e la $t\ u$ fino ad incontrare in z'_1 e t'_1 la verticale medesima: saranno z'_1 e t'_1 un punto delle proiezioni cercate; un'altro punto si troverà conducendo le proiettanti $P\ z$, $P\ t$ fino alla verticale del punto o', e i punti z' e t' uniti respettivamente con z'_1 e t'_1 somministreranno il punto u' e la tangente $t'_1\ t$. Così prolungando la tangente in s al quadrante fino in s'', la

s' s'' dovrà resultare tangente in s' allo spigolo, cercato al quale sarà pure tangente in n la verticale n s''.

269. *Osservazione II.* — Se l'apertura rettangolare fatta alla sommità della volta fosse molto piccola o non vi fosse, il piano contenente le verticali o t, o' t' potrebbe essere tanto prossimo al punto P da rendere incerte le intersezioni di o' t' con le rette P z', P s', P t'; in questo caso si può costruire una scala d'altezza nel modo seguente.

Sopra una verticale qualunque o''' t''' si proiettino i punti o, z, s, t con rette parallele alla linea d'orizzonte F F'; si scelga un conveniente punto di concorso c'_3 su quest'ultima e si congiunga con o''', z''', s''', t''' per il punto o'''_1, in cui la parallela ad F F' condotta per o' incontra la c'_3 o''' conducasi una verticale, e le rette c'_3 z''', c'_3 s''', c'_3 t''' determineranno su di essa i punti z'''_1, s'''_1, t'''_1 da riportarsi sopra la o' t'.

270. *Osservazione III.* — Se i piedritti della volta fossero inclinati comunque al quadro, l'angolo ottico fra i cui lati sarebbe essa compresa darebbe modo di costruire la prospettiva della proiezione orizzontale non solo dei piedritti, ma anche degli spigoli, ed allora un certo numero di generatrici d'uno dei cilindri servirebbe, come nel caso precedente a determinare altrettanti punti degli spigoli medesimi.

Problema XI. *Costruire la prospettiva di una lunetta circolare aperta in una volta cilindrica, di cui le generatrici sono perpendicolari al quadro.*

271. Questa lunetta resulta dalla penetrazione del cilindro dato con un'altro cilindro avente per direttrice una certa curva, che possiamo supporre essere un semicircolo, e per asse una retta perpendicolare all'asse del primo situata nel medesimo piano orizzontale; talchè la soluzione del problema sarà completa costruendo la prospettiva della curva d'entrata e di quella d'uscita.

I. Curva d'uscita. — Sia P o'' (*Fig.* 89) l'asse del cilindro facente parte della volta, ed o'' o_1 quello della lunetta. Immaginiamo tracciato sulla faccia esterna del muro, che è verticale, il semicircolo direttore del cilindro penetrante; e trasportatolo parallelamente a sè stesso finchè il suo centro

sia venuto in o'', immaginiamo che faccia un quarto di rivoluzione prima attorno all'asse $o''\,o_1$, poi attorno alla verticale del punto o'; il suo piano diverrà così parallelo al quadro, e la posizione del semicircolo sarà $n'\,m\,n$ col diametro $a\,o''\,a'$ verticale.

Prendasi ora sulla retta $m\,o''\,o_1$ la parte $o''\,n'$ e l'altra $o''\,n''$ eguali alla metà di $o''\,m$: i punti n', n'' uniti col punto di fuga F' determineranno sull'asse $P\,o''$ la $d\,d'''$ che sarà prospettiva ausiliaria del diametro $a'\,o''\,a$, o la larghezza prospettica della lunetta: per cui le parallele $d\,d_1$, $d'''\,d'''_1$ alla $F\,F''$ determineranno le prospettive d_1, d'''_1 dei punti di nascita della curva d'uscita, nei quali essa avrà per tangenti due rette verticali.

La prospettiva d'un'altro punto qualunque, per esempio di quello che sulla direttrice sarebbe proiettato in b' al mezzo dell'arco $m\,b'\,a'$ si può determinare nel seguente modo Si proietti b' in c' sul diametro $a'\,o''\,n$, e si divida la $o''\,d'''$ nello stesso rapporto che $o''\,c'\,a'$; avremo il punto d'' e quindi z_2 per prospettiva del punto c' sulla retta $d'''_1\,d_1$. Per la retta $d''\,z_2$ immaginiamo condotto un piano parallelo al quadro: esso taglierà il cilindro della volta secondo un circolo la cui prospettiva avrà per centro d'' e per raggio $d''\,z_2$; e la prospettiva del punto b' dovrà trovarsi sopra questo circolo e sopra la generatrice secondo la quale il cilindro medesimo sarebbe tagliato da un piano orizzontale condotto all'altezza del punto b'. Per aver questa generatrice si cerchi la sezione circolare $o_2\,b'_1\,n'_1$ prodotta dal piano parallelo al quadro condotto per $o''\,o_2$, la quale ha per centro o'' e per raggio $o''\,o_2$; e la $b'\,c'$ prolungata determinerà su di essa un punto b'_1 della generatrice cercata, la cui prospettiva sarà $b'_1\,P$. Così il punto u''' sarà la prospettiva del punto b'.

La divisione di $o''\,d'''$ in parti proporzionali a quelle di $o''\,c'\,n'$ si può ottenere conducendo $n'\,n'$ e la sua parallela $c'\,c'_1$; quindi tirando $c'_1\,F'$.

Nello stesso modo si può trovare u'' prospettiva del punto la cui proiezione sulla direttrice sarebbe in b mezzo del quadrante $a\,b\,m$.

La sommità della curva d'uscita è proiettata sulla direttrice della lunetta nel punto n' la sua prospettiva deve tro-

versi evidentemente sull'arco $o_1 b'_1$ e all'altezza dello stesso punto n'; dunque la parallela ad $F F^v$ condotta per n' determinerà su quest'arco il punto a'_1, e la retta che lo congiunge con P resulterà tangente in a'_1 alla curva che si cerca.

La tangente nel punto u''' è la intersezione del piano tangente al cilindro della lunetta lungo la generatrice del punto b' col piano tangente al cilindro della volta lungo la generatrice $P u''' b'_1$ (*Geom. Descritt.*). Il primo piano tangente taglia il piano della direttrice secondo una retta che le è tangente; e il suo abbattimento $b' v''$ determina l'altezza del punto v'' in cui incontra l'asse verticale della direttrice. L'altro piano tangente è intersecato dal piano verticale $o'' o_1 b'_1$ secondo la retta $b'_1 v'$ tangente in b'_1 all'arco $o_1 n'_1$; laonde tirando $v'' v'$ parallela ad $F F^v$, avremo il punto v' per cui deve passare la tangente del punto u'''. Per le stesse ragioni la retta $v' u''$ resulterà tangente in n'' alla curva richiesta, della quale abbiamo così trovati cinque punti e cinque tangenti.

II. Curva d'entrata. — La prospettiva di questa curva sarà quella del semicircolo direttore, e può costruirsi co' metodi già insegnati (N.° 249). Ma avendo trovata quella della curva d'uscita giova operare nel seguente modo. Si prolunghi la $d''' d'''$, e si avrà la prospettiva a d'uno dei punti di nascita: si otterrà poi il punto f' corrispondente ad u''' conducendo per questo una parallela ad $F F^v$, prolungando $d'' z_1$ fino in f e conducendo la verticale $f f'$.

La prospettiva a''_1 della sommità si troverà all'incontro del prolungamento di $a' a'_1$ colla verticale $o_1 a''_1$, condotta per la prospettiva o_1 del centro, la quale è somministrata dal prolungamento di $o'' o_1$. Tirando la retta $P a''_1$ si avrebbe la tangente n''_1; prolungando $o_1 n''_1$ fino all'incontro di $v'' v'$ avremo un punto che unito con f' darà la tangente in f'.

Di tutte queste operazioni è facilissimo rendersi conto, se è stato ben compreso ciò che sopra si è detto.

272. *Osservazione I.* — Si potrebbero cominciare le operazioni colla prospettiva della curva di entrata, costruita la quale, si avrebbe immediatamente sull'asse $P o''$ del cilindro della volta la prospettiva ausiliaria d''' d del diametro di quella divisa immediatamente nelle parti $d''' d''$, $d'' o''$ . . Allora per avere la prospettiva d'un punto della curva d'uscita,

per esempio di quello corrispondente ad f', basterebbe condurre da f' la parallela ad $F\ F'$ fino all'incontro u'' col circolo $z_1\ u'''$ sezione fatta nella volta dal piano parallelo al quadro condotto per la retta $f\ z_1\ d''$.

273. *Osservazione II.* — La prospettiva di una lunetta aperta in un cilindro, le cui generatrici sono parallele al quadro, si comporrà di due semicircoli facili a costruirsi, poichè tanto la curva d'entrata come quella d'uscita sono le intersezioni col quadro di due superficie coniche aventi la loro base circolare e parallela al quadro medesimo.

274 *Osservazione III.* — La prospettiva d'una serie di lunette aperte in una medesima volta cilindrica si otterrebbe speditamente dopo aver levata quella di una di esse. Il metodo da tenersi sarebbe analogo a quello praticato nel caso di una serie di arcate (N.i 252, 254).

275. *Osservazione IV.* — Se un'altra o più lunette si trovassero diametralmente opposte, come si vede nella *Fig.* 89; siccome esse sono ordinariamente aperte o nella medesima volta a botte nei due muri di fianco, o in volte di eguali direttrici come nel caso attuale, è manifesto che costruita la prospettiva di quella di destra, basteranno delle parallele ad $F\ F'$ condotte per i diversi punti d'''_1, d_1, e, o_1, f. . . . per determinare sulle linee di nascita di sinistra i punti corrispondenti. Le verticali elevate da questi ultimi, e altrettante parallele ad $F\ F'$ condotte da a''_1, f, a'_1. . . daranno i punti omologhi delle lunette richieste

276 *Osservazione V.* — Le volte a botte, a crociera, a schifo, non sono le sole che occorrono nelle costruzioni. L'architettura impiega sovente altre specie di volte tanto semplici che composte, e conseguentemente può verificarsi il caso in cui debbasi costruire la prospettiva di una volta diversa da quelle contemplate nei numeri precedenti.

Abbiamo però veduto come la loro immagine, per ciò che spetta alla prospettiva lineare, riducasi in ultima analisi alla prospettiva degli spigoli, delle direttrici, in breve alla prospettiva di semplici linee.

Crediamo che quanto precede sia sufficiente per porre in grado lo studioso di costruire la prospettiva di tali linee qualunque possa essere la loro posizione rispetto al quadro;

quindi pensiamo non sia necessario produrre altri esercizi sulle volte.

Problema XII. *Costruire la prospettiva di fronte delle cornici.*

277. Le cornici possono considerarsi come superficie cilindriche aventi per direttrici una linea piana composta di rette e curve combinate fra loro, e le generatrici perpendicolari al piano di questa linea. La direttrice porta anche il nome di profilo.

È evidente che la prospettiva del profilo e il punto di concorso dei diversi spigoli della cornice sono sufficienti per la costruzione della prospettiva di essa. Se questo punto di concorso non avesse luogo sul foglio potremo supplirvi colla prospettiva d'una sezione retta, cioè del profilo medesimo considerato in un'altra posizione, ossivvero con quella d'un'altra sezione piana se riescisse più semplice.

Suppongasi che la verticale del punto a' (*Fig.* 90) sia lo spigolo d'un monumento di pianta rettangolare avente le sue facce parallele e perpendicolari al quadro; e che $a'\ y'$ sia l'altezza prospettica della cornice corrispondente alla distanza dall'obiettivo; $o'\ o''$ sia la linea d'orizzonte, P il punto principale, e la distanza del punto di vista al quadro sia doppia di $F\ P$.

Quando si conoscesse la prospettiva della linea secondo la quale si intersecano le due cornici che coronano le due facce aventi per spigolo comune la verticale del punto a', basterebbe congiungere i suoi vertici con P, e condurre da essi altrettante parallele ad $o'\ o''$ per avere la prospettiva delle cornici medesime. È noto che questa intersezione è piana, e che il suo piano divide in due parti eguali l'angolo diedro formato dalle facce del monumento; per cui supponendo che $a'\ d$ sia la lunghezza della faccia del monumento parallela al quadro, si prenderà $a'\ b$ eguale alla metà di a' d, e si tracceranno le rette $d\ P$, $b\ F$: queste si incontreranno in un punto p che unito con a' somministra la retta $p\ a'\ x'$ facente col piano del quadro un angolo di 45°: talchè le due rette $a'\ x'$, $a'\ y'$ determinano il piano della intersezione che si vuol costruire.

Ora qualunque sia il contorno di questa linea potremo

sempre trovarne tanti punti quanti abbisognano. A tale oggetto conduciamo le orizzontali $a' P$, $y' P$ che sono distanti fra loro dell'altezza totale del profilo, e immaginiamo che la cornice perpendicolare al quadro sia taglhata da un piano ad esso parallelo condotto per la verticale $a\ y$: la sezione sarà il profilo, la cui forma deve esser data; e siccome la sua altezza alla distanza del piano secante è $a\ y$, noi potremo facilmente costruirlo. Supponiamo che sia $x\ a\ y$; si proiettino i suoi punti principali sulla orizzontale $a\ x$, e sulla verticale $a\ y$; congiunti in seguito i punti di divisione della $a\ x$, e quelli della $a\ y$ con P dividansi le rette $a'\ x'$, $a'\ y'$ prospetticamente nello stesso rapporto che $a\ x$ ed $a\ y$. Otterremo così sulla $a'\ x'$ i piedi delle ordinate verticali, e sopra $a'\ y'$ quelli delle ordinate orizzontali di tutti i punti del profilo considerato. Per avere la prospettiva d'un'altro punto di ciascuna di queste ultime, si condurrà per un punto qualunque e del prolungamento di $a'\ x'$ una verticale e s ed una parallela e e' alla linea d'orizzonte. Dal punto e' in cui la e e' incontra la $P\ a\ a'$ si tirerà una verticale $e'\ s'$ fino all'incontro di $P\ y\ y'$. Allora la $e'\ s'$ sarà l'altezza del profilo sul piano parallelo al quadro e' e s, la quale può riportarsi insieme con tutti i suoi punti di divisione sulla e s per mezzo di altrettante parallele ad $o'\ o''$. Le rette che uniscono i punti di divisione della e s con i corrispondenti trovati sopra $a'\ y'$ saranno le prospettive delle ordinate orizzontali, e il loro prolungamento determinerà sulle verticali abbassate dai punti di divisione della $a'\ x'$ altrettanti punti del profilo cercato, che sarà $x'\ y'\ a'$. Conducendo allora dai vertici di questo altrettante parallele ad $o'\ o''$, e altrettante rette concorrenti in P, si otterranno le prospettive degli spigoli di ambedue le cornici.

277. *Osservazione I* — La divisione di $a'\ x'$ può ottenersi anche nel modo seguente:

1.° Si condurranno per x' una retta qualunque $x'\ n$, ed una parallela $x'\ m$ ad $o'\ o''$, sulla quale si determinerà il punto m col prolungamento di $P\ a'$.

2.° Riportati con una cartina sulla $x'\ n$ i punti di divisione di $a\ x$ si dividerà in altrettante parti proporzionali la $x'\ m$ per mezzo di rette parallele ad $n\ m$.

3.° Si congiungeranno infine i punti di divisione della $x' m$ con P.

Seguendo questo secondo metodo possiamo anche fare a meno del profilo $x\ a\ y$ costruito nella proporzione corrispondente alla posizione che occupa nel quadro.

279. *Osservazione II.* — La facilità delle costruzioni nella prospettiva delle cornici dipende dalla scelta opportuna delle verticali, come e s, su cui si determinano i piedi delle ordinate orizzontali.

Così, a cagion d'esempio, in un monumento di pianta quadrata (*Fig.* 91), si determineranno le altezze sulle costole degli angoli e sulla verticale del punto z, intersezione delle due diagonali della pianta, poichè questa verticale è la linea secondo cui si tagliano i piani dei profili di tutti e quattro gli angoli.

Se il monumento fosse rettangolare, si determineranno le altezze sulle costole degli angoli e sulle verticali dei punti z', z'' provenienti dalle intersezioni dei piani che dividono gli angoli stessi per metà.

Problema XIII. *Costruire la prospettiva obliqua d'una cornice.*

280. Prenderemo per oggetto un frontespizio, il quale ci offre l'esempio delle cornici orizzontali e di quelle inclinate all'orizzonte. La sua proiezione orizzontale sia $A\ C_1$ (*Fig.* 92. *a*); la distanza del punto di vista al quadro sarà determinata dall'angolo ottico l o l'.

I. Cornice orizzontale. — È facile a vedersi che la prospettiva dei profili proiettati in $C\ D$ e $C_1\ D_1$ basta alla costruzione della prospettiva della cornice orizzontale del frontespizio. Determinata la prospettiva $a\ c_1$ della proiezione dell'oggetto (*Fig.* 92), quella del profilo proiettato in $e_1\ d_1$ si troverà nel modo seguente.

Sulla scala d'altezza $F'\ Z'$, e a partire dalla linea $o''\ x\ v$, che supporremo essere la intersezione del piano contenente la $F'\ Z'$ col piano orizzontale condotto per lo spigolo più basso dell'oggetto, prenderemo $x\ x'$ eguale all'altezza della cornice del frontespizio, e sopra una verticale $v\ z$ compresa fra le due

linee $o'' x$, $o'' x'$, ne costruiremo il profilo $z\ w\ v$: avremo allora le altezze di tutti gli spigoli o delle ordinate orizzontali del profilo. Colla verticale del punto c_2 potremo determinare su quella del punto c_1 l'altezza $c'_1\ d''_1$ del profilo e tutti i piedi delle sue ordinate orizzontali; determineremo in seguito colla verticale del punto d_2 i punti omologhi su quella del punto d_1 ed avremo la prospettiva delle ordinate orizzontali.

Restano a trovarsi le ordinate verticali: per queste basterà dividere la retta $c_1\ d_1$ in parti proporzionali agli aggetti di tutti i membri della cornice. A tal fine si proiettino sopra una cartina $s_1\ t_1$ questi aggetti, si riporti la cartina in una posizione conveniente $s\ t$, e potremo allora dividere la $c_1\ d_1$ in parti proporzionali a quelle, in cui le ordinate verticali del profilo dividerebbero la $z\ a$; laonde le verticali dei punti di divisione della $c_1\ d_1$ determineranno il profilo cercato $c_1'\ d'_1$. In egual modo si costruirà il profilo ($c\ d$, $c'\ d'$); e le rette che uniscono i vertici di questo con quelli dell'altro ($c_1\ d_1$, $c'_1\ d'_1$) somministreranno la prospettiva della cornice orizzontale proposta

Del frontespizio dato è visibile sul quadro anche la porzione di cornice orizzontale del fianco sinistro proiettata in $A\ B\ C\ D$, e prospetticamente in $n\ b\ c\ d$. Per ottenerla si osserverà che i suoi spigoli essendo paralleli ad $a\ c$, dovranno tutti concorrere in o' punto di concorso di $a\ c$ e $b\ d$; per cui basterà:

1.° Dividere la $a\ b$ in parti proporzionali agli aggetti della cornice; per lo che potranno servire ottrettante parallele ad $n\ c$ condotte per i punti di divisione della $c\ d$.

2.° Elevare dai punti di divisione della retta $a\ b$ altrettante verticali fino all'incontro delle rette che congiungono o' coi vertici del profilo $c'\ d'$.

Così avremo il profilo $a'\ b'$, e quindi la prospettiva della cornice del fianco sinistro del frontespizio.

II. Cornici inclinate nell'orizzonte — Avendo costruiti i profili ($c\ d$, $c'\ d'$), ($e_1\ d_1$, $c'_1\ d'_1$) noi potremo determinare la prospettiva delle due cornici inclinate del frontespizio, costruendo quella della loro intersezione che orizzontalmente è proiettata in $E\ F$ (*Fig* 92. n) e prospetticamente in $e\ f$ (*Fig.* 92).

Si determini perciò sopra $X'\ F'$ la sua altezza $y\ y'$, e si

divida, come si vede in $s_2 t_2$, in parti proporzionali alle altezze dei diversi membri della cornice medesima. Colla verticale del punto e_2 corrispondente ad e, determineremo su quella del punto e l'altezza $e' f''$ e quella dei piedi di tutte le ordinate orizzontali che devono concorrere in o'. Divisa poi la $e f$ in parti proporzionali a quelle in cui è divisa la $s_1 t_1$, le verticali dei punti di divisione determineranno il profilo $e' f'$; ed unendo finalmente i vertici di questo con quelli dei profili $c' d'$, $c'_1 d'_1$ avremo la prospettiva delle due cornici inclinate richieste.

281. *Osservazione I.* — Se esiste il punto di concorso delle rette $d d_1$, $c c_1$ potrebbe avvenire che sulla verticale di questo punto si trovassero dentro i limiti del foglio anche i punti di concorso degli spigoli delle cornici inclinate, e in tal caso le costruzioni riescirebbero più semplici; poichè determinato prima il profilo $e' f''$ e trovati questi punti di concorso, i profili $c' d'$, $c'_1 d'_1$ resulteranno dalla intersezione degli spigoli inclinati colle verticali dei punti di divisione delle rette $c d$, $c_1 d_1$.

282. *Osservazione II.* — Nel caso il più sfavorevole possibile si possono ancora abbreviare le costruzioni per i tre profili $c d$, $e f$, $c_1 d_1$ profittando della verticale $h h'$, secondo la quale s'intersecano i piani dei tre profili suddetti. I piedi delle ordinate orizzontali determinati su questa verticale possono servire per ciascuno dei profili; e le costruzioni riesciranno anche più esatte.

283. *Osservazione III.* — Le prospettive delle cornici a spigoli curvilinei siccome sono quelle che s'impiegano ad ornamento delle arcate di qualunque specie si costruiscono con gli stessi principii delle precedenti.

Osserveremo anzi che allorquando l'immagine dell'oggetto deve esser disegnata in una scala assai piccola, sarà sufficiente la costruzione esatta di due o tre spigoli, potendosi gli altri costruire a vista mediante una sola sezione meridiana. In ogni caso se la faccia del muro in cui è praticato l'archivolto fosse parallela o perpendicolare al quadro, le costruzioni saranno sempre semplici.

Problema XIV. *Costruire la prospettiva di una superficie di rivoluzione.*

284. Un mezzo di determinare la prospettiva del contorno apparente di una superficie di rivoluzione sarebbe quello di costruire le prospettive di una serie di paralleli e tracciare poi la linea inviluppo di esse. Ma questo metodo che può essere utile tutte le volte in cui il meridiano della superficie è una linea continua, riesce assai laborioso in ogni altro caso, e non conduce a resultati molto esatti a cagione del gran numero di costruzioni che esige. Miglior partito è allora ricorrere all' impiego dei meridiani, dei quali costruito un numero sufficiente, si ottiene non solo con assai approssimazione la prospettiva del contorno apparente, ma anche quella di tutti i paralleli che sono linee singolari dell' oggetto. Questo secondo metodo offre inoltre il vantaggio di non esigere la prospettiva della proiezione di tutti i paralleli, ma soltanto di quelli principali.

La *Fig.* 93 offre un' esempio di tali costruzioni. Col piano $d\ s, p$ parallelo al quadro si determini sull' asse $d\ c_1$ l' altezza del centro o del parallelo corrispondente alla nascita della ratta e il centro s del parallelo più basso della superficie; noi troveremo la prospettiva d' una sezione meridiana qualunque $d\ r_1$ nella maniera seguente.

Si tirerà la $r_1\ x_2$ parallela alla linea d'orizzonte, e la verticale $x_2\ x_1$ servirà a determinare l' altezza $x\ z$ del profilo sul piano meridiano $d\ r_1\ z$. Si divideranno le due rette $o\ s$, $x\ z$ in parti proporzionali alle altezze dei diversi membri del profilo, la retta $o\ z$ in parti $o\ y$, $y\ v'$, $v'\ z$ proporzionali ai diversi oggetti di questi membri; e le verticali dei punti y, v' . . . . z determineranno il meridiano $y\ v\ t\ r\ n$. Nello stesso modo si costruirà il meridiano parallelo al quadro, ed altri quanti crediamo necessari. Le linee che passano per tutti i punti v, t . . . saranno le prospettive dei paralleli estremi del filetto, e la linea tangente a tutte le curve $t\ r\ a$ sarà la prospettiva del toro.

285. *Osservazione* — Si può determinare sull' asse una scala che serva a dare le divisioni di $o\ z$, e dei raggi ana-

loghi di tutte le altre sezioni meridiane, nel modo stesso che le divisioni di $o\,s$ servono per tutte le altre sezioni medesime.

Tirando infatti la $c_1\,z'$ parallela alla linea d'orizzonte, noi possiamo sempre considerare questa retta come situata nel piano meridiano $d\,r_1\,z_1$ laonde congiungendo il punto z col punto c, in cui la linea d'orizzonte è incontrata dall'asse, ne avremo la parte $c_1\,z'$ che avrà un rapporto determinato con $o\,z$. Allora si riporteranno sull'asse a partire dal punto c_1 gli aggetti del profilo, o parti ad essi proporzionali per mezzo di una inclinata qualunque $c_1\,c_2$, e si dividerà così la $c_1\,z'$ proporzionalmente a queste parti; in grazia poi dei punti di divisione di $c_1\,z'$ uniti con c sarà dato trovare sulla $o\,z$ i punti y, n.... È evidente che per ogni altra sezione meridiana bastano le divisioni di $c_1\,z''$ per somministrare sul raggio analogo ad $o\,z$ i piedi delle sue ordinate verticali.

Problema XV. *Costruire la prospettiva del capitello toscano.*

286. La proiezione della tavola del capitello e quella del parallelo massimo dell'ovolo e del fusto della colonna sono sufficienti per la completa soluzione del Problema.

Nella *Fig.* 94, che mostra la prospettiva richiesta costruita coi principii esposti ne' due numeri precedenti, la linea d'orizzonte è $o'\,o''$; il punto principale P trovasi al mezzo di essa. Si costruirà prima la tavola del capitello servendosi del suo profilo; di poi trovato il centro o''' del parallelo massimo dell'ovolo, e costruiti diversi raggi $o'''\,s'$.... che nella figura si vedono punteggiati, si congiungeranno le estremità s' di questi raggi con c' punto d'incontro dell'asse con la linea d'orizzonte. Prolungando queste congiungenti fino alla orizzontale $z\,z'''$ si avranno su questa le parti $t\,z$, $t\,z'$, $t\,z''$, $t\,z'''$ da dividersi proporzionalmente agli aggetti dei diversi membri del profilo, aggetti che mediante una cartina si potranno riportare sulla $t\,n$. Le parallele a $v\,z$ condotte per i punti di divisione della $v\,t$, divideranno la $t\,z$ in parti proporzionali a questi aggetti, e i punti di divisione della $t\,z$ uniti con c' somministreranno le parti proporzionali sul raggio $o'''\,s'$. Determinate le altezze dei diversi membri del profilo sul-

l'asse e sulla verticale del punto s', si costruirà la sezione del piano s' o''' e'.

Nello stesso modo troveremo le sezioni fatte dagli altri piani nel capitello. Le curve che passano pei vertici di queste sezioni saranno le prospettive dei paralleli che sono linee singolari dell'oggetto: le verticali tangenti ai paralleli della superficie del fusto determineranno il contorno apparente della colonna, e quelle tangenti al circolo o''' s' somministreranno i punti da cui incomincia il contorno apparente dell'ovolo.

PROBLEMA XVI. *Costruire la prospettiva del capitello* IONICO.

287. Per ottenere la prospettiva di questo capitello si circoscriverà alla massa delle volute un parallelepipedo, come si vede nella *Fig.* 95, e costruita la prospettiva di questo, sarà facile con un poco di abitudine del disegno di dettagliare la forma delle diverse parti dell'oggetto (*Fig.* 96).

PROBLEMA XVII. *Costruire la prospettiva del capitello corintio.*

288. Disegneremo la pianta del capitello in una scala qualunque, ma piuttosto grande, e si circoscriverà ad essa un quadrato a b c d che divideremo in tanti quadrati (*Fig.* 97.)

Di poi costruiremo la prospettiva di questo quadrato divisa in altrettante parti eguali in quante è stato diviso l'obiettivo a b c d. Allora riescirà cosa agevole tracciare entro i piccoli quadrilateri così ottenuti la prospettiva della curva costituenti la pianta del capitello proposto, e quindi determinare l'altezza di ciascun punto col metodo ordinario.

Per quegli anzi che fosse un poco abituato al disegno non sarà necessaria la costruzione della prospettiva completa della pianta, ma potrà essere sufficiente di determinare alcuni dei punti principali, come per esempio l'occhio di ciascuna voluta, la nascita e la sommità di ciascuna foglia. Sovente pure la prospettiva della sola massa indicata dalla *Fig.* 98 può bastare per colui che ha acquistata molta pratica, e quindi un occhio sicuro in grazia di esercizi ripetutamente eseguiti

sullo stesso soggetto non deviando dalle regole geometriche sopra esposte.

Problema XVIII. *Costruire la prospettiva della sfera.* (*Fig.* 99)

289. Sia o' o'' la linea d'orizzonte, P il punto principale, F il punto di fuga, P F eguale alla metà del raggio principale; sia c la prospettiva del centro della sfera, la verticale c d quella del raggio.

Immaginiamo condotto pel centro della sfera un piano verticale perpendicolare al quadro, e costruiamo il quadrato circoscritto al circolo massimo secondo il quale e la sfera medesima tagliata da quel piano. A tale oggetto prolungheremo d c al disotto di c di una quantità c d_1 = d c, e condurremo le orizzontali indefinite P d, P d_1 su cui dovranno trovarsi le prospettive dei lati orizzontali del quadrato. Di poi tireremo pel punto d una retta parallela alla linea d'orizzonte, prenderemo sopra di essa d e = d e_1 = d c, e uniti i punti di mezzo di questi segmenti con F potremo determinare sulla retta P d le parti d a, d b prospetticamente eguali a d c; talchè le verticali a g, b f completeranno il quadrilatero a b f g prospettiva del quadrato richiesto

Costruiamo ora il circolo inscritto in esso è evidente che d e d_1 ne sono due punti e che altri due punti si troveranno in h ed h_1 nei quali i lati verticali del quadrato sono incontrati dalla orizzontale P c condotta pel centro. Di più è chiaro essere questi quattro punti quelli di contatto coi lati del quadrato poichè si trovano al mezzo di questi lati. Per averne altri costruiamo, siccome abbiamo indicato al N° 250, una semicirconferenza sul lato a g preso per diametro; conduciamo il raggio h l perpendicolare ad a g, e dividiamo i due quadranti in quel numero di parti eguali che crediamo necessarie; le proiezioni dei punti di divisione fatte sopra a g si congiungano con P, e dai punti in cui queste congiungenti taglieranno una delle diagonali b g del quadrato si conducano altrettante verticali, che taglieranno ciascuno dei raggi h_1 c, h c nel medesimo rapporto in cui sarebbe tagliato il raggio h l dalle corde verticali congiungenti i punti di divisione della

semicirconferenza $a\ l\ g$. Allora sarà facile tracciare la ellisse $d\ h\ l_1\ h_1$ prospettiva del circolo inscritto.

Ciò posto noi possiamo considerare ciascuna delle verticali suddette, come la intersezione del piano del quadro con un piano verticale parallelo al quadro stesso il quale intersecherà la sfera secondo un circolo che si potrà agevolmente costruire; e la linea inviluppo di tutti questi circoli potrà assumersi con sufficiente approssimazione per la prospettiva richiesta del contorno della sfera. Consideriamo per esempio la verticale $m\ n$: il punto p nel quale taglia il diametro $h_1\ h$ sarà il centro della sezione, il punto q nel quale interseca il circolo inscritto ne farà conoscere il raggio $p\ q$; ma questa sezione è prodotta nella sfera da un piano parallelo al quadro, dunque la sua prospettiva sarà la circonferenza descritta col centro in p e col raggio $p\ q$

Descritte tutte le altre circonferenze che hanno il centro sopra $h_1\ h$, se ne troverà lo inviluppo $x\ y\ z\ t\ u\ m\ x$ che sarà la prospettiva domandata.

CAPO VII.

Prospettiva dei monumenti.

290. Quegli che ci ha seguiti fino a questo punto ripetendo in grande scala gli esercizi proposti, con tutto il rigore geometrico voluto dai principii stabiliti sarà in grado senza dubbio di variare questi esercizi in un modo qualunque, proporsene altri più complicati, dentro i limiti però fra i quali abbiamo racchiuso i precedenti; e se non riuscirà in qualche caso ad ottenere una buona prospettiva, conseguirà almeno il vantaggio di rendersi famigliari le pratiche esposte, non che le potenti risorse di cui la Geometria e particolarmente la Geometria Descrittiva è feconda.

La conoscenze che egli per tal modo verrà acquistare gli

saranno pur necessarie per costruire la prospettiva di un monumento qualunque, ma non saranno sufficienti. Con quelle sole giungerebbe alla costruzione rigorosa della immagine dell'oggetto, alla delineazione di una bella e difficile figura sotto il punto di vista geometrico, ma il più delle volte ad una cattiva prospettiva sotto il punto di vista dell'arte.

Questi infelici resultati a cui si perviene talvolta in onta alla rigorosa applicazione dei principii e dopo non poche fatiche, hanno fatto dire ad alcuni essere in qualche caso necessario allontanarsi dalle regole stabilite; altri hanno trovato ottima la sentenza, ed estendendola, il che doveva avvenire, anche oltre i limiti ad essa assegnati dai primi, han dato origine sventuratamente a quel disgusto, se non vuolsi dire disprezzo, che la maggior parte degli artisti sentono per le costruzioni geometriche.

291. Non sono però le costruzioni geometriche, ma i dati poco convenientemente scelti che conducono alle cattive prospettive. La posizione del punto di vista rispetto all'oggetto, la posizione del quadro fra il primo e il secondo, la inclinazione del fascio dei raggi visuali sul piano del quadro stesso, sono altrettante cause che influiscono più o meno sul resultato che si cerca, resultato che deve esser tale da produrre il più fedelmente possibile sull'occhio di chi riguarda il quadro la immagine del corpo che si è voluto ritrarre.

292. Di tutte le predette cause, la più potente sull'effetto dei disegni prospettici è la posizione del punto di vista, la quale dipende dalla distanza a cui suppongesi collocato l'occhio dello spettatore, dalla altezza da cui si intende riguardato l'oggetto, infine dalla posizione dello spettatore medesimo rispetto a quest'ultimo.

La distanza deve essere determinata per modo che sì per la estensione verticale come per quella orizzontale dell'oggetto possa il suo insieme esser veduto dallo spettatore d'un solo colpo d'occhio. E infatti facile cosa il rendersi ragione come, tutte le volte che si collocherà il punto di vista per modo che lo spettatore riguardando da esso il monumento sarebbe costretto ad alzare o abbassare il capo per osservare le parti di quello disegnate sul quadro, verrà meno all'artista l'affetto che egli si era proposto di produrre colla sua prospettiva.

I. Si disegni la prospettiva del parallelepipedo proiettato in (S, S') (*Fig.* 100) nella ipotesi che il quadro si trovi in $(z\,x, x'\,z')$ ad una distanza costante dall'oggetto, e che il punto di vista collocato dapprima in (p, p') si allontani successivamente dall'oggetto medesimo prendendo le posizioni (p_1, p_1'), (p_2, p_2'), (P, P'); e si vedrà:

1.° Che la prospettiva del parallelepipedo riguardato dal punto (p, p') è affatto difettosa sembrando che le due basi si rovescino l'una a destra, l'altra a sinistra; difetto che proviene dall'essere quella inferiore veduta troppo dall'alto la superiore troppo dal basso per cui lo spettatore non potrebbe osservarle che abbassando o elevando la sua testa, ciò che non fa per certo quegli che riguarda il quadro.

2.° Che questo difetto si fa sempre minore nelle susseguenti stazioni del punto di vista, e scompare del tutto allorchè esso è collocato nel punto (P, P'), da cui il parallelepipedo può essere scorto nel suo insieme senza movimento alcuno della testa.

3.° Che la grandezza prospettica dell'oggetto aumenta a misuro che il punto di vista si allontana da esso; poichè mentre pel punto (p, p') la larghezza prospettica è evidentemente $a\,a_1$ ed $a'\,a'_1$ la sua altezza, pel punto (P, P') la larghezza diviene $b\,b_1$ e l'altezza $b'\,b'_1$.

4.° Che i punti di concorso delle prospettive delle costole orizzontali, i quali si possono ritrovare a priori sul quadro nel modo già insegnato al N.° 196, si allontanano dal punto principale coll'aumentare della distanza del punto di vista dal quadro.

II. Suppongasi che il punto di vista si trovi collocato in (P, P') ad una distanza costante dal quadro $(z\,x, x'\,z')$ (*Fig* 101), e che il parallelepipedo dapprima situato in (s, s') si allontani successivamente dal quadro, prendendo le posizioni (s_1, s'_1), (s_2, s'_2), (S, S'). Se le proiezione orizzontale del raggio principale si farà passare, come nella *Fig.* 100, pei centri s, s_1, s_2, S delle corrispondenti proiezioni del solido nelle sue diverse posizioni, e se le inclinazioni delle facce del parallelepipedo rispetto al quadro, come le distanze $s\,P$, $s_1\,P$, $s_2\,P$, $S\,P$ si mantengono respettivamente eguali alle altre $p\,S$, $p_1\,S$, $p_2\,S$, $P\,S$ della figura precedente, si capirà facilmente, anche senza ripetere le operazioni necessarie per la costruzione delle prospettive, che

ad eguale distanza dal punto di vista dell'oggetto, queste riesciranno identiche a quelle nel caso precedente ritrovate, onde saremo certi che riescirà difettosa la prospettiva del solido in (s, s') e buona allorchè esso trovasi in (S, S').

La sola differenza che havvi da notare in questo caso riducesi alla invariabilità dei punti di concorso, e alla grandezza prospettica dell'oggetto, la quale va diminuendo al crescere della sua distanza dal punto di vista; poichè mentre pel solido (s, s') la larghezza prospettica è evidentemente $a\,a_1$ ed $a'\,a'_1$ la sua altezza, pel solido (S, S') la larghezza è $b\,b_1$ e l'altezza $b'\,b'_1$.

293. Non si può fissare d'una maniera precisa quale dovrà essere la distanza del punto di vista dall'oggetto per ottenere dei resultati soddisfacenti; poichè essa dipende non tanto dalle dimensioni di quello, quanto anche dalla sua forma. Ma essendo cosa certa che l'angolo d'osservazione sotto il quale può essere osservato un oggetto senza il bisogno di abbassare o alzare la testa varia fra i 20 e i 45 gradi, è dato inferirne che la distanza in questione potrà variare fra una a tre volte l'altezza dell'oggetto medesimo. Entro questi limiti il disegnatore geometra è certo di trovare sempre una buona posizione pel punto di vista, in quanto riguarda la distanza di esso dall'oggetto.

294. La distanza del punto di vista determinata precedentemente dalla estensione verticale dell'oggetto, può venire modificata dalla estensione orizzontale dell'oggetto medesimo. È noto che la vista dell'uomo può abbracciare un campo di 180 gradi per estensione orizzontale. Però se noi immaginiamo condotta per l'occhio dello spettatore una orizzontale perpendicolare alla direzione del raggio principale, resulterà manifesto che esso non potrà scorgere i punti situati su questa orizzontale tanto a destra che a sinistra, senza volgere la testa; e che allorquando questo movimento ha avuto luogo per un lato resulteranno invisibili gli oggetti che si trovano dall'altro lato. Per poco che si allontani l'occhio da quella orizzontale, l'angolo ottico (N.° 165) determinato dai raggi visuali delle sue estremità diverrà subito minore di 180°, ma il movimento della testa non sarà meno necessario se la retta in questione avrà una certa lunghezza. Aumentando la distanza del punto

di vista diminuirà l'angolo ottico, e ad un tempo il bisogno di volgere a destra e a sinistra la testa per osservare gli oggetti collocati verso gli estremi della linea, e questo bisogno non si farà altrimenti sentire allorchè la distanza sarà divenuta tale da rendere l'angolo ottico di 90 gradi.

Al disotto di questo limite tutti gli angoli sono buoni per contribuire a quel resultato sodisfacente che si ricerca nella prospettiva.

295. Ciò che precedentemente si è detto per riguardo ad un parallelepipedo ed alla orizzontale parallela al quadro deve intendersi esteso all'insieme di tutti gli oggetti posti in prospettiva in un medesimo quadro. Possiamo quindi ritenere per dimostrato;

1.° *Che lo spettatore dee sempre supporsi abbastanza lontano dall'oggetto perchè possa scorgerne lo insieme d'un solo colpo d'occhio.*

Questa distanza è compresa fra una e tre volte l'altezza dell'oggetto, e concorre a determinarla anche la condizione che l'angolo ottico non superi il limite di 90 gradi.

2.° *Che la grandezza prospettica aumenta se mantenendo costante la distanza del quadro all'oggetto, si allontana il punto di vista, ed al contrario diminuisce allorchè ritenuta costante la distanza del punto di vista al quadro, si immagina che l'oggetto si allontani da quest'ultimo.*

3.° *Che i punti di concorso si allontanano a destra o a sinistra, se il punto di vista si allontana dal quadro, e rimangono fissi, allorchè supponiamo che sia l'oggetto che si allontana dal quadro.*

296. Stabilita la distanza del punto di vista dall'oggetto, se ne sceglierà l'altezza per modo che lo spettatore abbia una posizione naturale per riguardarlo dal punto in cui si trova collocato.

Così quando l'oggetto si trovasse isolato sopra un terreno orizzontale, il punto di vista dovrebbe prendersi al di sopra di quel piano dell'altezza ordinaria dell'uomo. Se, l'oggetto essendo sempre isolato, il terreno montasse o discendesse dall'oggetto allo spettatore, l'altezza del punto di vista rimarrebbe determinata dalla inclinazione ascendente o discendente del suolo.

Infine se, alla distanza determinata per la posizione del

punto di vista, esistesse un edifizio, una roccia, o un corpo qualunque da cui potesse supporsi che lo spettatore riguardi l'oggetto, sarà facile dedurre dalla posizione particolare dello spettatore, l'altezza del punto di vista medesimo.

297. La posizione di questo punto attorno all'oggetto dipenderà dall'aspetto sotto il quale si vorrà che esso sia veduto Trattandosi di un edifizio si potrà osservarlo di faccia, o d'angolo. Nel primo caso si avrà una prospettiva di fronte, che non farà conoscere le parti laterali dell'oggetto, ma avrà il vantaggio di presentare una facciata senza scorci, e sarà più atta a dare l'idea del grandioso di questa facciata. Nel secondo caso avremo una prospettiva obliquo, la quale darà l'idea della facciata principale e d'una delle facce laterali dell'edifizio; ed essa sarà conseguentemente atta a far conoscere fino a un certo punto lo insieme dell'edificio.

In breve tutti i consigli sulla scelta della posizione del punto di vista attorno all'oggetto possono ridursi a questa regola unica. Il punto da preferirsi per questa posizione sarà quello da cui l'oggetto dovrà essere osservato per prenderne la idea che si vuol comunicare col mezzo di una prospettiva.

298. La posizione del quadro fra l'oggetto e il punto di vista può contribuire anch'essa non poco in molti casi al conseguimento di una buona prospettiva.

Infatti se il quadro sarà molto vicino all'oggetto potranno avverarsi due inconvenienti: 1.° non sarà concesso riprodurre su di esso che la immagine di una piccola porzione dell'oggetto, e forse tanto piccola da non rendere l'idea che si vuol comunicare dell'oggetto stesso; 2.° questa immagine poi riempirà totalmente e in un modo disaggradevole il quadro. Se questo sarà troppo vicino al punto di vista potrà aversi il vantaggio di una prospettiva più completa dell'oggetto in quanto alle parti di esso che potranno essere disegnate; ma l'angolo ottico potrebbe aumentare di tanto da far comparire apparentemente alterati i rapporti di grandezza e di posizione delle parti che rimangono verso gli estremi del quadro.

Non è possibile assegnare dei limiti a questa distanza del quadro dal punto di vista o dall'oggetto, siccome abbiamo potuto assegnarli per gli angoli di osservazione rispetto alla estensione sì orizzontale che verticale dell'oggetto medesimo. L'eser-

cizio e l'abitudine che in grazia di esso si acquista possono soli guidare il disegnatore nel collocamento del quadro a seconda delle forme e della grandezza degli oggetti presi a trattare.

299. Rispetto all'inclinazione dei raggi visuali sul quadro sono da farsi delle importanti considerazioni. In primo luogo è da osservarsi che, salvo specialissime circostanze, la superficie piana del quadro conviene sia verticale 1.° perchè la prospettiva dell'oggetto sarà di una costruzione molto più facile che in qualunque altro caso; 2.° perchè si espongono i disegni e i quadri sopra dei muri verticali; 3.° perchè nella posizione ordinaria dell'uomo i suoi raggi visuali essendo presso a poco orizzontali, giova moltissimo come vedremo fra breve, che il quadro resulti ad essi perpendicolare. In secondo luogo è da notarsi che ogniqualvolta si esamina un disegno, lo si colloca sempre davanti a sè per modo che il raggio visuale corrispondente alla parte esaminata, sia perpendicolare al disegno; e allorchè consideriamo un quadro, ci situiamo davanti al suo piano per guisa che questo piano resulti perpendicolare al raggio visuale della parte che si esamina.

300. Supponiamo ora che, dati l'oggetto e il punto di vista, si scelga il piano verticale del quadro in modo che venga a tagliare molto obliquamente il fascio dei raggi visuali; la prospettiva resultante, sarà mostruosa siccome abbiamo luogo di mostrarlo nell'esempio seguente.

Trovisi sul piano orizzontale, ove la linea di terra è $X\ Y$, (*Fig.* 102), collocato il cubo ($n\ n\ b$, $n'\ n'\ b'$) sormontato dal tetraedro regolare avente per proiezione verticale della sua sommità il punto s'; e si prenda per piano del quadro il coordinato orizzontale e per punto di vista il punto (O, O').

È chiaro che per ottenere la prospettiva dell'oggetto considerato bisognerà condurre per (O, O') e per i vertici tanto del cubo che del tetraedro dati una serie di raggi visuali, come ($O\ n$, $O'\ n'$) i quali intersecheranno il piano orizzontale secondo le prospettive di queste sommità. Congiungendo dunque con linee rette i punti ottenuti che sono prospettive delle estremità d'una medesima costola, si avrà la prospettiva cercata $S\ A\ B$

Ora egli è ben manifesto che riguardando questa prospettiva di faccia essa non potrà mai dare l'idea d'un tetraedro

regolare posto sopra un cubo, mentre riguardata esattamente dal punto (O, O') produrrà sull' occhio la medesima impressione lineare che farebbero sopra di esso le costole dell' oggetto, e conseguentemente lo spettatore avrà l' idea del cubo e del tetraedro dati.

Diconsi *prospettive curiose* queste immagini che riguardate nel modo ordinario con cui si esaminano i disegni e i quadri non danno minimamente l' idea dell' obiettivo; e quantunque esista per l' occhio una posizione tale da ottenere con ciascuna di esse la illusione voluta, nondimeno si vede come questa posizione sia così strana così eccezionale da non permettere che simili prospettive sieno riguardate per altra guisa che attraverso un foro aperto in una parete al di là della quale si trovi convenevolmente collocato il quadro. Esse dunque non potranno mai far parte d' un quadro ordinario.

301. Sebbene non sia ammissibile che un disegnatore voglia scegliere il piano del quadro per modo che abbia coll' oggetto la posizione supposta nell' esempio precedente, pure noi abbiamo voluto dare una idea delle prospettive curiose che si ottengono in questi casi, acciocchè egli usi le necessarie cautele nel fissare la proiezione del quadro rispetto al fascio dei raggi visuali determinato dai diversi punti dell' oggetto. Imperocchè quando alcuni dei raggi componenti questo fascio taglino il quadro un po' troppo obliquamente, avrà per infallibile resultato, se non una prospettiva curiosa dell' oggetto, una parte almeno di quella prospettiva non armonizzante coll' insieme e di pregiudicevole effetto sul suo quadro.

302. Allorchè le differenti parti d' un' oggetto offrono lo stesso interesse, bisogna che il piano del quadro sia perpendicolare al piano verticale che divide in due parti eguali l' angolo ottico, o in altri termini è necessario che il punto principale si trovi sulla verticale condotta pel mezzo della immagine.

Scelta così la direzione del quadro, la illusione prodotta dalla ottenuta prospettiva verrà il meno possibile modificata nel caso in cui lo spettatore poco si discosti dal punto di vista. Infatti; sia O il punto di vista (*Fig.* 103), $x\ y$ un quadro perpendicolare al piano verticale $O\ p$ che divide per metà l' angolo ottico $l\ O\ l'$ nel quale è compreso l' oggetto; sia $x'\ y'$ un' altro

quadro pure verticale, e supponiamo che questi due quadri siano considerati da un occhio più o meno distante da O. Supponiamo che quest'occhio si muova sulla orizzontale $o'\ O\ o''$, le verticali della immagine $x'\ y'$ non cangeranno sensibilmente di aspetto, ma lo scorcio delle orizzontali varierà considerabilmente e le parti $x'\ p$, $p\ y'$ corrispondenti a delle parti dell'oggetto di cui le estensioni angolari $x'\ O\ p$, $p\ O\ y'$ sono eguali, compariranno di gran lunga diseguali. Se l'occhio si muove sopra o $O\ o''$ o sulla verticale del punto O, avverrà ancora, a cagione del punto y' molto più lontano del punto x' dal punto O, che l'angolo visuale $p\ O\ y'$ varierà in un modo diverso dall'altro $p\ O\ x'$, ciò che distruggerà tutta l'armonia del quadro $x'\ y'$.

Le medesime ipotesi fatte sul quadro $x\ y$ non possono condurre evidentemente agli stessi resultati, poichè gli angoli $x\ O\ p$, $p\ O\ y$ per i medesimi spostamenti del punto O variano molto meno degli angoli $x'\ O\ p$, $p\ O\ y'$.

303. Il vantaggio notato nel numero precedente, per un quadro perpendicolare al piano verticale che taglia in due parti eguali l'oggetto, è poco considerevole allorchè l'angolo $x'\ p\ O$ differisce pochissimo da un retto; onde può avvenire che la posizione di $x\ y$ perpendicolare ad $O\ p$ non sia la più convenevole, o in altri termini, che non vi sia convenienza a collocare il punto di vista sulla verticale dividente in due rettangoli eguali il quadro.

Ogni qualvolta l'oggetto ha una qualche parte che attira principalmente l'attenzione, bisognerà che il quadro sia perpendicolare al piano verticale condotto per l'occhio e per il mezzo di questa parte; affinchè collocando il quadro davanti a se, o situandosi davanti al quadro lo spettatore venga naturalmente attirato nel piano verticale determinato dal raggio principale della prospettiva.

Questa disposizione non va tuttavia scevra d'inconvenienti. Imperocchè se la parte la più interessante dell'oggetto non attira sufficientemente lo spettatore nel piano verticale condotto per il suo mezzo perpendicolarmente al quadro, essa non gli presenterà l'effetto voluto dal disegnatore. E se dopo avere osservato questa parte principale del quadro dal punto il più convenevole, lo spettatore cangia di posizione per ve-

ilere in faccia l'insieme del quadro, egli non si troverà collocato nella maniera più vantaggiosa per godere di questo insieme; e quando l'oggetto si trovi osservato sotto un'angolo di quasi 90 gradi, la disposizione di cui è parola farà degenerare la prospettiva di un lato del quadro in prospettiva curiosa, ciò che sarà ancora nocevole alla illusione.

Possiamo quindi concludere essere necessario che un lato dell'oggetto presenti un'interesse notevolmente più considerevole di quello che presenta il lato opposto, perchè si volga il quadro per modo che resulti perpendicolare a un piano verticale diretto dal punto di vista sul punto rimarchevole del primo lato.

304. Termineremo questo Capitolo applicando le regole e le considerazioni, non ha guari emesse, ad un esempio che offre ancora il modo di ripetere la soluzione del maggior numero dei diversi problemi elementari di prospettiva risoluti nei Capitoli precedenti. Questo esempio ci viene somministrato dalla Chiesa di Santa Maria del Fiore, splendido monumento della ricchezza e del profondo sentimento religioso del popolo Fiorentino.

La *Fig.* 104. mostra la pianta dello insieme della fabbrica colla indicazione del perimetro della piazza sulla quale si eleva. La sua lunghezza essendo braccia 260, e l'altezza maggiore braccia 202, si scorge immediatamente che non esiste entro il contorno della piazza medesima alcun punto che possa scegliersi con speranza di buon resultato per punto di vista.

Conviene dunque immaginare distrutta una parte del caseggiato che fiancheggia il monumento per portare il punto di vista alla distanza convenevole; e siccome giova al migliore effetto che si ricerca nel quadro anche la prospettiva del Campanile intero, abbiamo creduto bene di supporre annullate le case che si trovano dalla parte di esso per collocare il punto di vista distante 400 braccia dalla proiezione *s* della sommità della gran cupola.

Determinati a fare una prospettiva obliqua dell'edificio, che male si presta ad una prospettiva di fronte a cagione delle linee che terminano la parte principale di esso, abbiamo scelto per proiezione del punto di vista il punto o il quale benchè più vicino a questa parte principale dell'edifizio non

si allontana poi tanto dall'estremo e da far comparire troppo basso il campanile in confronto della cupola. Se avessimo portato il punto o più alla destra, l'angolo ottico sarebbe rimasto minore, ma sarebbesi verificato l'inconveniente sopra indicato; inoltre il fascio dei raggi visuali formato dalle linee del campanile non avrebbe potuto tagliare che troppo obliquamente il piano del quadro, onde avremmo incontrato in questa parte dell'edifizio l'altro inconveniente previsto al N.° 301.

È stato detto al N.° 302 che il raggio principale deve trovarsi nel piano verticale condotto per l'occhio e pel mezzo della parte dell'oggetto che offre il maggiore interesse. Questa parte è senza dubbio costituita dalla cupola e dalle tribune; ma non essendo di poco interesse anche la torre di Giotto, la quale colle sue linee eleganti ed ardite fa un sì bel contrasto con le masse costituenti l'estremo opposto dell'edifizio, abbiamo creduto meglio dirigere il raggio principale o p un poco alla sinistra del piano determinato dal punto di vista e dall'asse della cupola; lo che ci ha dato il modo di collocare il punto principale sull'asse verticale del quadro.

In fine abbiamo assegnato al piano di quest'ultimo una posizione x y due volte più distante dal punto di vista che dalle parti più prossime dell'oggetto, per non impiccolire di troppo l'apparenza prospettica di questa e per allontanare il più possibile i punti di concorso di alcune linee principali le cui prospettive avrebbero altrimenti prodotto un effetto meno soddisfacente (N.° 295. 2° e 3°). Abbiamo poi data al quadro una larghezza x y maggiore di quella che dai raggi estremi o m, o n sarebbe stata determinata, perchè contribuisce non poco alla bontà del resultato il non essere il quadro interamente occupato dalla immagine dell'oggetto (N.° 298.); specialmente poi allorchè l'angolo ottico l o l' non venendo per questo aumento di larghezza a raggiungere il limite superiore stabilito al N.° 294, esistono anche altri edifizi circonvicini che offrono il mezzo, come nel caso attuale, di rendere col confronto più manifeste la bellezza e la maestà dell'edifizio principale.

Avvertiremo per ultimo che tutte le misure necessarie per la prospettiva di che si tratta, sono state dedotte dall'opera

Digitized by Google

edita in Firenze fino dal 1820 per cura di Giuseppe Molini col titolo — La Metropolitana fiorentina illustrata. — Talchè a questa rimandiamo il Lettore cui prendesse vaghezza di far riscontri od acquistare del monumento una conoscenza più estesa di quella che può essere somministrata da una semplice prospettiva.

305. *Prospettiva della proiezione orizzontale dell'oggetto* La *Fig.* 104 non mostra a tutto rigore la proiezione orizzontale dell'oggetto, sì bene quella delle diverse linee principali che sono visibili dal punto proiettato in o.

Per facilitare la costruzione della prospettiva di questa proiezione abbiamo circoscritto alla cupola *s* e alle due tribune *a* e *b* il rettangolo *r v t u*, ai lati del quale sono stati riferiti i vertici delle figure poligone in esso contenute. Presa di poi per linea ausiliaria d'orizzonte la base *X Y* del quadro *X Y T U* (*Fig.* 105), abbiamo riportato su di essa a partire da P_1 mezzo di *X Y* a punto principale ausiliario del quadro, la P_1 G_1 doppia di *x p* (*Fig* 104), e tracciata la scala di fuga V_1 P_1 e la scala di larghezza X_1 O_1 V_1, con questa e col punto di fuga F_1 collocato distante da P_1 quanto il punto o e distante da *p*, abbiamo costruita la *Fig.* 105. n che è prospettiva ausiliaria di quella parte della proiezione orizzontale sopra indicata unicamente visibile dal punto di vista.

306. *Prospettiva della elevazione dell'oggetto.* Innanzi di procedere alla costruzione di questa prospettiva abbiamo fatta una proiezione in massa dell'oggetto sopra un piano verticale *P Q* parallelo a quello condotto pel raggio principale (*Fig* 104). Abbiamo proiettato su questo medesimo piano il quadro in *x' y'* e il punto di vista in *o'*, e tirati i raggi estremi o' *s'*, *o' r'* abbiamo avuto modo di fissare l'altezza *x' y'* del quadro medesimo. Il punto *o'* si è preso distante da *P Q* di 20 braccia senza temere che il punto di vista non avesse una posizione naturale in grazia dei fabbricati circoscritti all'oggetto; la o' *p'* parallela a *P Q* ci ha quindi somministrata la proiezione *p'* della linea d'orizzonte.

Ciò posto abbiamo determinata sulla *Fig.* 105 l'altezza *X U* del quadro facendo colle linee corrispondenti della *Fig.* 104 la proporzione

$$x\ y : X\ Y :: x'\ y' : X\ U$$

e di seguito si è potuto avere la linea d'orizzonte o' o'' con l'altra proporzione

$$x' y' : X U :: x' p' : X o'$$

Trovato il punto o'', abbiamo supposto che il piano contenente la scala d'altezza tagli secondo $F F'_1$ il piano orizzontale condotto per $X_1 Y_1$, ed allora si è potuto avere la intersezione $o'' F''_1$ del primo coll'altro piano orizzontale condotto per la base $X Y$ del quadro. Prolungando la scala di larghezza $X_2 O_1$ fino all'incontro Y_2 con $F F'_1$, si è trovato per scala d'altezza la verticale $Y_2 Z'$, sulla quale abbiamo riportate, a partire dal punto F'_2 in cui viene incontrata la $o'' F''_1$, le altezze $F'_2 s'''$, $F'_2 c'''$, $F'_2 r'''$ . . . respettivamente doppie delle altezze $s'' s'$, $c'' c'$, $r'' r'$ . . . . (*Fig.* 104), perchè la scala di larghezza $X_2 O_1$ fu determinata con $P_1 G_1$ doppia di $p x$. — Così abbiamo potuto determinare i punti principali e''_2, c''_2, s''_2 . . . . della prospettiva domandata.

All'oggetto però di raggiungere la maggiore esattezza possibile abbiamo costruito il profilo in massa dell'oggetto, indicato dalla *Fig.* 105 *b*, sopra la retta $s'_2 s'_2$, intersezione del piano $F''_1 F'_2 Z'$ col piano verticale parallelo al quadro condotto per s_1 proiezione prospettica della sommità della cupola. Da questo profilo abbiamo potuto dedurre tutte le altezze secondarie, e costruire quindi la prospettiva di tutte le masse principali dell'oggetto.

Il passaggio dalla *Fig.* 105 alla prospettiva completa delineata nella *Fig.* 106, è facile a farsi. Esso non è più che una quistione semplice di divisione di linee in parti proporzionali a quantità note, ad eccezione degli spigoli della gran cupola e delle piccole cupole delle tribune, la prospettiva dei quali non può offrire la minima difficoltà dopo quanto si è detto nel Capo precedente.

307. *Osservazione I.* — L'uso della scala d'altezza non sarebbe a tutto rigore indispensabile in queste prospettive nelle quali è data in numeri la distanza della linea d'orizzonte dal piano su cui il monumento si eleva. Noi abbiamo supposto collocato il punto di vista all'altezza di 20 braccia sopra quel piano, dunque tutte le verticali del monumento compreso fra la prospettiva del suo piano e la linea d'orizzonte esprimono una lunghezza di 20 braccia. Così, sapendosi che il campanile

Digitized by Google

a alto 140 braccia, avrenno potuto trovare il punto c'', riportando sei volte la c'', d sulla verticale del punto c'', a partire da d.

Si comprende però facilmente che questo modo di determinare la prospettiva di un oggetto non sarà sempre il più spedito, e non andrà scevro d'inesattezze ogni qualvolta l'altezza delle verticali da determinarsi non è un multiplo dell'altezza del punto di vista.

L'uso della scala delle altezze sarà sempre incomparabilmente più sicuro e più semplice; il modo indicato potrà soltanto considerarsi come mezzo di verificazione pei punti principali della prospettiva richiesta.

308. *Osservazione II.* — Quantunque possa desumersi dall'esempio citato l'ordine delle operazioni con cui dobbiamo procedere nella costruzione della prospettiva d'un monumento qualunque, pure crediamo pregio dell'opera l'offrirne qui il riepilogo seguente.

Disegnata la proiezione orizzontale dell'oggetto devesi provvisoriamente scegliere un punto sul piano di essa la cui distanza dall'oggetto sia compresa fra i limiti superiormente indicati, e dal quale si possano scorgere quelle parti il cui disegno crediamo atto a rendere dell'oggetto stesso la idea che ci siamo prefissi. È facile dedurre a priori quali sono le parti visibili e quali di esse si nascondono, fissando un ago in quel punto e facendo attorno a quello muovere la riga. Colle norme accennate ai N.i 302, 303 si traccerà per quel punto la proiezione del raggio principale, e provvisoriamente si traccerà pur quella del quadro alla distanza dall'oggetto che ci sembra più conveniente.

Di poi sopra un piano verticale parallelo a quello che passa pel raggio principale proietteremo, siccome abbiamo fatto nella *Fig.* 104, la massa dell'oggetto, il quadro, e il punto di vista, assegnando a questo sul piano della proiezione orizzontale quella altezza che ci sembrerà la più naturale e la più idonea a conseguire un buon resultato. Con questi elementi potremo: 1° assicurarci se la distanza assegnata al punto di vista sodisfaccia alla condizione determinato dai limiti dell'angolo d'osservazione dipendente dalla estensione verticale dell'oggetto; 2° avere un idea dell'altezza prospettica della

immagine che si cerca, e del rapporto resultante fra le altezze della diverse sue parti, 3° stabilire una conveniente altezza pel quadro, e determinare la distanza della linea d'orizzonte dalla base di esso. Per ultimo potremo anche riconoscere se alcuni degli elementi medesimi han bisogno di essere modificati, e sarà agevole cosa il variarli per modo da soddisfare almeno al maggior numero delle condizioni precedentemente stabilite.

Trovato la posizione che ci sembra la migliore pel punto di vista, tirato il raggio principale, e determinate la posizione e la grandezza del quadro, conviene ancora assicurarsi se il resultato sarà quale lo abbiamo immaginato. Ciò si consegue costruendo per masse, e piacendo in piccola scala, la prospettiva dell'oggetto nel modo indicato dalla *Fig.* 105. Allora o questo schizzo geometrico è sodisfacente, o lascia qualche cosa da desiderare. Nel primo caso potrà facilmente essere riportato nel quadro delle richieste dimensioni, e corredato di tutti i dettagli dei quali è fornito l'oggetto; nel secondo caso sarà necessario modificare la scelta di quegli elementi dai quali più particolarmente si riconoscerà dipendere il difetto che vuolsi evitare nel resultato.

CAPO VIII.

Prospettiva degli oggetti molto lontani dal punto di vista.

309. La prospettiva della proiezione orizzontale dell'oggetto è tanto più difficile a costruirsi quanto più grande è la distanza da cui viene osservato. Può dirsi anzi essere quasi sempre impossibile di indicare con esattezza il contorno delle linee orizzontali che si trovano molto distanti dal punto di vista, a cagione dell'altezza prospettica delle linee medesime, la quale si riduce in quei casi estremamente piccola.

Digitized by Google

È cosa facilissima il dimostrare che l'altezza prospettica d'una figura orizzontale varia presso a poco in ragione inversa, del quadrato della sua distanza dal punto di vista.

Sia il piano orizzontale rappresentato da $X\,Y$ (*Fig.* 107), il quadro da $Q\,q$, l'altezza della figura orizzontale da $A\,B$; il punto di vista sia in o.

Tirando i raggi $A\,o$, $B\,o$ avremo in $a\,b$ l'altezza prospettica della figura data. Se poi conduconsi le rette $B\,c$, $o\,O$ perpendicolari ad $X\,Y$ e si considerano i triangoli $A\,B\,c$, $A\,O\,o$, e poi gli altri $B\,c\,o$, $a\,b\,o$, ed infine il triangolo $B\,O\,o$ nel quale $Q\,a$ è parallela ad $O\,o$, si avranno le proporzioni

$$A\,B : B\,o :: A\,O : O\,o$$
$$B\,c : a\,b :: B\,o : a\,o$$
$$B\,o : a\,o :: B\,O : Q\,O$$

le quali moltiplicate termine a termine danno luogo alla seguente:

$$A\,B : a\,b :: A\,O \times B\,O : O\,o \times Q\,O$$

dalla quale si deduce

$$a\,b = \frac{O\,o \times Q\,O}{A\,O \times B\,O} A\,B$$

Chiamando D la distanza del centro C della figura dalla proiezione O del punto di vista, e con A indicando la metà di $A\,B$ si ha evidentemente

$$A\,O = D + \tfrac{1}{2}A, \qquad B\,O = D - \tfrac{1}{2}A$$

onde avremo ancora

$$a\,b = \frac{O\,o \times Q\,O}{D^2 - (\tfrac{1}{2}A)^2} A\,B$$

Il prodotto $O\,o \times Q\,O$ non cambia al variare della distanza dell'oggetto dal punto di vista O, come non cambia la quantità $\frac{1}{2}A$. Possiamo dunque inferire dal precedente resultato che l'altezza prospettica $a\,b$ di una figura orizzontale $A\,B$ è prossimamente in ragione inversa del quadrato della sua distanza D dalla proiezione del punto di vista fatta sul piano della figura medesima.

Così ad una distanza doppia l'altezza $a\,b$ diverrebbe quattro volte più piccola, ad una distanza decupla, essa non

sarebbe più che la centesima parte di quella che era prima. Questa è la ragione per cui le prospettive delle più grandi figure orizzontali si riducono quasi a semplici linee allorchè si trovano moltissimo distanti dal punto di vista.

340. Rendiamo sensibile un tale effetto per mezzo di un esempio. Supponiamo che il rettangolo *a b c d* (*Fig.* 108) sia il piano d'un monumento veduto da un punto o collocato ad una distanza eguale a circa cinque volte il suo lato più lungo, distanza che non può dirsi nemmeno soverchia.

Essendo *l o l'* l'angolo ottico, *x y* il quadro, *x z* la scala di fuga, ed *a' a'' c'' c'* la proiezione del monumento fatto sul piano verticale *X Y* parallelo al raggio principale, troviamo (*Fig.* 109) per prospettiva del rettangolo *a b c d* sul quadro *X Y T U* il quadrilatero *n' b' c' d'*. Osservando quanto le linee di questo quadrilatero si approssimano fra loro, è facile comprendere la difficoltà immensa, per non dire impossibilità, in cui possiamo trovarci di esprimere esattamente le parti essenziali del piano, tanto più poi allorchè fossero molti i dettagli delle parti visibili dal punto di vista.

341. Potrebbe evitarsi nella pratica una parte di confusione non operando che parzialmente; cioè a dire che dopo aver costruita la prospettiva d'una fila di colonne, o delle incavallature di un coperto, si potrebbero cancellare tutte le linee di costruzione, per sostituirle con quelle necessarie alla costruzione di nuovi dettagli, conservando però tirate a inchiostro le linee principali, senza delle quali sarebbe impossibile di ottenere la più piccola esattezza nello insieme.

Potrebbesi anche cercare di aumentare un poco l'allontanamento delle linee, elevando il punto di vista dal piano. Ma oltre che questo mezzo non è sempre applicabile, si vede pure che tanto esso quanto il precedente possono diminuire la confusione per gli oggetti non molto lontani dall'occhio, ma non producono effetto sensibile sulle figure orizzontali molto lontane, le quali hanno sovente un' altezza prospettica eguale alla larghezza della linea che si potrebbe tracciare con il lapis il più appuntato.

342. Il modo più efficace di ovviare al notato inconveniente è quello proposto da Adhemar, che consiste nel sostituire alla proiezione orizzontale dell'oggetto, la intersezione

delle superficie proiettanti verticali dell'oggetto medesimo con un'altro piano più o meno inclinato all'orizzonte, tale però da tagliare il piano orizzontale condotto per la base del quadro secondo una retta parallela ad esso

Trattandosi, per esempio del monumento rettangolare *M* (*Fig.* 110), elevato sul piano orizzontale *X Y* e veduto dal punto *o'* al di là del quadro *x' y'*, si trova che l'altezza prospettica della sua proiezione orizzontale *A B* è *a b*. Ma se noi immaginiamo tagliato il monumento col piano *X' Y'*, la sezione prodotta dalle medesime superficie proiettanti invece di essere *A B* sarà *C D*, e l'altezza prospettica di questa sezione diverrà *c d*.

Ora è evidente che i rapporti di distanza sussistenti fra le verticali proiettanti tutti i punti dell'oggetto non vengono ad alterarsi perchè le sezioni *A B* e *C D* hanno la stessa larghezza nel senso delle linee secondo le quali i due piani *X Y* e *X' Y'* si tagliano, e che quella larghezza si conserva la medesima qualunque sia la inclinazione del piano *X' Y'* sopra l'altro. Si vede inoltre che la sezione *C D* varia di grandezza nel senso perpendicolare al piano *X Y* col variare di quella inclinazione, e che potrà per conseguenza aumentarsi tanto quanto vorremo nello stesso senso.

313. Per mostrare un'applicazione di questo principio, proponiamoci di costruire la prospettiva del medesimo monumento rettangolare *a b c d* (*Fig.* 108) stata già costruita al N.° 310 col metodo generale.

Si taglino le superficie proiettanti il monumento con un piano inclinato *X' Y'*, e alla proiezione orizzontale $a'_1 c'_1$ dell'oggetto sul piano $X_1 Y_1$ si sostituisca quella della figura $a''_1 c''_1$ sezione fatta in esso dal piano *X' Y'*. Perciò si conducano sul piano dell'angolo ottico *l o l'* le due rette *m m*, ed *n n*, delle quali la prima è la intersezione *m'* del piano *X' Y'* col piano orizzontale *X Y*, e la seconda è la intersezione *n'* dello stesso piano *X' Y'* con un piano verticale *x'' y''* parallelo al quadro *x' y'*. Di queste due rette che devono comprendere fra loro la proiezione orizzontale del monumento, costruiscansi le prospettive $m' m'_1$, $n' n'_1$ (*Fig.* 111) col metodo generale del N.° 174, ed il rettangolo $m' m'_1 n'_1 n'$ sarà la prospettiva del trapezio orizzontale $m m_1 n_1 n$.

In questa figura noi abbiamo supposto abbassato il piano orizzontale condotto per la base $X\ Y$ del quadro $X\ Y\ T\ U$ fino alla retta $X_1\ Y_1$, la linea d'orizzonte portata sopra $X\ Y$, e in conseguenza il punto principale corrispondente ad (o, o_1) della *Fig.* 108, preso in P_1 mezzo di $X\ Y$.

Le dimensioni del quadro $X\ Y\ T\ U$ e la linea d'orizzonte $o'\ o''$ sono state costruite geometricamente secondo le norme indicate al N.° 306, onde il punto P viene a resultare il punto principale del quadro medesimo

Ora il piano verticale $x''\ y''$ ed un altro parallelo condotto per la orizzontale m' (*Fig* 108), taglieranno il piano $X_1\ Y_1$ secondo le due orizzontali x''_1, m''_1; talchè quando sostituiamo al piano $X_1\ Y_1$ il piano inclinato $X'\ Y'$ le orizzontali x'', ed m'' verranno sostituite respettivamente dalle altre n' ed m', ed il trapezio orizzontale $n\ n_1\ m_1\ m$ si troverà sostituito da un trapezio inclinato di cui si potrà aumentare l'altezza prospettica quanto ci aggrada.

La inclinazione poi del piano $X'\ Y'$ potrà sempre scegliersi per modo da far coincidere con $X\ Y$ (*Fig.* 111) la prospettiva della orizzontale $(m', m\ m_1)$, e con $X'_1\ Y'_1$ quella della orizzontale $(n', n\ n_1)$; quindi si vede come si possa estendere a volontà lo spazio $X\ Y\ Y'_1\ X'_1$ destinato alla prospettiva della sezione prodotta dal piano $X'\ Y'$ (*Fig.* 108) nelle superficie proiettanti del monumento

Infine converrà pure prendere provvisoriamente il piano $x''\ y''$ per piano del quadro invece dell'altro $x'\ y'$; perchè volendo ritenere quest'ultimo bisognerebbe costruire la prospettiva del trapezio inclinato compreso fra i piani $x\ y$ ed $n\ n_1$ (*Fig.* 108), lo che farebbe discendere il quadro della figura fino alla intersezione del piano $x'\ y'$ col piano inclinato $X'\ Y'$, e lo spazio libero che rimarrebbe allora fra la base del quadro e la sezione $a''_1\ c''_1$ del monumento, allontanerebbe come nella *Fig* 109 la prospettiva di questa sezione, annullando così tutto il vantaggio che resulta manifesto dal metodo che si propone.

314. Il piano $x\ y$ del quadro venendo così sostituito provvisoriamente dal piano parallelo $n\ n_1$, ne consegue che la scala di fuga non sarà per quest'ultimo la $x\ z$, sì bene la $n\ z'$ di cui si cercherà la prospettiva $n'\ P_1$ prendendo sulla scala di

larghezza $O_2 F_2$ (*Fig.* 111) la quantità $O_2 N'$ eguale ad $n N$ (*Fig.* 108).

Ma allorchè al trapezio $n\ m\ m_1\ n_1$ collocato sul piano orizzontale $X_1 F_1$ ed avente per prospettiva il rettangolo $n'\ m'\ m'_1\ n'_1$ noi sostituiamo l'altro trapezio $n'\ n'_1$ collocato sul piano inclinato $X'\ F'$ ed avente per prospettiva il rettangolo $X'_1\ X\ F\ F'_1$, il lato $m\ m_1$ del primo verrà ad elevarsi in m' e quindi ad avere per prospettiva la linea $X\ F_1$ mentre l'altro lato $n\ n_1$ abbassandosi in n' verrà ad avere per prospettiva la linea $X'_1\ F'_1$.

Consegue da ciò che il punto e' si eleverà in e'', e il punto n' si abbasserà fino ad X'_1, onde la scala di fuga sul piano $X'\ F'$ diverrà $X'_1\ e''$. Prolungando questa retta fino ad incontrare la verticale del punto P_1 in P_2, sarà quest'ultimo il punto corrispondente a P_1; la orizzontale $X_1 P_1 F_1$ sostituirà allora la $X\ F_1$ ed il punto F_2 preso distante da P_2 della quantità o p_2 sarà il nuovo punto di fuga. La scala di larghezza poi si troverà prendendo $P_2\ G_2$ eguale ad $n\ p_2$ e tirando la verticale $G_2\ O_2$; ma se osservasi che il punto N' comune all'antica scala di fuga $n'\ P_1$ e alla scala di larghezza $O_1 F_1$ viene ad elevarsi in O_2, bastera anche condurre la verticale del punto N' per trovare la scala di larghezza $O_2 F_2$ rispetto al piano inclinato $X'\ F'$.

Per tal modo il punto principale P_2 ed il punto di fuga F_2 si trovano sostituiti respettivamente dai punti P_2 ed F_2; e le scale $O_2\ X'_1$, $O_2\ F_2$ dalle rette $X'_1\ O_2$, $O_2\ F_2$.

315. Preparata così la figura noi potremo operare secondo le norme del metodo generale, rammentandosi però che il quadro $x\ y$ (*Fig.* 108) essendo stato provvisoriamente sostituito dall'altro $n\ n_1$, è necessario contare le distanze dei diversi punti dell'oggetto dal quadro a partire dalla retta $n\ n_1$, e le distanze dei medesimi punti dalla scala di fuga a partire dalla retta $n\ z'$.

Così per ottenere il punto b' prenderemo la distanza $n\ b_2$, che si riporterà da X'_1 in b'_2 (*Fig.* 111); si tirerà la retta $F_2\ b'_2$ ed avremo il punto b'_2 e con esso la orizzontale $b'_2\ b'$. Prenderemo di poi la distanza $b\ b_1$ per riportarla da O_2 in b_2 sulla retta $O_2\ F_2$; condurremo la $P_2\ b_2$ e la sua intersezione con la orizzontale $b'_2\ b'$ determinerà il punto b'. Troveremo nello stesso modo tutti i vertici del quadrilatero $a'\ b'\ c'\ d'$.

La figura dimostra ancora come si possono fare le diverse verificazioni della esattezza del disegno, delle quali è suscettibile l'esempio proposto.

Così per verificare la posizione del lato c' d' si prenderà n d_t (*Fig.* 108), si riporterà sopra X'_t F'_t da X'_t in d'_2, e la retta F_2 d'_2 determinerà sulla X'_t O_2 il punto d'_t nel quale dovrà concorrere il prolungamento del lato c' d'.

Per trovare il punto f' sul bordo del quadro si condurrà la orizzontale f f_t (*Fig.* 108), e riportata la n f_t da X'_t in f'_2 (*Fig.* 111) tireremo la F_2 f'_2. Questa determinerà sulla scala di fuga il punto f'_t, e la orizzontale f_t f' somministrerà sul bordo del quadro il punto f' nel quale deve concorrere il prolungamento del lato a' b'.

Infine se vuolsi ancora ottenere il punto a'_2 sulla retta X'_t F'_t, riporteremo la n a_t da O_2 in a_2, e la retta P_2 o_2 dovrà incontrare la X'_t F'_t nel punto a'_2 in cui concorre il prolungamento del lato d' a'.

Si vede pertanto come le operazioni necessarie per costruire sulla *Fig.* 111 la prospettiva a' b' c' d' della sezione prodotta nel piano inclinato X' F' dalle superficie proiettanti del monumento siano semplici al paro di quelle che si richieggono per costruire sulla *Fig.* 109 la prospettiva della proiezione orizzontale dello stesso monumento fatta sul piano X_t F_t.

346. Passiamo a vedere come possa determinarsi la scala delle altezze e quindi la elevazione prospettica dell'oggetto. È noto (N.° 184) che una retta qualunque F K può rappresentare la intersezione del piano contenente quella scala col piano orizzontale condotto per X'_t F'_t: determinando i punti m''_1 ed n''_1 nei quali la F K è tagliata dal prolungamento dei lati m' m'_t ed n' n'_t del rettangolo che è prospettiva del trapezio n m m_t n_t considerato sul piano orizzontale X_t X_1, si vede che allorquando questo trapezio si converte nella sezione m' n' fatta dalle superficie proiettanti il monumento nel piano inclinato F' X', il punto m'' si eleva in m_2, e il punto n''_1 si abbassa in n_2; talchè la F K viene ad essere sostituita dalla retta m_2 n_2, la quale dovrà concorrere col bordo verticale F T del quadro nello stesso punto L della retta X_2 F_2 se il disegno è esatto.

Ciò posto, si avrà la scala d'altezza conducendo una ver-

Digitized by Google

ticale pel punto l nel quale la n_1 L incontra la scala di larghezza corrispondente O_1 V_1. Ma siccome la elevazione dell'oggetto è domandata pel quadro x y (*Fig* 108) e non per l'altro n n_1, la medesima scala si potrà ottenere ancora prolungando O_1 I_1 fino alla I K in y_1 (*Fig* 111), e di là tirando la verticale y_1 z_1 che passerà pure per l.

Le dimensioni del quadro X V T U essendo state determinate proporzionalmente alle rette x y ed x' y' della fig. 108, anche la linea d'orizzonte o' o'' dovrà dividerne i bordi verticali X U, V T in parti proporzionali a quelle in cui la x' y' è divisa dalla orizzontale o' p'. Allora se a partire dal punto q in cui la linea d'orizzonte è tagliata dalla scala d'altezza si riporta su quest'ultima la p' x' in q q', la retta o'' q' K' sarà la intersezione del piano contenente la scala d'altezza col piano orizzontale condotto per la base V X del quadro. Faremo di poi q' q'' eguale all'altezza a' a'' del monumento, e tutte le operazioni successive avranno luogo come nel caso ordinario.

Così per ottenere i due punti a'' ed a''' condurremo la orizzontale a' a'_1 fino all'incontro a'_1 colla m_1 n_1: da questo punto eleveremo la verticale a'_1 a''_1, e le orizzontali condotte dai punti a''_1, a'''_1 nei quali essa taglia le due rette o'' K', o'' q'' determineranno sulla verticale del punto a i due punti cercati.

317. Osserveremo che la direzione quasi verticale della retta m_1 n_1 non nuoce minimamente alla esattezza del resultato, sendochè i punti a'_1, b''_1, d_1 vengono determinati da rette orizzontali che tagliano la m_1 n_1 sotto angoli quasi retti. D'altronde la posizione della retta m_1 n_1 dipende, come abbiamo visto, dalla I K che può condursi arbitrariamente; quindi sarà sempre possibile ottenere per la m_1 n_1 quella inclinazione che crederemo più conveniente.

318 Non di rado avviene che un solo piano inclinato, sostituito a quello su cui è fatta la proiezione dell'oggetto, non è sufficiente ad evitare la confusione a cagione della moltiplicità dei dettagli, particolarmente se trattasi di qualche interno.

Allora ad un solo piano inclinato può sostituirsi una superficie prismatica costituita da più piani aventi quella inclinazione che si crederà più opportuna, non escludendo nemmeno lo

stesso piano orizzontale su cui è stata fatta la proiezione dell'oggetto, se questo avrà delle parti molto vicine al quadro. Così essendo $X\ Y$ il piano orizzontale (*Fig* 112), o il punto di vista, $x\ y$ il quadro, si può dividere la proiezione dell'oggetto in più parti eguali o diseguali $x\ x_1$, $x_1\ x_2$, $x_2\ x_3$ . . . con rette x_1, x_2, x_3 . . . parallele alla base del quadro; ed immaginando di poi i piani inclinati $I_1\ X_1$, $X_2\ I_2$ . . . possiamo sostituire a quelle parti della proiezione orizzontale dell'oggetto le intersezioni che le superficie proiettanti verticali di esso producono nelle facce $x_1\ y_2$, $y_2\ y_3$ . . . della superficie prismatica $x\ x_1\ y_2\ y_3$ . .

349. Sia pertanto l o l' (*Fig.* 113) l'angolo ottico che comprende la proiezione dell'oggetto da porsi in prospettiva; $x\ y$ sia il quadro, o p la proiezione del raggio principale, $x\ z$ la scala d'altezza. Conduciamo le rette $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ parallele ad $x\ y$, e supponiamo che il segmento $x\ y\ y_1\ x_1$ sia rappresentato sulla *Fig.* 112 da $x\ x_1$, il secondo $x_1\ y_1\ y_2\ x_2$ da $x_1\ y_2$, il terzo $x_2\ y_2\ y_3\ x_3$ da $y_2\ y_3$; le scale di fuga per questi ultimi due saranno respettivamente $x_1\ z_1$, $x_2\ z_2$.

Al disotto della base $X\ I$ del quadro (*Fig.* 114) tirate le rette $X_1\ I_1$, $X_2\ I_2$, $X_3\ I_3$ parallele ad essa, potremo sempre supporre che il rettangolo $X_2\ I_2\ I_2\ X_2$ contenga la prospettiva delle linee comprese nel trapezio $x\ y\ y_1\ x_1$ della *Fig.* 113; che il rettangolo $X_2\ I_2\ I_1\ X_1$ contenga la prospettiva delle linee comprese nel trapezio $x_1\ y_1\ y_2\ x_2$, e finalmente che il rettangolo $X_1\ I_1\ I\ X$ contenga la prospettiva delle linee comprese nel trapezio $x_2\ y_2\ y_3\ x_3$

Ciò posto, dopo aver fissati il punto principale P_2 al mezzo di $X_2\ I_2$, il punto di fuga F_2 prendendo $P_2\ F_2$ eguale ad $o\ p$, e dopo avere colla scala di fuga $X_3\ P_2$ stabilita la scala di larghezza $O'_2\ X'_2$, prendendo $P_2\ G_2$ eguale a $p\ x$, si costruiranno 1.° le prospettive $x'_1\ y'_1$, $x'_2\ y'_2$, $x'_3\ y'_3$ delle rette $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ della *Fig* 113, considerandole come collocate sul piano orizzontale che passa per la base del quadro; 2.° le prospettive x'_1 e, x'_2 e delle due scale di fuga $x_1\ z_1$, $x_2\ z_2$. Quindi rammentandosi che il quadro per le linee comprese nel trapezio $x_1\ y_1\ y_2\ x_2$ ha per base la retta $X_2\ I_2$, e che mentre la $x'_1\ y'_1$ si eleva fino ad $X_2\ I_2$ la sua parallela $x'_2\ y'_2$ deve intendersi elevata fino in $X_1\ I_1$, si vedrà che il punto e si

eleva fino in e', e la scala di fuga x'_1 e viene ad essere sostituita dalla X_2 e'.

Si prolungherà questa ultima retta fino all'incontro P_1 colla verticale del punto P_2, e la orizzontale F_1 P_1 tirata per P_1 sarà la linea d'orizzonte ausiliaria per il trapezio x_1 y_1 y_2 x_2. Portando su questa la o p_1 (*Fig.* 113) da P_1 in F'_1 si avrà il punto di fuga F'_1; prendendo P_1 G_1 eguale ad x_1 p_1 e conducendo la verticale G_1 O'_1 si avrà la scala di larghezza O'_1 X'_1. In questo modo il rettangolo X_2 F_2 F_1 X_1 trovasi preparato a ricevere la prospettiva di quella parte dell'oggetto che è compresa nel trapezio x_1 y_1 y_2 x_2 o in altri termini delle linee secondo le quali il piano inclinato X_1 F_1 (*Fig.* 112) viene intersecato dalle superficie proiettanti dell'oggetto medesimo.

Gli elementi analoghi per la prospettiva della intersezione prodotta dalle indicate superficie nel successivo piano inclinato X_2 F_2 (*Fig.* 112), si avranno proiettando il punto s in s' sopra X F (*Fig.* 114), e tirando X_1 s'. Questa retta che sarà la corrispondente scala di fuga, prolungata convenientemente somministrerà sulla medesima verticale P_2 P_1 la posizione ausiliaria del punto principale, da cui potremo come precedentemente dedurre la corrispondente linea d'orizzonte, il punto di fuga e la scala di larghezza.

La prospettiva della elevazione dell'oggetto si troverà poi nello stesso modo praticato al N.° 316.

320. Può obiettarsi che i diversi punti principali P_1 elevandosi soverchiamente sulla verticale del punto P_2 cagiono in generale molto spazio al disotto del quadro; onde talvolta potrebbe accadere che venisse il quadro stesso ad essere imbarazzato dalle linee di costruzione.

Una tale difficoltà può superarsi in due modi; diminuendo cioè l'altezza di ciascuno dei rettangoli $X X_1 F_1 F_1$, $X_1 X_2 F_2 F_1$, $X_2 X_3 F_3 F_2$ che è sempre arbitraria, e lasciandola maggiore per quello che deve contenere il più gran numero di dettagli, ovvero costruendo successivamente le prospettive delle differenti parti del quadro corrispondenti a ciascun trapezio tracciato dentro l'angolo ottico. In questo ultimo caso è necessario e sufficiente conservare il primo rettangolo X_1 X_2 F_2 F_1 che contiene la prospettiva generale del piano dell'oggetto, e il rettangolo successivo X_2 F_2 F_1 X_1. Poichè dopo aver costruita sul quadro la

prospettiva di quella parte dell'oggetto che è compresa nel trapezio $x_1 y_1 y_2 x_2$ rappresentato dal rettangolo sopra indicato, noi possiamo ricuoprire con una banda di carta bianca il rettangolo medesimo, e determinati gli elementi corrispondenti al trapezio successivo $x_2 y_2 y_3 x_3$ costruire su quella banda e quindi sul quadro la prospettiva delle parti dell'oggetto contenute nel trapezio medesimo e così di seguito

321. Da ciò che precede può inferirsi facilmente quanto sia fecondo il metodo generale esposto al N° 174 Tuttavia l'applicazione pura e semplice di esso può riescire in alcuni casi soverchiamente faticosa senza che la scrupolosa esattezza delle costruzioni aggiunga bellezza al resultato finale.

Avvi un metodo di abbreviazione estremamente comodo pel caso in cui gli oggetti da porsi in prospettiva contengano molte linee curve.

Consiste questo nel suddividere in una rete di quadrati ciascuna delle bande $x_1 y_1 y_2 x_2$, $x_2 y_2 y_3 x_3$ . . (*Fig* 113) nelle quali abbiamo creduto conveniente di dividere il piano generale dell'oggetto, concepire i piani verticali aventi per tracce tutti i lati dei quadrati, e costruire in seguito le prospettive delle rette secondo le quali quei piani tagliano le faccie della superficie prismatica sostituita al piano orizzontale contenente la proiezione dell'oggetto. I trapezi che allora si otterranno sulle figure $X_1 I_1 I_2 X_2$, $X_2 I_2 I X$ . . (*Fig.* 114) saranno le prospettive dei rettangoli secondo i quali i piani inclinati $x_1 y_1$, $y_2 y_3$ . . . (*Fig* 112) tagliano i prismi verticali aventi per basi i piccoli quadrati della *Fig.* 113

Disegnando in ciascuno dei trapezi della *Fig.* 114 le linee tracciate nei quadrati corrispondenti della *Fig* 113, si otterrà speditamente la prospettiva dei dettagli i più composti L'esattezza più o meno grande resultante nelle costruzioni dipenderà dal maggiore o minor numero di quadrati costruiti entro le bande determinate sul piano dell'oggetto.

Questo metodo, analogo a quello impiegato dai Geografi, non esclude l'impiego dei principii finora esposti. Imperocchè le linee rette del piano saranno ancora rette sulle figure ausiliarie inclinate, e tutti i dettagli d'ornamenti di cornici ec. potranno determinarsi sempre col principio delle divisioni delle linee in parti proporzionali.

Google

322. Per costruire i trapezi della *Fig* 114, si condurranno le verticali dei punti a', b', c' nei quali la retta $X_3 P_3$ taglia le linee $x'_1 y'_1$, $x'_2 y'_2$, $x'_3 y'_3$; ed otterremo così la linea spezzata $a'' b'' c''$ prospettiva di quella secondo cui la superficie prismatica $x x_1 y_1 y_2$ della *Fig.* 112 è tagliata dal piano verticale contenente la scala d'altezza. La distanza $b c$ (*Fig.* 113) essendo divisa in otto parti eguali, si riporterà da O'_2 in M sopra la scala di larghezza $O'_2 X'_2$, e si tirerà la $P_3 M$ prolungandola fino in d' sopra $x'_1 y'_1$. Otterremo il trapezio $O'_2 M d' n'$ che sarà prospettiva di un rettangolo avente per lunghezza $O'_2 M$ eguale alla somma delle larghezze di otto quadrati. Talchè il trapezio $c' f' e' b'$ sarà la prospettiva del quadrato $b c f e$ (*Fig.* 113).

Proiettando i punti e' ed f' respettivamente sulle linee $X_1 Y_1$, $X Y$ in e'' ed f'' otterremo il trapezio $b'' c'' f'' e''$ prospettiva del rettangolo secondo cui il prisma verticale avente per base il quadrato $b c f e$ è tagliato dal piano inclinato $X_2 Y_2$ (*Fig* 112). Diviso ciascuno dei lati orizzontali $b'' e''$, $c'' f''$ in otto parti eguali, le congiungenti i punti di divisione saranno le intersezioni del sopra detto piano inclinato coi piani verticali determinati dai lati dei quadrati perpendicolari al quadro. Per avere la prospettiva delle intersezioni del medesimo piano $X_2 Y_2$ coi piani verticali determinati dai lati dei quadrati paralleli al quadro basterà trovare i punti nei quali il piano verticale $c e$ (*Fig.* 113) taglia le intersezioni del primo sistema di piani. Questi punti hanno per prospettiva quelli che sono comuni alle nominate congiungenti e alla diagonale $c'' e''$; quindi le orizzontali condotte per questi ultimi completeranno le prospettive dei quadrati cercati.

Nella stessa maniera si potranno costruire i trapezi della figura $X_2 Y_2 Y_1 X_1$.

CAPO IX

Delle Prospettive eseguite sopra un Quadro qualunque.

323. Fin qui dei quadri piani e verticali, su cui le prospettive possono essere costrutte o col metodo del N°. 138, o con quello particolare dei punti di concorso esposto al N°. 148, o meglio con quello più generale derivato dal precedente, stabilito al N.° 174, ed applicato con tutto il possibile sviluppo, di cui è capace, negli esempi che ci siamo proposti

Non sempre però è in arbitrio del disegnatore scegliersi il quadro piano e verticale; talora gli viene assegnata una superficie piana qualunque o curva, sulla quale dee riprodurre la immagine di un oggetto dato; talora la natura dell' oggetto lo costringe ad abbandonare la superficie piana per preferirne ad essa una curva

In questi casi egli ha da risolvere in tutta la sua generalità il Problema di Prospettiva lineare, indicato al N. 125, e che ora può enunciarsi nel seguente modo:

Essendo dati un punto di vista, una superficie che deve servire di quadro, ed un' oggetto che si vuole rappresentare, determinare;

1.° *Le intersezioni del quadro e delle superficie coniche che hanno per vertice il punto di vista e di cui gli elementi toccano la superficie dell' oggetto;*

2.° *Le intersezioni dello stesso quadro e delle superficie coniche che hanno per vertice il punto di vista e per direttrici le linee singolari dell' oggetto;*

3.° *Le intersezioni dei raggi visuali condotti per i punti singolari dell' oggetto con la superficie del quadro*

324. I dati di questo Problema non possono essere altrimenti assegnati che per mezzo delle respettive loro proiezioni, e quantunque sia concesso supporli situati in un modo qualunque nello spazio, è chiaro però che il Problema sarà soltanto possibile nel caso in cui tutti gli elementi della su-

perficie conica, che ha per vertice il punto di vista e che inviluppa l'oggetto, intersecano la superficie del quadro

In generale il processo da seguirsi per risolverlo consiste nel condurre pel punto di vista e a traverso all'oggetto dato una serie di piani ausiliari secanti. Si dovrà costruire la sezione che ciascuno di essi produce nell'oggetto e nel quadro, condurre di poi pel punto di vista altrettante rette quante potremo che tocchino la sezione fatta nell'oggetto; trovare i punti nei quali queste tangenti, prolungate se occorre, incontrano la sezione fatta nel quadro. Questi punti apparterranno al contorno della prospettiva domandata, che è in sostanza la prospettiva del contorno apparente dell'oggetto osservato dallo scelto punto di vista

Allorchè la superficie del corpo dato presentasse delle linee singolari, i piani secanti ausiliari taglieranno queste linee in certi punti. I raggi visuali condotti per quelli incontreranno le sezioni, fatte nel quadro dai piani ausiliari corrispondenti, in altri punti che saranno le prospettive dei primi, e il cui insieme costituirà la prospettiva delle linee singolari in questione.

Finalmente se la superficie dell'oggetto avesse dei punti singolari, si sceglieranno i piani ausiliari per modo da farli passare per essi; si costruiranno i raggi visuali determinati dai punti medesimi, e le intersezioni di questi raggi con le respettive sezioni fatte da quei piani nel quadro, saranno le prospettive dei punti singolari di cui si tratta.

Impiegando un numero sufficiente di piani ausiliari si otterranno altrettanti punti per la prospettiva del contorno apparente dell'oggetto e per quella delle sue linee singolari quanti occorreranno per costruire le proiezioni di queste linee, che unite alle prospettive dei punti singolari determineranno le due proiezioni della prospettiva domandata.

325. La superficie del quadro può essere o un piano qualunque o una superficie sviluppabile o una superficie nè piana nè sviluppabile. Vediamo come in ciascuno di questi casi possa determinarsi sul quadro la prospettiva dell'oggetto, allorchè se ne sono trovate le proiezioni

Se il quadro è piano, si abbatterà sopra uno dei piani coordinati, e si otterrà immediatamente la ricercata prospettiva nella sua vera grandezza.

Se la superficie del quadro è sviluppabile, lo che val quanto dire, se trattasi di determinare la prospettiva di un oggetto sopra un corpo solido terminato da una superficie sviluppabile, costruiremo lo sviluppo di questa superficie, troveremo su questo sviluppo la trasformata della prospettiva di cui sono state determinate le proiezioni, e per ottenere la prospettiva in tutta la sua realtà non rimarrà altra cosa da fare, che di inviluppare convenevolmente collo sviluppo trovato il corpo solido proposto per quadro

Per ultimo se la superficie del quadro non è piana nè sviluppabile, non si potrà ottenere la prospettiva cercata nella sua realtà che riportandola direttamente sul corpo solido al quale una tal superficie appartiene Questa operazione può farsi nei due seguenti modi:

1.° Si collocherà il piano orizzontale su cui trovasi proiettata la superficie del quadro, e per conseguenza la prospettiva cercata, nella posizione supposta dal disegno. Muniti quindi di un filo a piombo, si farà questo muovere lungo le linee costituenti la proiezione orizzontale della prospettiva, e con uno stile tracceremo sulla superficie del quadro il cammino percorso dalla estremità superiore del filo Questo cammino sarà evidentemente la prospettiva domandata

2.° Si costruiranno sulle proiezioni del quadro diverse generatrici, e tante quante occorrono perchè dai diversi punti nei quali esse taglieranno le linee costituenti le proiezioni della prospettiva possano dedursi le linee medesime Di poi sul corpo solido, la cui superficie e quella proposta per quadro, si costruiranno le generatrici obiettive di quelle tracciate sulle proiezioni, e sopra di esse si riporteranno i punti d'intersezione sopra indicati

Il primo metodo non può sempre adoperarsi, perchè nello spazio compreso fra la superficie del quadro e il piano orizzontale coordinato possono trovarsi degli ostacoli tali da impedire il movimento del filo a piombo. Il secondo è più esatto e più generale, e non esige che il disegno sia fatto nelle dimensioni stesse del quadro, lo che è un vantaggio non piccolo e tale da renderlo preferibile al precedente.

326 Talvolta la superficie del quadro è discontinua e composta di più porzioni di superficie, siccome ha luogo nel

Digitized by Google

caso delle prospettive teatrali. Allora i piani di costruzione non taglieranno il quadro secondo una linea unica, ma secondo più linee discontinue, rispetto alle quali però non troveremo difficoltà maggiori per operare che se formassero una medesima linea.

327. Non si impiega quasi mai la soluzione sopra indicata in tutta la sua generalità, permettendo ordinariamente ciascuno esempio particolare dei mezzi di soluzione più semplici che gli sono propri; ma nei casi complicatissimi è forza avere ad essa ricorso.

Allorchè l'oggetto presenterà delle linee parallele da porre in prospettiva, dovremo ricordarci che i piani condotti pel punto di vista e per queste linee si tagliano tutti secondo la retta condotta per questo punto parallelamente alla loro direzione (N.° 142); e se ne concluderà che le prospettive delle parallele in quistione devono tutte passare pel punto in cui il quadro è intersecato da quella retta. Onde si vede che le prospettive di rette parallele, tanto nel caso in cui sieno tracciate sopra un quadro piano, come in quello in cui si trovino sopra un quadro curvo, debbono sempre concorrere in un medesimo punto.

Prima di applicare le considerazioni generali precedenti ad un esempio, faremo osservare, che spesse volte conviene di determinare direttamente il contorno apparente dell'oggetto, per costruirne poi la prospettiva come se fosse una linea singolare dell'oggetto stesso. Un tal metodo somministra dei resultati più esatti, e lascia un arbitrio più lato nella scelta dei piani coordinati.

328. Risolviamo frattanto il seguente

PROBLEMA. *Dato un quadro cilindrico verticale, una piramide triangolare, e un punto di vista; trovare la prospettiva della piramide sulla superficie cilindrica data.*

Prendasi per piano coordinato orizzontale quello della base della piramide, e sieno $X\ Y$ (*Fig.* 115) la linea di terra, $(O,\ O')$ il punto di vista; $(S,\ S')$ il vertice della piramide, $(a\ b\ c,\ b'\ c')$ la sua base; $(d\ e\ f,\ f'\ f''\ e'\ e'')$, $(g\ h\ i,\ i'\ i''\ h''\ h')$

due zoccoli prismatici a base triangolare sui quali essa è stabilita; e finalmente sia (C, C') il centro d'un arco di cerchio $k\ m\ l\ p$, base ad un tempo e proiezione orizzontale della superficie del quadro.

Affinchè i piani di costruzione taglino questa superficie secondo le sezioni più semplici, noi li sceglieremo verticali. E siccome importa specialmente d'avere la trasformata della prospettiva cercata e non le sue proiezioni (N.° 325), trascureremo il disegno di queste ultime per occuparci soltanto dello sviluppo della superficie del quadro sul quale costruiremo direttamente la trasformata suddetta.

La traccia $p\ l\ k$ della superficie cilindrica è ad un tempo la sua sezione retta; quindi la trasformata di questa curva sullo sviluppo della superficie medesima sarà rettilinea. Supponiamo dunque che essa sia rappresentata dalla retta $A\ s'\ B$ (*Fig.* 116), e che lo sviluppo in questione trovisi al disopra e al di sotto di questa retta.

Si otterrà la prospettiva del vertice (S, S') cercando il punto in cui il raggio visuale corrispondente incontra il quadro. A tale oggetto conducesi il piano verticale $O\ S\ l$; questo taglia il quadro secondo la verticale $(l, l'\ l'')$; e se per il punto di vista, e per il punto (S, S') si conduce la retta $(O\ S\ l,\ O'\ S'\ l'')$, questa incontrerà la verticale $(l, l'\ l'')$ nel punto (l, l'') che sarà evidentemente la prospettiva di (S, S').

Per avere questa prospettiva sullo sviluppo, si sceglierà a piacere un punto s' sulla retta $A\ s'\ B$, che supporremo essere quello in cui viene a coincidere il punto l della curva $k\ l\ p$ allorchè questa si rettifica, e il punto (l, l'') situato al disopra di l dell'altezza $l'\ l''$ dovrà sullo sviluppo trovarsi sulla $s'\ s$ perpendicolare alla retta $A\ s'\ B$ ad una distanza $s'\ s$ eguale ad $l'\ l''$.

Per avere la prospettiva del punto (g, g') dello zoccolo, si condurrà il piano ausiliario $O\ g\ k$, il quale taglierà il quadro secondo la verticale $(k, k''\ k')$; si condurrà in seguito il raggio visuale $(O\ g\ k,\ O'\ g'\ k'')$ e il punto (k, k'') ove egli incontra la verticale $(k, k''\ k')$ sarà la prospettiva del punto (g, g'). Per riportare questa prospettiva sullo sviluppo, si rettificherà l'arco $l\ k$, se ne riporterà la lunghezza sopra $A\ s'\ B$, da s' in B; per il punto B si condurrà $B\ G$ perpendicolare

ad $A\ s'\ B$; si porterà $k'\ k''$ da B in G, e quest'ultimo punto sarà la prospettiva cercata

Su questa medesima perpendicolare si troverà la prospettiva G_1 del punto $(g,\ g'_1)$ prendendo $B\ G_1 = k'\ k''_1$ che è la distanza dal coordinato orizzontale del punto $(k,\ k''_1)$, in cui il raggio visuale $(O\ g\ k,\ O'\ g'_1\ k''_1)$ incontra la generatrice del punto k. Nello stesso modo si troverà I per prospettiva del punto $(i,\ i')$; H per prospettiva del punto $(h,\ h')$ ec.

Collo stesso processo sarà facile ottenere sullo sviluppo della superficie del quadro le prospettive d'altrettanti punti quanti vorremo di ciascuna costola della piramide data; ciò che determinerà le prospettive delle costole medesime, ed in seguito la prospettiva richiesta.

Ma perchè si possano descrivere le linee $G\ I$, $I\ H$ ec. con esattezza, sarà bene rammentarsi che le prospettive di linee parallele si tagliano ordinariamente in un medesimo punto (N.° 327); e sarà bene ancora esaminare la forma generale di ciascuna di esse, la quale altro non è che la trasformata di ciascuna ellisse secondo la quale ogni piano condotto per il punto di vista e per ciascuna costola della piramide taglia la superficie del cilindro proposto per quadro.

Per trovare il punto, in cui hanno a concorrere la $G\ I$ e le prospettive delle altre costole $f\ d$, $e\ a$ parallele ad $i\ g$, basterà condurre il piano verticale $O\ M$ parallelo a questa costola, il quale taglierà il quadro secondo la retta $(M,\ M''\ M')$; condurre il raggio $(O\ M,\ O'\ M')$ orizzontale che incontra la retta suddetta nel punto $(M,\ M')$.

Rettificando in seguito l'arco $l\ k\ M$ e portatolo da s' in n si tirerà $n\ n'$ perpendicolare ad $A\ s'\ n$, e presa $n\ n' = M''\ M'$ avremo il punto n' che sarà il punto di concorso cercato.

Trovato lo sviluppo della prospettiva cercata, lo si applicherà sulla superficie del corpo che serve da quadro per modo che $s'\ s$ coincida con la verticale $(l,\ l'\ l'')$, e si avrà la prospettiva dimandata nella sua realtà (N.° 325).

329. *Osservazione.* — Il problema precedente comprende tutta la teoria della prospettiva lineare dei *Panorama*; cioè a dire delle prospettive fatte di un intero paese o di una città sulla superficie interna d'una torre cilindrica verticale, trovandosi il punto di vista sull'asse della torre.

A cagione delle grandi dimensioni di questa superficie, la prospettiva di ciascheduno oggetto dell'estensione rappresentata non differisce sensibilmente sul Panorama, da quella che sarebbe fatta sul piano tangente alla superficie della torre, e corrispondente al centro dell'oggetto; di modo che l'immagine si trova realmente composta d'una serie di prospettive fatte sulle facce piane verticali d'un prisma circoscritto al quadro. Frattanto se un oggetto, un monumento per esempio abbia una grande estensione, e specialmente se quest'oggetto contiene delle grandi linee rette, come allineamenti di vie, di canali, di piantagioni ec. egli è evidente che bisognerà per l'esecuzione della immagine ricorrere alla teoria esposta.

330 Nella pratica il tracciato delle prospettive delle grandi linee rette sopra un Panorama, esige molta cura, perchè tutti possedendo il sentimento della linea retta, la minore inesattezza nel tracciamento di esse basterebbe a distruggere ogni illusione.

Volendo operare con rigore, bisognerà costruire un numero sufficiente di punti delle prospettive delle linee rette, e per accordare questi punti il mezzo pratico che può tenersi è il seguente:

Si appoggerà su due dei punti esattamente costruiti una corda tinta in bianco con gesso; e seguendo il processo usato dai segatori di legname si tenderà questa corda attirandola verso il punto di vista con una funicella; si lascerà in seguito libera a se stessa instantaneamente la funicella, e la corda muovendosi allora con rapidità nel piano condotto per la linea retta da rappresentarsi, e per il punto di vista, andrà a colpire la superficie del quadro secondo l'arco elittico che doveva tracciarsi, e che si troverà sul quadro marcato da un tratto bianco.

331. Abbiamo detto (N.° 323) non essere sempre in facoltà del disegnatore la scelta del quadro piano verticale, si perchè può essergli assegnata una superficie curva per quadro, sì perchè la natura del soggetto da rappresentarsi in prospettiva può obbligarlo ad escludere il piano.

Il primo caso avviene allorchè si tratta di dipingere dei cassoni o una scena qualunque sopra una volta; il secondo si verifica quando la rappresentazione prospettica dell'oggetto

Digitized by Google

fatta sopra un piano dà luogo necessariamente alla prospettiva curiosa di alcune delle sue parti che non possono per verun modo trascurarsi nella immagine dell'oggetto proposto.

332. Per vedere a quali condizioni dee sodisfare la superficie del quadro in quest'ultimo caso onde rispondere convenientemente al fine che ci proponiamo, si immagini che una prospettiva qualunque offrasi ai nostri occhi. Se essa non è tale da condurci naturalmente a considerarla dal punto che è stato scelto per punto di vista, non ci presenterà l'effetto il più sodisfacente; e se per avventura alcune delle sue parti fossero prospettive curiose, o prossime ad esserlo, è evidente che mancherà affatto la illusione, oggetto precipuo del disegnatore.

Consegue da ciò che di tutte le superficie curve, la sferica avente il centro nel punto di vista è quella che meglio può convenire come quadro di una prospettiva: perocchè i due inconvenienti sopra indicati e che sono senza dubbio i più gravi vengono totalmente eliminati.

In effetto lo spettatore si collocherà naturalmente al centro della sfera coll'intendimento di trovarsi equidistante da tutti i punti del quadro, e ciascuna parte di questo quadro non potrà giammai degenerare in prospettiva curiosa, riuscendo alla superficie sferica normale ciascuno dei raggi visuali.

333. Tuttavia non sono i vantaggi che la forma sferica presenta per favorire l'illusione che la fanno preferire; sendochè questi vantaggi malamente compensino l'inconveniente ch'essa ha di non potere essere costruita che di opera murale.

Ma allorchè ci proponessimo di dare con una rappresentazione prospettica la idea generale d'un oggetto veduto sotto un grandissimo angolo, è chiaro che male raggiungerebbesi lo scopo con un quadro piano per l'impossibilità in cui ci troveremmo di evitare le prospettive curiose, mentre vi riusciremmo benissimo con un quadro sferico. Una superficie piana non sarebbe del paro affatto suscettibile di servire da quadro se l'oggetto da rappresentarsi fosse per esempio un paese che può essere osservato totalmente girando attorno ad un punto, mentre si vede che in tal caso la superficie sferica sarebbe convenevolissima.

334. D'altra parte la rappresentazione dell'orizzonte intiero considerato attorno d'un punto, offre per prospettiva una zona orizzontale di sfera che ha necessariamente poca

altezza rapporto al suo contorno; d'onde si vede che la sfericità nel senso verticale è incomparabilmente meno necessaria che nel senso orizzontale. Dunque in simile caso un quadro cilindrico verticale deve offrire in ordine alla illusione gli stessi vantaggi che sono propri di un quadro sferico. Sotto altri rapporti poi il quadro cilindrico è ben preferibile; poichè la prospettiva ed è più facile a determinarsi e a riportarsi; la costruzione della superficie del quadro non esige lavori molto dispendiosi; infine riesce più agevole di illuminare la immagine dell'oggetto per mezzo della luce solare.

333. Sono questi senza dubbio i motivi che nella costruzione del Panorama hanno fatto preferire le fabbriche cilindriche illuminate dall'alto. Gli spettatori si trovano in queste fabbriche collocati sopra gallerie d'onde si scorge interamente il quadro ad una luce dolce siccome quella da cui sono illuminati gli oggetti in estate, allorchè le nubi tolgono ai raggi solari il loro splendore troppo vivo; alcune tele convenientemente fissate impediscono la vista dei bordi del quadro acciocchè lo spettatore non rimanga disingannato dal confronto del vero con l'artificiale della rappresentazione: e ordinariamente la illusione è completa, quantunque la pittura sia trascurata; ciò che dimostra il vantaggio della superficie prescelta a servire da quadro.

CAPO X.

Delle ombre nella prospettiva dei corpi.

336. Non considereremo che il caso della luce proveniente dal sole; perciò tutto quello che abbiamo detto ai N.i 196, 198, 199, relativamente alla prospettiva delle rette parallele ed inclinate in un modo qualunque al quadro, avrà luogo evidentemente pei raggi luminosi dei diversi punti d'un oggetto illuminato dal sole.

Quando la direzione di questi raggi non è determinata dalle sue proiezioni, può scegliersi a piacere assegnando sul quadro l'ombra portata da un punto dell'oggetto; lo che basta a trovare le ombre di tutto l'oggetto medesimo.

Abbiasi infatti il trapezio n n' e e' (*Fig.* 117) prospettiva d'un rettangolo verticale; ed a'' sia l'ombra del punto n sul piano orizzontale determinato dalla base del quadro e da quella del rettangolo.

La retta n n'' sarà la prospettiva del raggio di luce che passa per il punto n, e la retta a'' n' sarà la traccia orizzontale del piano verticale n n' n'' che contiene il raggio medesimo. Il prolungamento di questa traccia taglia la linea di orizzonte in un punto s' che sarà quello in cui concorrono le prospettive delle proiezioni orizzontali di tutti i raggi luminosi: sulla verticale s' s si troverà dunque il punto di concorso della prospettiva di tutti i raggi luminosi, e questo punto sarà quello s in cui la s' s è incontrata dal prolungamento del raggio n n'' (N.° 198).

Per determinare l'ombra di ogni altro punto e, si costruirà il raggio s e che passa per questo punto e la sua proiezione s' e', la quale farà conoscere il punto e'' ombra del punto e. Il poligono n' e' e'' n'' sarà il contorno dell'ombra richiesta, del quale il lato n'' e'' dovrà concorrere in c punto di concorso dei lati n e, n' e' del rettangolo, poichè per il principio del N°. 49, la retta a e e la sua ombra n'' e'' debbono riuscire parallele.

337. *Osservazione I.* — Nell'esempio precedente, il sole trovasi di faccia allo spettatore e al di là dell'oggetto; per cui l'ombra viene portata in avanti. In questo caso il punto s è sempre al di sopra della linea d'orizzonte.

338 *Osservazione II* — Può avvenire che per il migliore effetto della prospettiva si giudichi conveniente supporre il sole situato dietro lo spettatore; in tal caso l'ombra si porterà al di là dell'oggetto, e il punto di concorso dei raggi luminosi si troverà al di sotto della linea d'orizzonte. Ciò però non cambia il modo di operare: così per il rettangolo rappresentato nella *Fig* 118, supposto che il punto a porti ombra in n'', si troverà il punto s' sulla linea d'orizzonte tirando n' a'', e si avrà il punto s sulla verticale del punto

s' prolungando la $a\ a''$ fino all'incontro con la verticale medesima; in seguito il raggio $s\ e$ e la sua proiezione orizzontale $s'\ e'$ determineranno l'ombra e'' del punto e; ed $e'\ e''\ a''\ a'$ sarà il contorno dell'ombra portata dal rettangolo considerato.

339 *Osservazione III.* — È manifesto che dato il punto s (*Fig.* 117), tutte le ombre dell'oggetto rimangono determinate, come nel caso in cui fosse data l'ombra d'uno dei suoi punti; poichè la verticale condotta da s taglierà la linea di orizzonte nel punto s' nel quale concorrono le prospettive delle proiezioni orizzontali dei raggi luminosi, ed allora data la prospettiva a d'un punto dell'oggetto, e quella a' della sua proiezione orizzontale, il sistema delle due rette $s\ a$, $s'\ a'$ farà conoscere immediatamente l'ombra corrispondente a'' sul piano orizzontale, o sopra un'altra superficie qualunque.

Nella *Fig.* 119 supponesi il punto di concorso s al di sotto della linea d'orizzonte e ci si propone di trovare l'ombra portata dalla verticale $a\ a'$ sul piano orizzontale e sopra un altro piano $D\ A\ B\ C$ verticale. La $s\ s'$ perpendicolare alla linea d'orizzonte somministra il punto s' nel quale concorreranno le prospettive delle proiezioni orizzontali dei raggi luminosi, onde tirando $a'\ s'$ avremo la intersezione del piano orizzontale con quello che passa per $a\ a'$ ed è parallelo ai raggi luminosi. Questa intersezione è nel tempo stesso l'ombra portata dalla verticale data sul piano orizzontale, ed $a'\ a''$ è la parte di questa ombra che rimane visibile. Il piano $D\ A\ B\ C$ è intersecato dal piano $a\ a'\ a''$ secondo la verticale $a''\ a'''$; il raggio luminoso $a\ s$ contenuto nel piano $s'\ a'\ a$ incontra questa verticale in a'''; dunque $a''\ a'''$ è l'altra parte dell'ombra domandata.

340 *Osservazione IV.* — Il punto s può considerarsi come la prospettiva del centro del sole da cui emanano tutti i raggi luminosi. Talchè quando il sole è dietro al quadro o di faccia allo spettatore, ed il punto s trovasi sopra il quadro medesimo, è sempre facile costruire la prospettiva della sua immagine. Poichè nota essendo la posizione dell'occhio, e determinata quella del centro s del sole al di sopra dell'orizzonte, basta rammentarsi che il suo diametro è veduto dalla terra sotto un angolo di 32 minuti primi, per concludere che la dimensione prospettica di questo diametro si otterrà, con-

giungendo il punto di vista con s, e costruendo nel piano verticale che passa per questa congiungente, due rette che facciano con essa un angolo di 46 minuti primi.

PROBLEMA. *Trovare le ombre d'una fascia* (*Fig.* 120).

341. Sieno o' o'' la linea d'orizzonte; P il punto principale; A B la prospettiva della fascia; s il punto di concorso dei raggi luminosi, s' quello delle loro proiezioni prospettiche orizzontali.

Per trovare l'ombra portata dallo spigolo della fascia parallelo al quadro, basterà conoscere quella d'un punto m. Perciò si tirino m s' ed m s. la m s' sarà la intersezione del piano orizzontale condotto per lo spigolo m e col piano verticale costituito dal raggio m s; onde questo piano verticale m s' s taglierà la faccia del muro parallela al quadro secondo la verticale n p, e il punto p comune a questa verticale e al raggio m s sarà l'ombra del punto m. Egualmente si trova l'ombra p' del punto m' e le parallele alla linea d'orizzonte condotte per p e p' saranno le ombre dello spigolo considerato.

Conducendo per a il raggio s a a', si vede che la porzione a' e dello spigolo porterà ombra sull'altra faccia del muro parallelo al quadro. Tirando per la estremità (c_1, c) il raggio luminoso (c_1 s', c s) si ha la verticale c'' c' secondo cui il piano c c_1 s' taglia la faccia del muro, e quindi il punto c' per ombra del punto c; talchè c' α'' parallela a c a' sarà l'ombra cercata: la verticale α'' α' sarà quella dello spigolo verticale a α del muro, e la retta α α' che determina l'ombra di questo spigolo sul piano orizzontale dovrà concorrere in s'.

Tirando la verticale c' d' fino all'incontro del raggio d s si ha l'ombra dello spigolo verticale c d della fascia. Per aver l'ombra dello spigolo d k perpendicolare al quadro, e che comincia dal punto d' bastera unire il punto d' con (ι_1, ι), che è quello in cui la d k incontrerebbe la faccia del muro prolungata. Si avrà l'ombra portata sulla fascia B dello stesso spigolo d k cercando il punto (ε, ε_1) in cui il raggio (c_1 s', d s) del punto (c_1, d) incontra il piano prolungato della fascia medesima, e congiungendo il punto ε_1 con k.

342. Quando la direzione dei raggi luminosi è determi-

nata dalle sue proiezioni sul piano e sulla elevazione dell'oggetto, i punti s, s' non possono scegliersi più ad arbitrio. Supponiamo, per esempio, che le due rette $m\,n$, $m'\,n'$ (*Fig.* 121) sieno le proiezioni orizzontale e verticale d'un raggio luminoso; l o l' essendo l'angolo ottico, ed $x\,y$ la base del quadro.

Si traccerà la retta $o\,t$ parallela alla proiezione orizzontale del raggio di luce, e così determineremo il punto di concorso t, del quale si costruirà la prospettiva t' (*Fig.* 122); la verticale $t'\,s'\,s$ farà conoscere il punto s', ed in seguito fatto l'angolo $s'\,P\,s$ eguale all'angolo $m'\,n'\,n'$, la intersezione della retta $P\,s$ con $t\,s'\,s$ darà il punto s (N.° 196).

343 Non sempre però può aversi sulla figura il punto di concorso dei raggi luminosi, e talvolta avviene che certe masse d'ombra necessarie all'effetto della prospettiva domandata non possono ottenersi senza allontanare questi punti di concorso, anche al di là dei limiti del foglio su cui si disegna.

In questo caso il modo più semplice è quello di fare una proiezione geometrica dell'oggetto corredata delle sue ombre, e considerando il contorno di queste ultime come linee singolari dell'oggetto stesso, costruirne la prospettiva coi metodi ordinari. Se però non avremo bisogno che di alcune masse poco accidentate nei loro contorni, si potrà determinarle anche direttamente in prospettiva senza escire dai limiti della figura

344 Sia $b\,d$ (*Fig.* 123) la proiezione orizzontale d'un raggio luminoso, e $b'\,d'$ la proiezione verticale dello stesso raggio fatta sopra un piano parallelo al quadro: tirando $o\,c$ parallela a $b\,d$ si ha sopra il prolungamento della base del quadro la proiezione o del punto di concorso delle proiezioni orizzontali dei raggi luminosi.

Trattisi ora di costruire l'ombra portata da una verticale $n\,n'$ sul piano orizzontale che passa per la base del quadro $X\,Y\,T\,U$ (*Fig.* 124). La retta $n\,n'$ parallela a $b'\,d'$ essendo la proiezione del raggio luminoso sul piano verticale $n'\,n''$ parallelo al quadro, è evidente che la traccia orizzontale di questo raggio, si troverà sopra una perpendicolare al quadro medesimo condotta per n'', e quindi la prospettiva di quella traccia, che è il punto cercato, sarà sopra $n''\,P$

Avendo sul quadro la prospettiva del punto c in cui concorrono le proiezioni orizzontali di tutti i raggi luminosi, baste-

rebbe tracciare la retta $u'\ n'''_1$ diretta verso questo punto: non avendolo, si potrà sostituire l'altro punto o' della linea d'orizzonte situato sul bordo verticale del quadro, ponendo la proporzione

$$n''\ n' : n''\ n''' :: c\ p\ .\ p\ x \ (Fig\ 123):$$

con che si determinerà il punto n'' sulla $u'\ n''$ parallela alla linea d'orizzonte.

Della infatti X la distanza del punto principale P dal punto in cui $n'\ n''$ incontra la linea d'orizzonte, è facile dedurre per la similitudine dei triangoli somministrati dalla figura

$$u'\ n''\ :\ n''\ n''' :: X\ .\ P\ o'$$

ma si ha pure;

$$X\ :\ P\ o' :: c\ p : p\ x$$

dunque il punto n''' dato sulla $n'\ u''$ dalla prima proporzione somministra la $c'\ u'''$ che incontra la $n''\ P$ in un punto n'''_1 estremità dell'ombra cercata $n'\ n'''_1$.

345. Resulta da ciò la costruzione seguente: si traccerà ove si vuole sul foglio una retta $b''\ d''$ (*Fig.* 124) parallela alla proiezione verticale $b'\ d'$ (*Fig.* 123) del raggio luminoso, e si divederà l'orizzontale $p''\ d''$ nel rapporto di $p\ c$ a $p\ x$ in un punto h. Si unirà h con b'' ed avremo la figura $p''\ b''\ d''$ che sarà una specie di scala per le ombre di ciascun punto dell'oggetto: così per l'ombra del punto n, si traccerà; 1.° la retta $n'\ n'$ parallela alla linea d'orizzonte; 2.° la retta $n\ n''$ parallela a $b''\ d''$ ciò che determinerà il punto n''; 3.° la retta $n\ n'''$ parallela a $b''\ h$, la quale dividerà $n'\ n''$ nel rapporto di $c\ p$ a $p\ x$; 4.° si unirà n'' col punto principale, n''' con o' e le due rette $n''\ P$, $n'''\ o'$ si taglieranno in n'''_1 ombra richiesta.

Si può operare anche nel modo seguente. Dopo aver tracciato (*Fig.* 125), la retta $b'''\ d'''$ parallela a $b'\ d'$ (*Fig.* 123), si determinerà il segmento $d'''\ h'$ in modo che si abbia:

$$p'\ d''' : d'''\ h' :: c\ x : x\ p,$$

e quindi per l'ombra d'un punto u, si traccerà;

1° la retta $u'\ u'''$ parallela alla linea d'orizzonte;

2° le rette $u\ n''$, $u\ u'''$ respettivamente parallele a $b'''\ d'''$, $b'''\ h'$;

3° la retta $u''\ P$ diretta al punto principale;

4° la $u'''\ o''$ che deteterminerà sulla precedente il punto n''', ombra richiesta.

Così potremo scegliere il punto di concorso sul bordo destro o sinistro del quadro, secondo che si giudicherà più conveniente l'uno dell'altro

346. La *Fig* 127 è l'applicazione del principio precedente alla determinazione delle ombre d'un prisma, nella ipotesi che le proiezioni del raggio luminoso sieno inclinate di 45° sulla linea di terra.

I dati sono la base Q e la elevazione Q' del prisma (*Fig.* 126); la proiezione orizzontale o la traccia $a\ b$ della parete anteriore d'un muro situato dietro il prisma; la proiezione orizzontale $q\ c$, e quella verticale $b'\ d'$ del raggio luminoso.

Si costruirà dapprima la prospettiva del piano, e della elevazione dell'oggetto, non che la figura $b'\ d'\ p$ ausiliaria, tracciando la retta $b'\ d'$ a 45°, e dividendo $p\ d'$ nel rapporto di $c\ p : p\ y$. In seguito si opererà come si è detto al N.° 344

347. Allorchè il quadro non è piano, o essendo tale non è però verticale, il processo indicato non è applicabile. In tali casi dovremo sempre determinare coi metodi insegnati nel Libro I le proiezioni dei contorni delle ombre; si porranno questi contorni in prospettiva come se essi fossero linee apparenti dell'oggetto, e le prospettive ottenute faranno conoscere sulla prospettiva cercata le parti in ombra e quelle illuminate del corpo da rappresentarsi

348. Non abbiamo considerato il caso della luce emanata da un corpo luminoso qualunque, perchè non avviene quasi mai, o almeno è estremamente raro che si abbia bisogno di determinare le ombre prodotte da un corpo luminoso, di cui le dimensioni sieno un poco considerevoli. Tanto più raro poi può presentarsi questo caso nei disegni architettonici, scopo precipuo delle quistioni contenute nel presente lavoro.

Ad ogni modo, siccome nel Libro I non abbiamo trascurato di indicare i mezzi propri alla determinazione delle ombre quando la luce proviene da un corpo luminoso qualunque, il disegnatore geometra non si troverà imbarazzato nel risolvere una questione simile, se gli venisse proposta, operando secondo le norme dettate nel numero precedente.

LIBRO TERZO.

PROSPETTIVA AEREA

CAPO I.

Nozioni generali.

349. *La Prospettiva aerea è quella Scienza che ha per oggetto la imitazione dei corpi, e che serve a determinare la degradazione delle tinte presentate da essi all'occhio dello spettatore.*

Fedeli però al nostro assunto noi non daremo di questa scienza che i soli elementi applicabili all'acquerello, e che ponno per conseguenza interessare l'Ingegnere Architetto.

350. Tutti i disegni nei quali ha questi per scopo la rappresentazione dei corpi possono classarsi in due categorie che vengono distinte naturalmente dal modo con cui si conviene di riguardare i corpi medesimi.

In alcuni supponesi il corpo osservato ad una distanza infinita dalla superficie sulla quale è stata ritratta la sua immagine; in altri supponesi il corpo riguardato ad una distanza finita dalla superficie stessa. I primi sono il resultato della intersezione di una superficie cilindrica circoscritta al corpo dato con una superficie data, per conseguenza altro non sono che vere e proprie proiezioni fatte su quest'ultima superficie,

e la loro costruzione viene insegnata dalla Geometria Descrittiva; i secondi sono il resultato della intersezione con una superficie data d'una superficie conica circoscritta pure al corpo dato ed avente il vertice nel punto di vista; la loro costruzione viene insegnata dalla Prospettiva lineare.

351. Nel Libro I e nel Capo ultimo del Libro II noi abbiamo supposto che i corpi graficamente rappresentati nell'uno o nell'altro modo si trovassero in presenza di un corpo luminoso collocato a distanza infinita o finita da essi; e nella ipotesi che i corpi in quistione fossero perfettamente opachi, abbiamo date le regole, in grazia delle quali potevansi costruire i contorni delle loro ombre e delle loro penombre.

352. Ma nel risolvere questi Problemi non abbiamo tenuto conto d'un fenomeno importante, quello che ci procura la visione. Noi abbiamo supposto che i corpi opachi assorbissero totalmente i raggi luminosi che sembrano annullarsi nel loro incontro; mentre avviene che i raggi medesimi sono respinti dalla superficie dei corpi medesimi in tutte le direzioni.

È noto che questa luce proveniente in deboli filetti dai corpi illuminati, dicesi *disseminata*, e che *disseminazione* chiamasi il fenomeno pel quale una tal luce quasi insensibile è rinviata.

353. Il polimento più o meno grande della superficie dei corpi opachi aumenta o diminuisce la intensità della luce respinta; talchè quando il corpo che riceve un raggio luminoso fosse un forbito pezzo d'acciaio o uno specchio, il raggio stesso, qualunque esso sia, sarebbe rinviato senza alterazione sensibile. Un tal fenomeno si chiama allora *riflessione*; i corpi che lo producono diconsi *specchi* o *corpi riflettenti*, e la luce rinviata chiamasi *luce riflessa*.

Rammentiamo qui sol di passaggio che il raggio incidente in un punto qualunque di un corpo, la normale alla sua superficie in quel punto, e il raggio riflesso si trovano in un medesimo piano; e che gli angoli fatti colla normale medesima dalle direzioni de' due raggi sono eguali.

354. Havvi molta analogia fra la disseminazione e la riflessione.

In effetto; un gran numero di esperienze ci provano che

le superficie dei corpi in generale sono ricoperte di ineguaglianze le quali presentano alla luce delle facce di tutte le inclinazioni.

Il fluido luminoso essendo di una estrema tenuità, ciascun raggio luminoso d'una grossezza sensibile si trova composto di un numero infinito di filetti sottilissimi, che vengono necessariamente riflessi in direzioni diverse, secondo le inclinazioni delle faccette molecolari da essi incontrate. A ciò è dovuto il fenomeno della disseminazione.

Ma se concepiamo che un corpo d'una eccessiva durezza sia perfettamente pulito, in luogo di offrire alla luce questo numero immenso di faccette molecolari, esso non le presenterà che una serie di piccoli piani diretti dal pulimento nella direzione del piano tangente. Questi piccoli piani rifletteranno allora tutta la luce che arriverà ad essi sotto il medesimo angolo, e nello stesso piano di riflessione, che è quanto dire secondo un medesimo raggio.

Segue da ciò che allorquando si aumenta il pulimento di un corpo diminuisce la disseminazione da esso prodotta, e si fa per lo contrario a mano a mano più forte la riflessione. Nulladimeno qualunque sia la durezza del corpo da pulirsi, qualunque sia il grado di finezza della polvere impiegata per dare il pulimento, la distanza fra le molecole del corpo non può ridursi mai nulla, la polvere lascia sempre delle strie; e ciò fa sì che non possa aversi mai riflessione senza disseminazione.

355. Immaginiamo un corpo qualunque, per esempio una sfera perfettamente pulita ed illuminata da un punto. Ciascun raggio di luce inviato sulla sua superficie sarà nella sua totalità riflesso; e se uno spettatore osserverà quella sfera, vi sarà uno di questi raggi riflessi che verrà inviato nel di lui occhio. Egli allora rimarrà per modo colpito dallo splendore del punto che rinvia quel raggio, da fargli supporre che in esso ritrovisi il punto luminoso.

Se la superficie della sfera non sarà perfettamente pulita, ciascun raggio di luce verrà disseminato in tutte le direzioni; ma le faccette molecolari dirette secondo il piano tangente al punto d'incidenza e nelle direzioni le più vicine a questo piano, essendo le più numerose, i filetti disseminati

che si approssimeranno di più alla direzione dei raggi che sarebbero riflessi se la sfera fosse pulita, riuscirebbero i più intensi. Quindi esisterebbe anche in questo caso sulla sfera un punto più illuminato degli altri, e sarebbe quello che, supposta pulita perfettamente la superficie della sfera, rinvierebbe all'occhio il raggio da esso ricevuto. I punti di mano in mano più lontani da quelli avrebbero una intensità di luce successivamente decrescente.

È stato dato il nome di *punti brillanti* a quei punti che sì nell'uno come nell'altro caso riflettono verso l'occhio dello spettatore il respettivo raggio incidente. E sono state chiamate *linee* ed *immagini brillanti* le riunioni di più punti brillanti che uno stesso corpo può presentare in grazia della sua forma, quando viene illuminato da più punti luminosi o da un altro corpo luminoso qualunque.

Si sente fin d'ora come debba essere di non poca importanza la determinazione dei punti e delle linee brillanti nei disegni aventi per oggetto la rappresentazione dei corpi. Noi ci occuperemo di questi prima di prendere in esame le altre cause che più o meno modificano gli effetti della luce.

CAPO II.

Teoria dei punti brillanti.

356 Per facilitare la ricerca di questi punti sopra i corpi noi cominceremo da determinare la loro posizione sulle linee; vedremo poi come le considerazioni alle quali saremo condotti servano a stabilire i processi che ne determinano la posizione sulle superficie da cui i corpi stessi possono essere terminati.

Indipendentemente da ciò la soluzione del problema attuale rispetto alle linee avrà un altro vantaggio per la pratica. Imperocchè essa tornerà utile al Disegnatore tutte le volte in cui le linee stesse piuttosto che essere metafisiche, siccome

Digitized by Google

effettivamente sono allorche si considerano geometricamente, hannosi a riguardare quali esseri fisici In questo ultimo caso si trovano i fili, le corde, le costole d'un pezzo di legno, i bordi d'uo tetto, le nervature d'una volta ec. Tali esseri hanno, è vero, delle dimensioni; ma la loro larghezza e la loro spessezza sono così poco sensibili specialmente nei disegni, da potersi riteoere come linee: tuttavia essi partecipano delle proprietà dei corpi, e presentano dei punti brillanti allorchè la loro piccole superficie riflettono verso l'occhio il raggio luminoso che ricevono.

Per farci una idea rigorosa di queste linee fisiche noi supporremo ch'esse sieno terminate da piccole superficie inviluppi, di cui la inviluppata sia una sfera, e di cui le direttrici sieno somministrate dalla direzione delle linee medesime. Al seguito di tale ipotesi, ogni retta perpendicolare alla tangente d'una linea sarà normale al piccolo inviluppo avente per direttrice la linea stessa.

357. Ciò premesso, il problema generale da risolversi sarà il seguente.

Dato un punto luminoso, una linea, e un punto di vista, trovare sulla linea data un punto tale che la tangente relativa faccia coi raggi incidente e riflesso corrispondenti, due angoli eguali fra loro.

Possono darsi quattro casi distinti, cioè

1.° Il punto luminoso e il punto di vista situati ambedue a distanze finite dalla linea data.

2.° Il punto luminoso e il punto di vista collocati il primo all'infinito, e il secondo a distanza finita dalla linea data.

3.° Il punto luminoso collocato a distanza finita dalla linea, e il punto di vista all'infinito.

4.° Il punto luminoso e il punto di vista ambedue situati ad una distanza infinita.

Il primo e il secondo caso si verificano nei disegni di prospettiva, e quasi sempre questo piuttosto che quello.

Il terzo e il quarto nei disegni di proiezione.

La linea data potendo essere o retta o curva, noi daremo la soluzione generale del problema che ci occupa prima per rispetto alle linee rette

Punti brillanti delle linee rette.

358 Primo caso. *Il punto luminoso e il punto di vista si trovano a distanze finite* (*Fig.* 128.)

Sia $(A, A' A'')$ la retta data, (L, L') il punto luminoso, (V, V') il punto di vista. Se immaginiamo che questi due punti concepiscano un movimento di rotazione attorno alla retta data, essi descriveranno due circoli $(l\ L\ l_1,\ l'\ l'_1)$, $(v\ V\ v_1,\ v'\ v'_1)$ in piani perpendicolari alla retta ed aventi il loro centro sopra di essa. Costruendo il cono retto che passa pei circoli suddetti e che ha per asse la retta data, il suo vertice (A, B') sarà il punto brillante cercato.

Infatti le rette $(A\ L,\ L'\ B')$, $(A\ V,\ B'\ V')$ come elementi della superficie conica sono egualmente inclinati sull'asse $(A, A'\ A'')$. Considerando la retta $(A, A'\ A'')$ come un cilindro di raggio infinitamente piccolo (N.° 355), e immaginando condotto pel punto (A, B') un piano $M'\ N'$ perpendicolare al suo asse, la retta $(A\ b,\ B'\ b')$, secondo la quale viene da esso tagliato il piano delle due rette $(A\ L,\ L'\ B')$, $(A\ V,\ V'\ B')$, riescirà normale al cilindro stesso, e gli angoli orizzontalmente proiettati in $L\ A\ b$, $V\ A\ b$ saranno eguali. Dunque il raggio incidente $(A\ L,\ L'\ B')$ viene riflesso dal cilindro suddetto secondo la linea $(A\ V,\ B'\ V')$, cioè a dire verso il punto di vista; e perciò il punto (A, B') è il punto brillante cercato.

359. *Osservazione.* — Le costruzioni sono estremamente più semplici allorchè il punto luminoso L, il punto di vista V, e la retta data $A\ A_1$ si trovano in un medesimo piano (*Fig.* 129). Basterà allora condurre $L\ l_1$ perpendicolare alla retta $A\ A_1$, prendere $l\ l_1$ eguale ad $L\ l$, e tirare $l_1\ V$: il punto B nel quale la $A\ A_1$ viene tagliata da $l_1\ V$ sarà il punto brillante richiesto. Poichè a cagione degli angoli $l\ B\ l_1$, $V\ B\ v$ opposti al vertice si ha l'eguaglianza degli angoli $L\ B\ l$, $V\ B\ v$; e quindi quella degli altri $L\ B\ b$, $b\ B\ V$.

360. Secondo caso. — *Il punto luminoso si trova all'infinito, e il punto di vista* (V, V') *a distanza finita* (*Fig.* 130).

In questo caso i raggi luminosi saranno paralleli, e potrà la loro direzione essere determinata da una retta $L\ l$, $L'\ l'$.

Conduciamo per la retta data $(A, A'\ A'')$ un piano $M\ N$

parallelo al coordinato verticale. Questo taglierà in un punto (L, L') la retta $(L\ l,\ L'\ l')$; e se noi facciamo abbattere sopra di esso questa ultima linea a sinistra, e il punto di vista (V, V') a destra della retta data, troveremo l'abbattimento della direzione dei raggi luminosi in $L'\ l'_1$, e quello del punto (V, V') in (v, v'). Conduciamo per (v, v') una retta $v'\ B'$ parallela ad $L'\ l'_1$, e il punto (A, B') nel quale viene incontrata la retta data sarà il domandato punto brillante.

Si immagini infatti che la retta $(v\ A,\ v'\ B')$ ruoti attorno ad $(A, A'\ A'')$; è evidente ch'essa genererà una superficie conica col vertice in (A, B'), e di cui tutti gli elementi saranno egualmente inclinati sulla retta data. Allorchè la $(v\ A,\ v'\ B')$ si troverà nel piano verticale $A\ v_1$ parallelo alle direzione dei raggi luminosi, il suo prolungamento $B'\ v'_1$ riescirà parallelo ad $L'\ l'$; e allorchè sarà sopra il piano $A\ V$ la sua parte $B'\ V'$ passerà pel punto di vista. Dunque il punto (A, B') è tale che il raggio luminoso corrispondente $(A\ v_1,\ B'\ v'_1)$ e il raggio visuale $(A\ V,\ B'\ V')$ fanno il medesimo angolo colla retta data; lo che basta a provare che il punto (A, B') è brillante, siccome nel caso precedente abbiamo fatto vedere.

361. *Osservazione.* — Quando il piano determinato dal punto di vista V e dalla retta data $A\ A_1$ (*Fig.* 131), resulta parallelo alla direzione dei raggi luminosi $L\ l$, basterà condurre $V\ v$ perpendicolare ad $A\ A_1$, prendere sul suo prolungamento $v\ v_1$ eguale a $V\ v$ e tirare da v_1 una parallela $v_1\ L_1$ ad $L\ l$. Il punto B nel quale è da quest'ultima incontrata la retta data sarà il punto brillante cercato.

362. Terzo caso. — *Il punto luminoso si trova ad una distanza finita, e il punto di vista all'infinito.*

In questo caso è sempre assegnata la direzione nella quale supponesi di riguardare l'oggetto. Talchè il problema può dirsi identico al precedente, quando in esso voglia intendersi con $(L\ l,\ L'\ l')$ (*Fig.* 129) la direzione dei raggi visuali, e con (V, V') il punto luminoso.

363. Quarto caso. — *Il punto luminoso e il punto di vista si trovano ambedue ad una distanza infinita.*

Le rette inviate a questi punti secondo le direzioni supposte per i raggi sì luminosi che visuali costituiranno due sistemi di rette parallele.

Ora immaginando nello spazio un punto brillante, e per esso condotte due rette respettivamente parallele ai sistemi predetti, è chiaro che la bisettrice dell'angolo da esse formato sarà la normale corrispondente a quel punto. Si vede inoltre che quell'angolo rimanendo lo stesso e formato sempre da lati respettivamente paralleli per tutti i punti brillanti, anche le linee normali corrispondenti ai punti medesimi riesciranno parallele tutte fra loro, e alla normale suddetta; e che reciprocamente tutte le normali parallele a quest'ultima retta corrisponderanno a punti brillanti.

Alla retta in questione, è stato dato il nome di *direzione delle normali*.

Ciò premesso si concepirà facilmente che una linea retta o non ha alcun punto brillante, o essa è brillante in tutta la sua estensione. Infatti, se uno dei suoi elementi brilla sarà segno che è perpendicolare alla direzione delle normali; ma questa condizione non può evidentemente essere sodisfatta senza che sia pure sodisfatta anche da tutti gli altri elementi della retta: dunque tutti i punti di questa ultima saranno brillanti. Se al contrario uno degli elementi della retta non brilla, vorrà dire che esso fa un angolo acuto con la direzione delle normali; allora tutti gli altri elementi faranno con la direzione stessa il medesimo angolo, e quindi nessun punto della retta data brillerà.

364. *Osservazione I.* — La direzione delle normali potendo essere sostituita ai due sistemi delle rette parallele al raggio luminoso e al raggio visuale, importa vedere come dati questi raggi si possa costruire la direzione suddetta.

Sieno $(O\ L,\ O\ L')$, $(O\ V,\ O\ V')$ le rette che vanno respettivamente al punto luminoso, e al punto di vista (*Fig.* 132). Abbattiamo sul coordinato verticale l'una e l'altra prendendo per asse d'abbattimento la verticale $O\ O'$. Il punto $(L,\ L')$ venendo così in $(l,\ l')$ e il punto $(V,\ V')$ in $(v,\ v')$, gli abbattimenti cercati saranno pel raggio luminoso $O\ l'$, pel raggio visuale $O\ v'$. Ciò posto prendasi sopra $O\ v'$ la lunghezza $O\ l''$ eguale ad $O\ l'$, e facendo ritornare la retta $O\ v'$ nella primitiva sua posizione si cerchi il punto $(V_1,\ V'_1)$ nel quale viene a collocarsi l''. Tirando allora $(L\ V_1,\ L'\ V'_1)$, il triangolo $(L\ O\ V_1,\ L'\ O\ V'_1)$ sarà isoscele; e costruendo siccome la

figura dimostra il punto di mezzo (N, N') della retta $(L\ V_1, L'\ V'_1)$, la congiungente il punto O con (N, N') sarà la cercata direzione delle normali

365 *Osservazione II.* — Se il raggio luminoso $(L\ O, L'\ O)$ ha le sue proiezioni inclinate di 45° sulla linea di terra, e il raggio visuale $V\ O$ è perpendicolare al coordinato verticale (*Fig* 133), siccome avviene ordinariamente negli alzati delle fabbriche architettoniche, la direzione delle normali si trova con semplicissime costruzioni.

Considerando infatti un punto (l, l') del raggio luminoso, se ne cercherà l' abbattimento l_1 nel modo insegnato al N.° 72. preso di poi $O\ v$ eguale ad $O\ l_1$ e tirata $l\ v_1$, sarà $O\ l\ v$ un triangolo isoscele, della cui base il mezzo x si troverà dividendo in due parti eguali la $l_1\ v$ in x, e tirando la $x_1\ x$ parallela alla linea di terra. Allora $O\ x\ N$ sarà la proiezione orizzontale della direzione cercata; la proiezione verticale si confonderà evidentemente con $v\ L'$.

Per i disegni esprimenti la pianta o proiezione orizzontale delle fabbriche stesse, nei quali il raggio visuale supponesi verticale, la proiezione orizzontale della direzione delle normali si confonderebbe con $O\ L$, e la proiezione verticale troverebbesi con un processo analogo al precedente.

366. Da ciò che precede può dedursi che ogni qualvolta il punto luminoso e il punto di vista sono entrambi a distanza finita, o uno solo di essi è all' infinito, il punto brillante di una retta è sempre il vertice di un cono retto del quale essa è l' asse, e sul quale tanto il punto luminoso che il punto di vista sono contenuti.

Importa però di notare che questa condizione conduce a due soluzioni, cioè a dire, a due punti brillanti di cui uno è immaginario. Se riprendiamo infatti il problema del N.° 358, si vedrà che un secondo cono avente il vertice in (A, B'') può essere determinato dai medesimi circoli $v'\ v'_1$, $l'\ l'_1$, onde sotto il rapporto geometrico i due elementi $L'\ B''$, $B''\ V'$ trovandosi egualmente inclinati sulla retta $(A, A'\ A'')$ potrebbe a prima vista sembrare che anche B'' fosse un punto brillante della medesima retta Ma sotto il rapporto fisico la cosa non va così, poichè sappiamo che mentre il raggio incidente e compreso fra il punto luminoso e il punto di incidenza, il raggio

riflesso si trova al di là della normale corrispondente a quest' ultimo punto, e compreso fra esso e il punto di vista. Ora si vede che se L' e il punto luminoso ed L' B'' il raggio incidente quello riflesso sarebbe B'' V'_1 diretto sul prolungamento di V' B'' e da B'' verso V'_1; viceversa supposto il punto di vista in L', e il punto luminoso in V', il raggio incidente sarebbe V' B'', quello riflesso si dirigerebbe secondo B'' L'_1 sul prolungamento di L' B'', ma da B'' verso L'_1. Dunque in nessun caso il raggio riflesso nel punto B'' sarebbe rinviato verso il punto di vista; e perciò B'' non potrebbe mai essere un secondo punto brillante della retta in questione.

Quando il punto luminoso e il punto di vista si trovano in un medesimo piano con la retta data, ma non situati dalla medesima parte di quest' ultima il punto brillante sarà immaginario.

Punti brillanti delle linee curve

367. *Caso in cui il punto luminoso e il punto di vista, o almeno uno di essi, si trovano a distanza finita dalla linea data.*

Il punto brillante d' una curva qualunque piana o storta, può considerarsi come quello dell' elemento rettilineo corrispondente al punto medesimo e quindi come il punto brillante della tangente respettiva. D' altra parte è evidente che se il punto brillante della tangente ad una curva è ad un tempo il punto di contatto, questo sarà il punto brillante della curva stessa.

Può dedursi da ciò che se dopo aver costruita una serie di tangenti alla linea data e cercato il punto brillante di ciascuna, si conduce una linea per tutti i punti brillanti trovati, i punti comuni a questo luogo geometrico e alla linea data saranno i punti brillanti di questa ultima. In tali punti il luogo geometrico in questione e la linea data hanno evidentemente a comune la tangente, quindi i punti cercati resulteranno del contatto di due linee.

368. *Osservazione I.* — Questa circostanza potrebbe indurre una qualche inesattezza nella determinazione dei punti brillanti in quistione, onde giova investigare se esistono altri mezzi per ottenerli.

Osserveremo in primo luogo che se la curva è piana, e nel suo piano si trovano il punto luminoso e il punto di vista, la retta che è normale alla linea data nel punto comune ad essa e alla linea ausiliaria, luogo geometrico dei punti brillanti delle tangenti, e anche normale a questa ultima; osserveremo di poi che se B è il punto brillante di una retta $A\ A_1$ (*Fig.* 129), lo è anche della normale $b\ b_1$ a questa retta, con la differenza però che mentre per la retta $A\ A_1$ è un punto brillante reale, per la retta $b\ b_1$ è invece immaginario (N.° 366). Si possono dunque in questo caso trovare i punti brillanti di una linea qualunque piana profittando ancora delle sue normali. Si costruiranno a tale oggetto le diverse normali che tagliano la retta determinata dal punto luminoso e dal punto di vista, si cercheranno i punti brillanti di queste ultime, e la linea ausiliaria, luogo geometrico di tali punti, toglierà la linea data nei punti brillanti cercati.

Quando la linea data fosse storta, si condurranno per i diversi suoi punti altrettanti piani normali; si trascureranno quelli che non tagliano la retta compresa fra il punto luminoso e il punto di vista, si determineranno le intersezioni degli altri con quella retta; per queste intersezioni si condurranno le normali corrispondenti; costruiremo i punti brillanti necessariamente immaginari di queste ultime, e gli archi delle curve, luoghi di questi punti, taglieranno la linea data nei punti brillanti richiesti.

369. *Osservazione II.* — Ma se la curva data essendo piana, il punto di vista, o il punto luminoso, o nessuno di essi si trova nel piano della curva, le normali a quest'ultima non incontreranno la retta che congiunge i due punti citati; e per conseguenza il metodo testè indicato non sarebbe applicabile.

In questo caso si può operare nel modo seguente. Siano L e V (*Fig.* 134) il punto luminoso e quello di vista, $M\ N\ P$ la curva data, $A\ A_1$ la sua tangente in N, B il punto brillante di questa. Si costruirà il piano $S\ T$ perpendicolare in N alla tangente, e prolungando, se occorre, il raggio luminoso $L\ B$ e il raggio visuale $B\ V$, si troveranno i respettivi punti d'incontro l e v di questi raggi col piano $S\ T$. Costruendo i piani normali $S\ T$ in tutti gli altri punti di contatto delle

tangenti adoperate per la ricerca del primo luogo geometrico dei punti brillanti, e determinando tutti i punti l e tutti i punti v nei quali ciascuno di essi viene incontrato dai raggi luminosi e da quelli visuali, potremo far passare una curva per tutti i punti l, ed un'altra per tutti i punti v.

Queste curve saranno in generale storte, ma ciascuna di esse taglierà la linea data nei suoi punti brillanti. Poichè è evidente che questi ultimi punti sono ad un tempo quelli nei quali tanto il raggio luminoso, quanto il raggio visuale incontrano il piano normale corrispondente.

La curva che è il luogo dei diversi punti l dicesi *secante dei raggi luminosi*, quella che è luogo geometrico dei diversi punti v dicesi *secante dei raggi visuali*.

370. *Osservazione III* — Si hanno dunque altre tre linee ausiliarie, oltre il luogo dei punti brillanti delle tangenti ad una curva qualunque, per determinare con tutta la possibile esattezza i punti brillanti di questa curva.

Una qualsivoglia di queste tre linee, dopo aver costruito il luogo dei punti brillanti delle tangenti, può bastare nella pratica. Ma sia che si adoperi il luogo dei punti brillanti delle normali, sia che si scelga la secante dei raggi luminosi, o quella dei raggi visuali bisognerà sempre accuratamente esaminare la posizione dei trovati punti brillanti rispetto a quelle del punto luminoso e del punto di vista; giacchè non di rado può avvenire che alcuni di quei punti brillanti sieno immaginari.

371. *Caso in cui il punto luminoso e il punto di vista sono ambedue all'infinito.*

Abbiamo veduto (N.° 363) che tutte le normali parallele alla direzione della retta che divide in due parti eguali l'angolo formato dal raggio luminoso e dal raggio visuale di uno stesso punto, corrispondevano ad altrettanti punti brillanti della linea data. Ora le normali essendo perpendicolari alle tangenti corrispondenti, è chiaro che i punti cercati saranno quelli ai quali corrisponderanno delle tangenti perpendicolari alla conosciuta direzione delle normali.

Abbiamo veduto (N.i 364 e 365) come potevasi costruire questa direzione; perciò il processo da seguirsi per la ricerca dei punti brillanti di una linea qualunque sarà il seguente.

Si troverà la direzione $N\,N_1$ delle normali (*Fig.* 135);

per questa retta si condurrà un piano qualunque, sul quale faremo la proiezione $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H$ della curva data. Di poi si tireranno perpendicolarmente ad $N\ N_1$ e tangenzialmente alla linea $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H$ altrettante rette $t\ t_1$ quante saranno possibili; le normali ai punti di contatto $B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G$ riesciranno parallele ad $N\ N_1$, e per conseguenza i punti della linea data proiettati in $B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H$ saranno i suoi punti brillanti.

Punti brillanti delle superficie.

372 Possiamo immaginare (*Geom. Descritt.*) che una superficie sia composta di curve contigue le une alle altre, per esempio di sezioni piane parallele; e supponendo che queste sezioni sieno dei piccoli fili infinitamente sottili (N.° 356), esse avranno ciascuna il loro punto brillante. Ora è facile a mostrare che il luogo geometrico di questi punti conterrà tutti i punti brillanti della superficie data, o ciò che torna lo stesso, questa superficie non avrà punto brillante che non appartenga a quel luogo.

Infatti indichiamo con A uno di questi punti; esso si troverà sopra una delle curve elementari della superficie; la normale in A a questa superficie sarà perpendicolare alla curva corrispondente, e l'angolo d'incidenza come l'angolo di riflessione essendo eguali per la superficie, lo saranno pure per la curva: dunque il punto A sarà uno dei punti brillanti di questa curva.

Segue da ciò che tagliando la superficie data con due sistemi di piani o di superficie ausiliarie; cercando i punti brillanti delle sezioni ottenute e descrivendo i luoghi geometrici di questi punti, il luogo corrispondente a un sistema di sezioni si incrocerà col luogo corrispondente all'altro sistema secondo i punti brillanti della superficie data.

Questa soluzione è la più semplice che possa applicarsi nei primi tre dei quattro casi in cui suddividesi il problema generale del N.° 357, tutte le volte che la superficie proposta è storta o un poco complicata. Ma nella maggior parte dei problemi usuali è possibile trovare delle soluzioni più comode.

373. *Caso in cui il punto luminoso è il punto di vista, o almeno uno di essi, si trovano a distanza finita*

Indichiamo per brevità con L il punto luminoso, con V il punto di vista, e con $V\ L$ la retta che li congiunge. Osserveremo di passaggio che nel caso in cui uno dei punti V od L fosse all'infinito, la $V\ L$ è sempre determinata dalla retta condotta per L o per V parallelamente alla direzione dei raggi visuali e compresa fra il punto L e l'infinito dalla parte del punto di vista, o parallelamente a quella dei raggi luminosi e compresa fra il punto V e l'infinito dalla parte del punto luminoso

Frattanto rammentandoci che il raggio incidente, il raggio riflesso, e la normale sono sempre nel medesimo piano, si vede che la retta $V\ L$ sarà necessariamente incontrata dalle normali corrispondenti ai punti brillanti, trovandosi i punti d'incontro compresi fra V ed L.

Dunque se dai diversi punti della retta $V\ L$ si abbasseranno delle normali alla superficie data, problema che noi sappiamo risolvere (*Geom. Descritt.*), la curva che passerà per i piedi di essa conterrà i punti brillanti cercati. E se avremo determinato precedentemente sulla medesima superficie il luogo dei punti brillanti d'una serie di linee d'uno stesso sistema, N°. 372, si avranno due curve di cui i punti comuni saranno i punti brillanti della superficie data.

Si possono anche, quando sia più comodo, costruire i punti brillanti immaginari delle normali, e la linea ausiliaria, luogo geometrico di quelli, taglierà egualmente il luogo dei piedi delle normali stesse secondo i punti brillanti richiesti.

374. *Osservazione I.* — Se la superficie data è sviluppabile, invece di prendere una serie di punti sopra $V\ L$, prenderemo una serie di elementi su questa superficie; si costruiranno i piani normali che passano per questi elementi; si troveranno i punti d'intersezione di quei piani colla retta $V\ L$; per questi punti si abbasseranno delle perpendicolari agli elementi corrispondenti, e queste perpendicolari saranno le normali delle quali i piedi formeranno una prima curva, luogo dei punti brillanti della superficie data.

375. *Osservazione II.* — Maggiore semplicità di costruzioni abbiamo pure nel caso in cui la superficie data sia di

rivoluzione. È noto infatti (*Geom. Descritt.*), che le normali nei punti d'un medesimo parallelo formano una superficie conica avente il vertice sull'asse; se per questo vertice e per la retta *V L* si condurrà un piano il cono delle normali verrà tagliato secondo due rette normali alla superficie data, e che incontreranno la retta condotta per i punti *V* ed *L*.

376. *Osservazione III.* — Tutte le volte che le normali ad una superficie nei punti di certe sezioni formano una superficie poco complicata, la ricerca dei punti brillanti viene ad esser resa più semplice, siccome abbiamo veduto per le superficie sviluppabili e per quelle di rivoluzione.

Così nelle superficie anulari, che sono lo inviluppo d'una sfera (*Geom. Descritt.*), le normali nei diversi punti d'una medesima caratteristica si trovano nel piano stesso di questa ultima; onde piuttosto che abbassare dai diversi punti delle *V L* delle normali alla superficie, si costruiranno i piani d'un numero sufficiente di caratteristiche; questi piani taglieranno la *V L* in altrettanti punti; si congiungerà ciascuno di essi col centro della caratteristica corrispondente, ed avremo le normali dello inviluppo dato.

377. *Caso in cui il punto luminoso e il punto di vista si trovano situati all'infinito.*

È stato dimostrato (N°. 363) che allorquando il punto luminoso e il punto di vista sono all'infinito, le normali corrispondenti ai punti brillanti sono parallele ad una medesima retta, che si è chiamata direzione delle normali.

Dunque tutti i punti brillanti della superficie data saranno punti di contatto di altrettanti piani tangenti perpendicolari alla direzione suddetta.

Resulta da ciò che nel caso attuale bisognerà in generale operare nel modo seguente:

Si sceglierà nello spazio un punto qualunque pel quale si condurrà un raggio luminoso e un raggio visuale; si costruirà la bisettrice dell'angolo da questi raggi formato, e che sarà la direzione delle normali (N°. 364); si cercheranno tutti i piani tangenti alla superficie e perpendicolari a questa direzione; e i punti di contatto determinati con esattezza saranno i punti brillanti cercati.

378. *Osservazione I.* — Se la superficie data è piana,

tutti i suoi elementi infinitamente piccoli faranno il medesimo angolo colla direzione delle normali; onde o il piano è perpendicolare a quella direzione e tutti i suoi punti brilleranno, o non è ad essa perpendicolare ed allora non avrà alcun punto brillante.

379. *Osservazione II.* — Ogni superficie sviluppabile non ha in generale punti brillanti, ma se brilla uno dei suoi punti brilleranno ancora tutti quelli che si troveranno sull'elemento ad esso corrispondente

Per dimostrarlo, concepiamo che il piano generatore di una di queste superficie (*Geom. Descritt.*), sia in movimento per generarla; e per un punto dello spazio immaginiamo una serie di perpendicolari a tutte le posizioni della inviluppata piana: egli è evidente che queste perpendicolari formeranno una superficie conica di cui gli elementi saranno paralleli a tutte le normali dello inviluppo. Dunque ad eccezione del caso, assai particolare, in cui la direzione delle normali sia parallela ad una delle generatrici della notata superficie conica, la superficie data non avrà punti brillanti, ma se esisterà una generatrice che soddisfaccia a questa condizione, allora l'elemento corrispondente della superficie in quistione sarà brillante in tutti i suoi punti.

Può dedursi facilmente da ciò che un elemento d'un cilindro brillerà, quando la direzione delle normali riesce perpendicolare alle sue generatrici.

Lo stesso avverrà per un cono circolare retto, allorquando le direzione delle normali farà coll'asse un angolo che sia complemento della metà dell'angolo al vertice.

Fuori di questi casi ne il cilindro ne il cono retto avranno punti brillanti.

380. *Osservazione III.* — Se la superficie data fosse di rivoluzione, i suoi punti brillanti si troveranno sulla curva meridiana, il cui piano è parallelo alla direzione delle normali Costruiremo perciò questa curva; condurremo ad essa le tangenti perpendicolari alla direzione citata, e i punti di contatto saranno altrettanti punti brillanti della superficie

CAPO III

Costruzione dei punti brillanti delle linee e delle superficie.

381. La natura del presente lavoro non comporta un gran numero di applicazioni della Teoria precedentemente spiegata. Tante nondimeno ne esporremo quante crediamo possano essere sufficienti per avviare il disegnatore in questo genere di ricerche; e solo terremo conto del caso in cui il punto luminoso è all'infinito e il punto di vista a distanza finita, e del caso in cui ambedue questi punti sono all'infinito; poichè è ben raro in pratica che si debbano costruire i punti brillanti negli altri due casi.

Per tal modo verremo a risolvere il problema per le più comuni occorrenze delle vedute prospettiche e dei disegni di proiezione nella sola ipotesi che l'oggetto rappresentato sia illuminato dal sole.

Problema I. *Trovare i punti brillanti di un circolo illuminato dal sole, e veduto da una distanza finita.*

382. Prendiamo per piano coordinato verticale quello stesso del circolo; ed essendo $X\,Y$ la linea di terra (*Fig.* 156), supponiamo che $A\,B\,C\,B'$ sia il circolo dato, (V, V') il punto di vista, $(L\,M, L'\,M)$ la direzione dei raggi luminosi.

Cominceremo dal cercare il luogo geometrico dei punti brillanti delle tangenti (N.° 367). A tale oggetto si consideri una tangente qualunque $a\,t$; si tiri per V' una retta $V'\,Z'$ perpendicolare ad $a\,t$, ed essa potrà riguardarsi come la traccia verticale d'un piano perpendicolare alla tangente considerata, che la incontra in o. Abbattendo questo piano al di sopra di $V'\,Z'$, il punto di vista si abbatterà in v', e la retta $o\,v'$ sarà

l'abbattimento della perpendicolare condotta dal punto di vista medesimo alla tangente in questione.

Abbiamo visto che questa distanza o v' e il raggio del circolo base d'un cono retto, di cui il vertice situato sopra $a\ t$ è il punto brillante cercato. L'abbattimento di questa base sarà il circolo $Z'\ v'\ Z'_1$, il vertice si troverà nel modo seguente.

Conducasi per M una retta $M\ N$ parallela ad $a\ t$, ed abbattasi il raggio luminoso ($M\ L$, $M\ L'$) sul coordinato verticale prendendo per asse d'abbattimento la $M\ N$. Un punto qualunque (L, L') si abbatterà sopra $l\ L'$ perpendicolare ad $M\ N$, e ad una distanza da l eguale alla lunghezza della retta ($M\ L$, $M\ L'$). Noi possiamo trovare questa lunghezza, abbattendo prima il punto (L, L') attorno ad $M\ L'$; allora questo punto verrà in L_1, e l'arco descritto col centro in M e col raggio $M\ L_1$ somministrerà il cercato punto d'abbattimento l'. Ciò posto, l'angolo $l'\ M\ l$ sarà il semiangolo al vertice del cono in questione; conducendo $x'\ x$ parallela ad $l'\ l$, e prendendo sul suo prolungamento la $x\ y'$ eguale ad $x\ x'$, l'angolo $x'\ M\ y'$ sarà quello del cono. Onde conducendo per Z' la $Z'\ b$ parallela ad $M\ y'$, e per Z'_1 la $Z'_1\ b$ parallela ad $M\ x'$, il loro punto di concorso b, che avrà luogo sopra $a\ t$, sarà il punto brillante di questa tangente.

Le costruzioni ora eseguite somministrano immediatamente il punto brillante b' della tangente $a'\ t'$ parallela ad $a\ t$. Poichè trovato il punto t' in cui dal piano $Z'\ V'$ è incontrata, la retta $t'\ v'$ sarà la perpendicolare corrispondente abbassata dal punto di vista; quindi l'arco $z'\ v'$ descritto col centro in t' e col raggio $t'\ v'$ apparterrà alla base del cono di cui $a'\ t'$ deve essere l'asse. L'angolo al vertice di questo cono è evidentemente eguale ad $x\ M\ y'$; dunque la $z'\ b'$ parallela ad $M\ y'$ somministrerà questo vertice e ad un tempo il punto brillante b' cercato.

Noi abbiamo ripetute queste costruzioni per altre coppie di tangenti; cioè per quelle verticali ed abbiamo trovato i punti brillanti b_1 e b'_1; per quelle orizzontali che ci hanno somministrato i punti brillanti b_2, e b'_2; finalmente per quelle respettivamente perpendicolari alle prime $a\ t$, $a'\ t'$, delle quali una sola ha il punto brillante b'_3 nei limiti del foglio.

Così abbiamo potuto costruire il luogo geometrico $b'_2\ B'\ b'\ b'_1\ b'_3\ b_3\ B\ b\ b_1 \ldots$ che ha col circolo dato i due punti di contatto B e B'.

Osservando che per ciascuna coppia di tangenti $a\ t$, $a'\ t'$, l'abbattimento del punto (L, L') è sull'arco $L\ L_1\ l'$ all'incontro d'una retta condotta per L' perpendicolarmente alle direzioni delle tangenti medesime, noi abbiamo trovato immediatamente l'abbattimento del raggio luminoso corrispondente in $l'_1\ M$, $l'_2\ M$, $l'_3\ M$, e dedotto quindi l'angolo al vertice del respettivo cono.

Per ottenere poi con maggiore esattezza i punti brillanti del circolo dato, abbiamo avuto ricorso alla secante dei raggi luminosi, la quale è di una semplicissima costruzione (N°. 369) Ciascun piano normale in questo caso riescendo perpendicolare al coordinato verticale, vien definito dalla sola sua traccia su quest'ultimo che passa pel centro O del circolo e per i punti di contatto delle tangenti considerate. Così per le tangenti $a\ t$, $a'\ t'$ questo piano è rappresentato dalla retta $s\ a\ O\ a'\ s_1$; conducendo per i punti b e b' due rette parallele alla proiezione verticale $M\ L'$ dei raggi luminosi, il loro incontro con $s\ a\ O\ a'\ s_1$ fornirà due punti della secante cercata Questi punti si trovano fuori dei limiti delle figura; lo stesso avviene per le tangenti verticali; per quelle orizzontali si trovano in s_1 ed s'_1: per quelle perpendicolari ad $a\ t$, $a'\ t'$ sono s_2, s'_2. Il luogo geometrico in questione ha per proiezione verticale la linea $r'_1\ B\ s'_1\ s'_2\ r'_2 \ldots r\ s_2\ r_1\ s_1\ B'\ r_2$. considerato nello spazio questo luogo è una curva storta che incontra in due soli punti B, B' il circolo dato.

383 *Osservazione* — Noi abbiamo voluto dimostrare colla *Fig.* 136 la forma generale dei luoghi geometrici da cui resultano i punti brillanti, e per questa ragione essa è riuscita piuttosto complicata Ma in pratica essendo sempre possibile scorgere con bastante approssimazione il luogo dei punti brillanti della linea proposta, si potrà condurre un piccolo numero di tangenti vicine a quel luogo, ed allora con un poco di ordine nelle costruzioni arriveremo facilmente alla soluzione cercata.

PROBLEMA II. *Trovare i punti brillanti di un arco di elica illuminato dal sole e veduto da una distanza infinita dal coordinato verticale*

384. La direzione dei raggi visuali è in questo caso perpendicolare al coordinato verticale e può essere rappresentata da $O\,V$ (*Fig.* 137); quella dei raggi luminosi sia ($O\,L$, $O\,L'$); e l'arco dato sia ($a\ b$ e d e f . . . , $a'\ b'\ c'\ d'\ e'\ f'$ . . .)

Colla costruzione indicata al N°. 364 si troverà la direzione ($O\,L_1$, $O\,L'$) delle normali; quindi seguendo il processo esposto al N°. 371 faremo una proiezione ausiliaria dell'elica sul piano verticale $O\,L_1$ proiettante quella direzione, ed abbattendo questo piano sul coordinato verticale costruiremo la proiezione medesima $a_1\ b_1\ e_1\ d_1\ e_1\ f_1\ g_1$ . . . non che l'abballimento $O\,L_2$ della retta ($O\,L_1$, $O\,L'$). Conducendo ora le tangenti possibili $s\ t$, $s_1\ t_1$, $s_2\ t_2$, $s_3\ t_3$ a quest'ultima curva perpendicolarmente alla retta $O\,L_2$ si avranno gli abbattimenti s, s_1, s_2, s_3 di altrettanti punti brillanti della linea data. Con delle rette parallele alla linea di terra si troveranno le proiezioni verticali s', s'_1, s'_2, s'_3 dei medesimi punti.

È facile però l'accorgersi che di questi quattro punti, due soli, cioè s' ed s'_2 sono reali. Poichè ritenuto sempre che la linea data si abbia a considerare come un'essere fisico, e quindi come lo inviluppo di una piccola sfera, è evidente che i raggi incidenti nei punti s'_1 ed s'_3 che orizzontalmente si proiettano fra p ed e non possono riflettersi verso il punto di vista

PROBLEMA III. *Trovare i punti brillanti di un cilindro circolare retto illuminato dal sole.*

385. PRIMO CASO. — *Il punto di vista è ad una distanza finita dal cilindro.*

La scelta dei piani coordinati essendo arbitraria, noi prenderemo per coordinato orrizzontale quello condotto pel punto di vista perpendicolarmente alle generatrici del cilindro dato; e per coordinato verticale un piano parallelo alla direzione dei raggi luminosi. Quindi potrà supporsi che il circolo $A\ B$

A_1 B_1 *Fig.* 138) sia la traccia orizzontale del cilindro, (V, V', il punto di vista, (V L, V' L') la direzione dei raggi luminosi

Per trovare i punti brillanti domandati determineremo prima il luogo dei piedi delle normali, e quindi il luogo dei punti brillanti delle generatrici. N.i 372, 373.

Per un punto qualunque (p, p') della (V L, V' L') e per l'asse (C, C' C'') conducasi un piano verticale p C; questo taglierà il cilindro secondo due generatrici proiettate orizzontalmente in q ed in q_1, sulle quali si troveranno i piedi della normale condotta dal medesimo punto. Questa normale che è una retta orizzontale ha per proiezioni p C q_1, e p' q' q'_1; i punti q' e q'_1 saranno le proiezioni verticali di quelli in cui incontra il cilindro.

La medesima operazione ripetuta per ogni altro punto della (V L, V' L') farà conoscere altri punti del primo dei luoghi geometrici cercati Così troveremo che la normale del punto (L, L') ha i suoi piedi verticalmente proiettati in r' ed r'_1; quella del punto (s, s') li ha ambedue proiettati in s'; e quelli della normale condotta dal punto (V, V') si trovano in u' e v'. Le due linee u' s' q' r', v' s' q'_1 r'_1 saranno i luoghi geometrici delle proiezioni verticali dei piedi delle normali abbassate dai diversi punti della retta (V L, V' L'), e conterranno per conseguenza le proiezioni verticali dei punti richiesti.

Consideriamo ora una generatrice qualunque (a, a' n'') e cerchiamone col metodo già insegnato al N°. 360, il corrispondente punto brillante. Condurremo a tale oggetto la (V a, V' a') perpendicolare ad essa; abbatteremo questa perpendicolare sul piano M n N parallelo al coordinato verticale in (a a_1, a' n'_1) e la n'_1 a'' parallela a V' L' determinerà il cercato punto brillante a''.

Ripetendo una simile operazione per tutte le altre generatrici del cilindro si trova una seconda curva a'' A'' B'_1 C'' A'''_1 B' n'' che è luogo geometrico dei punti brillanti degli elementi della superficie data. Esso incontra la linea u' s' q' r', v' s' q'_1 r'_1 nei punti B' e B' i quali saranno perciò i punti brillanti della superficie medesima

Si può osservare che non è necessario condurre i piani M N per i piedi a delle generatrici ed abbattere sopra di

essi le perpendicolari $V\ a$; ma che è sufficiente riportare sulla linea di terra le distanze $V\ a$ da a' in a'_1.

386. *Osservazione* — Potevamo giungere alle medesime soluzioni B' e B'_1 costruendo prima i punti brillanti B e B_1 della traccia orizzontale del cilindro, nella ipotesi che il punto di vista fosse collocato in V, e che la direzione dei raggi luminosi fosse la retta $V\ L$; e determinando poi i punti brillanti delle generatrici condotte per B e B_1.

Poichè essendo orizzontali le normali del cilindro corrispondenti ai punti cercati, le proiezioni degli angoli d'incidenza e di riflessione resultano evidentemente eguali; d'onde consegue che le proiezioni dei punti medesimi sono i punti brillanti del circolo $A\ B\ A_1\ B_1$, e quindi i punti brillanti delle generatrici B e B_1 saranno quelli del cilindro dato.

387. Secondo caso. — *Il punto di vista è ad una distanza infinita, e la direzione dei raggi visuali è perpendicolare ad uno dei piani coordinati.*

Non vi può essere generatrice brillante sul cilindro a meno che il piano tangente lungo di essa non resulti perpendicolare alla direzione delle normali (N° 379).

Supponiamo che la direzione dei raggi visuali sia perpendicolare al coordinato verticale, e che si voglia verificare se esista una generatrice brillante sopra il cilindro rappresentato dalle proiezioni C e C' (*Fig.* 139).

Si condurrà per un qualsivoglia punto (P, P') dello spazio il raggio luminoso ($P\ L$, $P'\ L'$) ed il raggio visuale ($V\ P$, P'); si costruirà l'abbattimento $P\ l$ del primo, e tirata la bisettrice $P\ n$ dell'angolo $V\ P\ l$, si riporterà quest'ultima nella posizione ($P\ N$, $P'\ L'$) che deve occupare.

Si traccerà la $s\ t$ tangente alla traccia orizzontale del cilindro e perpendicolare ad $N\ P$; si costruirà la generatrice ($t\ r$, $t'\ r'$), e per uno dei suoi punti qualunque (m, m') condurremo una retta ($m\ s$, $m'\ s'$) parallela al coordinato verticale. Se la retta $s'\ m'$ riescirà perpendicolare a $P'\ L'$, la $s\ t$ sarà traccia orizzontale d'un piano tangente al cilindro perpendicolare alla direzione delle normali, e la generatrice ($t\ r$, $t'\ r'$) sarà brillante. Nel caso contrario non vi sarà punto o generatrice che brilli sopra il cilindro dato.

Problema IV. *Trovare i punti brillanti d'un cono circolare retto illuminato dal sole.*

388 Primo caso. — *Il punto di vista è ad una distanza finita dal cono.*

Prendiamo il coordinato orizzontale perpendicolare all'asse del cono, e il verticale parallelo alla direzione dei raggi luminosi; allora potremo supporre che il circolo $A\ a\ b\ A_1$ (*Fig.* 140) sia la traccia orizzontale del cono dato, (O, O'') ne sia il vertice, e quindi $A'\ O''\ A'_1$ il suo contorno apparente verticale: che (V, V') sia il punto di vista, e $(V\ L, V'\ L')$ la direzione dei raggi luminosi.

Si cercherà dapprima il luogo dei piedi delle normali, come si è fatto pel cilindro, e quindi quello dei punti brillanti immaginari di esse. (N°. 373.

A tale oggetto conduciamo per un punto qualunque (L, L') della direzione dei raggi luminosi il piano meridiano $L\ O$, che taglierà il cono secondo la generatrice proiettata in $a\ O$, e la retta $(V\ L, V'\ L'$ nel punto (L, L'). Abbattiamo questo piano parallelamente al coordinato verticale in $A\ A_1$; la generatrice $a\ O$ si abbatterà in $A'\ O''$, e il punto (L, L') in (l, l'_1); conducasi $l'\ p'_1$ perpendicolare ad $A'\ O''$, e p'_1 sarà l'abbattimento del piede della normale cercata. Non rimane ora oltra cosa da fare che riportare il meridiano $l\ O$ alla primitiva posizione $L\ O$; allora il punto (p_1, p'_1) verrà a collocarsi in $(p, p'$ piede cercato della normale al cono condotta pel punto (L, L').

Altri piani meridiani condotti per i punti della medesima retta $V\ L, V'\ L'$ somministreranno oltrettanti punti come (p, p') del luogo dei piedi delle normali, che sarà la curva $p\ q\ r, p'\ q'\ r')$.

Il luogo dei punti brillanti delle normali $(L\ p, L'\ p')$ è l'altra curva $(x\ y\ z\ t, x'\ y'\ z'\ t')$, un punto qualunque della quale, per esempio quello (x, x') contenuto sulla normale $(L\ p, L'\ p')$, si costruisce nel modo seguente.

Si considera il piano formato dal punto $(p, p'$ e dalla retta $(V\ L, V'\ L'$, e si fa abbattere parallelamente al coordinato verticale prendendo questa retta per asse di abbatti-

mento. Allora il punto (p, p') descriverà un' arco di cerchio perpendicolare a $(V\ L,\ V'\ L')$, che avrà per centro il punto (o, o') e per raggio $p\ o,\ p'\ o')$. La lunghezza $o'\ s'$ di questo raggio riportata sopra $o'\ p'$ da o' in s' darà l' abbattimento $L'\ s'$ della normale. Conducendo da V', che non ha cambiato posizione in questo movimento, la retta $V'\ u$ perpendicolare ad $L'\ s'$, e prendendo su questa a partire da u la lunghezza $u\ a$ eguale ad $u\ V'$, basterà tirare la $v\ v_1$ parallela ad $L'\ V'$, e il punto v_1 in cui la $L'\ s'$ è da questa ultima incontrata sarà l' abbattimento del punto brillante cercato. Riconducendo per tanto il piano delle due rette $L'\ a_1$ de $L'\ V'$ alla sua posizione, il punto v_1 descriverà un arco di circolo che si proietterà verticalmente sopra $v_1\ x'$ perpendicolare ed $L'\ V'$, e il punto x' nel quale la $a_1\ x'$ taglia la $L'\ p'$ sarà la proiezione verticale del punto brillante immaginario della normale considerata. La perpendicolare ad $X\ Y$ ne somministrerà immediatamente la proiezione x sopra la retta $L\ p$.

Questa costruzione ripetuta per ciascuna delle altre normali condotte dai diversi punti della $(V\ L,\ V'\ L')$ somministrerà gli altri punti della curva ausiliaria $(x\ y\ z\ t,\ x'\ y'\ z'\ t')$; e i due punti z, e z' nei quali le proiezioni di questa curva tagliano respettivamente quelle dell' altra $(p\ q\ r,\ p'\ q'\ r')$ si troveranno sopra una stessa perpendicolare alla linea di terra, se il disegno è esatto, e saranno le proiezioni del cercato punto brillante del cono.

389. Secondo caso. — *Il punto di vista è ad una distanza infinita, e la direzione dei raggi visuali è perpendicolare ad uno dei piani coordinati.*

La condizione espressa al N.° 379 che sopra un cono circolare retto, determina l' esistenza d' un elemento brillante, può tradursi per un cono qualunque nelle due seguenti. Una superficie conica avrà brillante una delle sue generatrici, quando questa generatrice e il piano tangente corrispondente resultano ambedue perpendicolari alla direzione delle normali.

Così essendo $(P\ N,\ P'\ L')$ la direzione delle normali per il cono $(S,\ S')$ (*Fig.* 141), nel caso in cui la direzione dei raggi visuali è perpendicolare al coordinato verticale, si tirerà $t\ u$ tangente alla traccia orizzontale brillante del cono e perpendicolare a $P\ N$; si costruirà la parallela al coordinato verticale

($S\ n$, $S'\ n'$), e quando lo $n'\ S'$ resulti perpendicolare ad $L'\ P'$ saremo certi che la generatrice ($t\ S$, $t'\ S'$) brillerà. Poichè $n'\ S'$ essendo parallela alla traccia verticale del piano tangente $t\ u$, si vede che questo piano non che la generatrice ($t\ S$, $t'\ S'$) resultano perpendicolari alla direzione delle normali.

PROBLEMA V. *Trovare i punti brillanti di una sfera illuminata dal sole.*

390. PRIMO CASO. — *Il punto di vista è a distanza finita dalla superficie data.*

Sia (C, C') il centro della sfera (*Fig.* 142), (V, V') il punto di vista, ($V\ L$, $V'\ L'$) la direzione dei raggi luminosi.

Immaginiamo risoluto il problema, e concepiamo condotto pel punto brillante richiesto un raggio luminoso, la normale alla sfera, e la congiungente il punto brillante col punto di vista. È evidente che queste tre rette costituiranno un piano che passa pel centro della sfera, pel punto di vista, e per la retta condotta per quest' ultimo parallelamente alla direzione dei raggi luminosi. Questo piano taglierà la sfera secondo uno de' suoi circoli grandi, i punti brillanti del quale saranno quelli cercati.

Si costruirà il piano determinato dal centro della sfera e dalla retta ($V\ L$, $V'\ L'$); si abbatterà questo piano sopra uno dei coordinati per costruire l'abbattimento della sezione da esso prodotto nella sfera, quello del punto di vista e della retta sopra indicata. Si troverà allora col metodo del N.° 368 il luogo dei punti brillanti immaginari delle normali alla sezione, e non resterà in seguito altra cosa da farsi che riportare i punti comuni a queste ultime due curve sulle proiezioni della sfera.

Cercando le tracce orizzontali N ed l della normale ($V\ C\ N$, $V'\ C'\ N'$) e della retta ($V\ L$, $V'\ L'$), si avrà la traccia orizzontale $N\ l$ del piano normale. Abbattendo questo sul coordinato orizzontale, il centro C_1 del circolo grande, secondo il quale è tagliata la sfera, si abbatterà sopra $C\ C_1$ perpendicolare ad $N\ l$ ad una distanza $c_1\ C_1$ eguale alla ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti $C\ c_1$ e $C'\ c'$. L'abbattimento del punto di vista si troverà parimente sulla $V\ V_1$ perpendicolare ad $N\ l$ ad una distanza $c_1\ V_1$ eguale alla ipo-

tenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti $V v_1$ e $v' V'$; l'abbattimento della direzione dei raggi luminosi sarà in fine $l V_1$.

Per avere il punto brillante s d'una normale qualunque $C_1 n_1$ basterà tirare le $V_1 u$ perpendicolare a $C_1 n_1$, prendere $u r$ eguale a $V_1 u$ e condurre dal punto r la $r s$ parallela ad $l V_1$. Nello stesso modo si potranno costruire tutti gli altri punti della linea $V_1 x y s z w$, che è il luogo dei punti brillanti immaginari della sezione circolare C_1, e che somministra coi punti d'intersezione y_1 e z_1 gli abbattimenti dei punti brillanti cercati.

Le proiezioni di ciascuno di questi punti si otterranno servendosi delle normali corrispondenti $C_1 y_1 a_1$, $z_1 C_1 b_1$. Poichè riportando il piano normale alla primitiva sua posizione, è evidente che le rette suddette verranno a prendere respettivamente le posizioni $(C a, C' a')$, $(C b, C' b')$: allora le perpendicolari ad $N l$ condotte per y_1 e per z_1 somministreranno su queste ultime i punti (y, y'), (z, z') che saranno i punti brillanti della sfera.

391. Secondo caso. — *Il punto di vista è all'infinito, e la direzione dei raggi visuali è perpendicolare ad uno dei piani coordinati.*

La sfera data sia quella (C, C') rappresentata nella *Fig.* 47, nella quale abbiamo supposto essere (R, R') la direzione dei raggi luminosi: cerchiamo il punto brillante della sua proiezione verticale.

A tale oggetto condurremo pel centro della sfera un raggio luminoso $(C s, C' s'$ ed un raggio visuale $(C V, C' V')$, e la bisettrice dell'angolo fatto da queste rette sarà la direzione delle normali. Abbattiamo perciò il raggio visuale sul piano orizzontale $V' C' v'$; il suo punto (s, s') verrà in (s_1, v') e l'angolo da bisecarsi sarà $V C s_1$. La normale $C n_1$ che divide quest'angolo in due parti eguali, incontra la sfera in un punto di cui (p_1, p'_1) è l'abbattimento; riconducendo il sistema di tutte queste rette alla primitiva posizione, la bisettrice $C n_1$ verrà in $(C n, C' s')$, e il punto brillante cercato in (p, p').

Problema VI. *Trovare i punti brillanti del Toro illuminato dal sole.*

392. Primo Caso. — *Il punto di vista è a distanza finita dalla superficie data.*

Considereremo della superficie data soltanto la parte che rimane in avanti del meridiano principale. L'asse di questa superficie sia $(O, O' O)$ perpendicolare al coordinato orizzontale (*Fig.* 143), e la curva meridiana sia il circolo $a' b'' a'' b'$; il punto di vista si trovi in (V, V'), e la direzione dei raggi luminosi sia $(V L, V' L')$.

Consideriamo un parallelo qualunque, per esempio, quello generato dal punto (b, b'), di cui la parte anteriore si proietta orizzontalmente sul semicircolo $b c d$, e cerchiamone il punto brillante corrispondente. A tale oggetto tireremo diverse tangenti, come $s t$, le quali saranno tutte orizzontali; costruiremo per ciascuna il piano normale $V t v$, che abbattuto sul piano del semicircolo trasporterà in V_1 il punto di vista, e somministrerà la distanza $t V_1$ del punto di vista dalla tangente considerata, e l'abbattimento $v w V_1$ della base del cono circolare retto, il cui vertice situato sopra $s t$ è il punto brillante della tangente medesima. Preso di poi un punto qualunque m di una retta $x y$ parallela ad $X Y$ costruiremo le proiezioni $m l$, $m l'$ di un raggio luminoso, e colle operazioni indicate al N.° 382 troveremo l'angolo al vertice $n m n_1$ di quel cono, e quindi il punto brillante s della tangente $s t$. La parallela a $V L$ tirata per s farà conoscere il punto corrispondente z della secante dei raggi visuali. Ripetuta questa operazione per poche altre tangenti troveremo facilmente la curva $s s_1 s_2 s_3$ luogo geometrico dei loro punti brillanti, e l'altra curva $z z_1 z_2 z_3$ secante dei raggi luminosi. Queste due curve si tagliano in s_3 sul semicircolo $a b c d$, e determinano il punto brillante (s_3, s'_3) del parallelo considerato.

Tenendo conto delle medesime tangenti al semicircolo $a b c d$, considerato come proiezione della parte anteriore del parallelo generato dal punto (b, b''), si trova per punto brillante corrispondente di quest'ultimo il punto (r_3, r'_3). In grazia del medesimo processo, applicato per maggior sem-

plicità sopra tangenti respettivamente parallele alle precedenti, si può con sufficiente prontezza determinare i punti brillanti (u, u') ed (i, i') dei paralleli massimo e minimo della superficie, non che quelli di altri paralleli se occorreranno; e si potrà infine tracciare le due curve $i\, r_1\, u\, s_1$, $i'\, r'_1\, u'\, s'_1$ proiezioni del luogo geometrico dei punti brillanti della serie di linee considerate e ad un tempo di quelli della superficie proposta.

Per avere un'altra linea che contenga questi medesimi punti, prenderemo sulla retta $(V\, L, V'\, L')$ un punto (p, p'), e costruiremo i piedi della normale da esso abbassata sulla superficie data. Questa normale si trova evidentemente nel piano meridiano $O\, p$; abbattendo questo piano parallelamente al coordinato verticale in $O\, a$, il punto (p, p') verrà in (p_1, p'_1) e la curva meridiana in $(n\, n_1, n'\, b''\, n''\, b')$; talchè l'abbattimento della normale sarà la retta $p'_1\, o'$ condotta per p'_1 e pel centro o' del circolo $n'\, b''\, n''\, b'$. Ora questa retta incontra il circolo medesimo nei punti (m'_1, m_1) ed (n'_1, n_1), che basterà ricondurre in m ed n sopra $O\, p$ per avere i piedi della normale in quistione. Costruzioni simili ripetute per altri punti della $(V\, L, V'\, L')$ daranno altri punti come m ed n, e le linee $m\, l\, o$, $n\, g\, h$ condotte per questi punti conterranno i punti brillanti dimandati, i quali saranno evidentemente (l, l'), (h, h').

393. *Osservazione.* — La superficie proposta avrebbe due altri punti brillanti situati dietro al piano $n\, d$, lo che mostra che il problema in quistione dà luogo a quattro soluzioni. Di queste, due sole però esistono fisicamente se la superficie data è intera, e le due altre non esisterebbero salvo il caso in cui si togliessero quelle porzioni di superficie che le nascondono. Nella figura che ci occupa esiste solamente la soluzione (l, l').

394. Secondo caso. — *Il punto di vista è all' infinito, e la direzione dei raggi visuali è perpendicolare ad uno dei piani coordinati.*

È noto (N.° 380) che i punti brillanti si trovano allora sopra la curva meridiana, il cui piano è parallelo alla direzione delle normali. Sieno richiesti, per esempio, i punti brillanti della proiezione verticale del Toro rappresentato nella *Fig.* 24, ove $(O\, a, O'\, v')$ è la direzione dei raggi luminosi.

Si cercherà prima l'abbattimento ($O\ n_1$, $O'\ v'_2$) della bisettrice dell'angolo $U\ O\ v$, fatto dalle due rette $O\ U$, $O\ v_2$ respettivamente parallele ai raggi luminosi ed a quelli visuali, e condotte ambedue per un medesimo punto (O, O') dell'asse; quindi riportando la ($O\ v_2$, $O'\ v'_2$) alla posizione primitiva ($O\ v$, $O'\ v'$), si troverà quella (N, v') che viene a prendere il punto n_1, v'_2 della bisettrice medesima. Allora ($O\ N$, $O'\ v'$) sarà la direzione delle normali, e sopra $N\ O\ N_1$ si troverà la proiezione orizzontale della curva meridiana cercata.

All'oggetto di evitare la costruzione di questa curva, se ne abbatta il piano $N\ O\ N_1$ su quello del meridiano principale $E\ O\ E_1$: l'abbattimento della direzione delle normali sarà $O'\ n'_2$, e quello della curva meridiana verrà costituito dai due circoli $E'\ D'$, $E''\ D''$; onde i diametri b'_1, b'_2, b''_1 b''_2 paralleli ad $O'\ n'_2$ faranno conoscere gli abbattimenti b'_1, b'_2, b''_1, b''_2 di altrettanti punti brillanti della superficie. Ricondacendo il piano del meridiano che li contiene alla primitiva sua posizione, i nominati punti verranno a collocarsi sui paralleli b'_1 b''_1, b'_2 b''_2 e precisamente in (B, B'), ($\overline{b}$, B''), (b, b'), (b, b'').

Talchè B', B'', b', b'' saranno i punti brillanti cercati; dei quali i primi due si troveranno collocati sopra la porzione di superficie generata dal semicircolo $G'\ E'\ F'$, gli altri sulla porzione che è generata dal semicircolo $G'\ D'\ F'$: di tutti e quattro il solo visibile è B'.

395. *Osservazione.* — Una operazione analoga somministrerebbe i punti brillanti sulla proiezione orizzontale del toro

E le medesime costruzioni somministrerebbero quelli di qualunque altra superficie di rivoluzione.

PROBLEMA VII. *Costruire i punti brillanti di una vite a verme triangolare illuminata dal sole, essendo i raggi visuali perpendicolari ad uno dei piani coordinati.*

396. Sia (V, V') la vite (*Fig.* 144); ($a\ l$, $a'\ l'$) la direzione dei raggi luminosi; ($a\ v$, a') quella dei raggi visuali

Risolveremo il problema soltanto per la superficie superiore del verme, poichè quella inferiore trovasi interamente

nell'ombra nella posizione supposta per la vite. L'applicazione pura e semplice del metodo generale indicato al N.° 377 ci somministrerà questa soluzione.

A tale oggetto abbatteremo sul piano $a'\ F_1$ parallelo al coordinato orizzontale il raggio luminoso ($n\ l$, $a'\ l'$); di poi divideremo l'angolo $l\ a\ n$ in due parti eguali colla retta $a\ n_1$, e troveremo la posizione ($a\ n$, $a'\ l'$) della direzione delle normali. Ora il piano che contiene i punti brillanti cercati dovendo esser tangente alla superficie proposta, e riescire perpendicolare alla retta ($a\ n$, $a'\ l'$), che è quanto dire, fare col coordinato orizzontale un angolo complemento di quello che la retta suddetta fa col medesimo piano, le operazioni che condurranno alla domandata soluzione saranno le seguenti.

Si abbatterà sul piano a o parallelo al coordinato verticale un punto qualunque (n, l') della direzione delle normali e conosceremo immediatamente l'angolo $o'\ a'\ l'_1$ da essa fatto col coordinato orizzontale. Per il punto (o, c') dell'asse, nel quale è questo incontrato dalla generatrice della superficie che è proiettata in $c\ F_1$ si condurrà la retta $c'\ X$ perpendicolare ad $o'\ a'$; allora l'angolo $c'\ X\ c$ sarà eguale all'angolo $b'_1\ a'\ o'$; onde se immaginiamo che la retta $c'\ X$ generi un cono circolare retto avente per vertice il punto c' e per base il circolo di raggio $c\ X$, è evidente che ogni piano tangente a questo cono farà col coordinato orizzontale un angolo eguale ad $o'\ a'\ l'_1$.

Tiriamo pel punto c' la generatrice $c'\ F_1$ e per la sua traccia orizzontale F la $F\ Z$ tangente al circolo $c\ X$. La retta $F\ Z$ sarà la traccia orizzontale d'un piano che gode della doppia proprietà, di cui deve godere quello contenente i punti cercati; poichè passando per la generatrice $c'\ F$ resulta tangente alla superficie (*Geom. Descritt.*), ed essendo tangente al cono generato dalla retta $c'\ X$ resulta inclinato convenevolmente sul coordinato orizzontale.

Facciamo ora ruotare il piano $F\ Z$ attorno all'asse del cono, mantenendosi a questo tangente, finchè la sua traccia orizzontale venga a prendere la posizione $F_1\ Z_1$ perpendicolare alla proiezione orizzontale $n\ n$ della direzione delle normali. Tutti i suoi punti saranno in questo caso brillanti (N.° 378), perchè in questa nuova posizione esso riescirà perpendicolare alla direzione suddetta; ma non sarà più tangente alla super-

ficie perchè la retta per cui passa, essendo venuta in ($c\ y$, $c'\ y'$), non si trova più distesa sulla superficie. Facendo però risalire il piano parallelamente a se stesso insieme colla retta finchè questa venga a prendere la posizione ($c\ p\ q$, $p'\ q'$), il piano tornerà ad essere tangente alla superficie, e sopra la $p'\ q'$ si troverà uno dei punti brillanti domandati.

È noto (*Geom. Descritt.*) il metodo che occorre impiegare per trovare il punto di contatto con una superficie storta d'un piano condotto per una delle sue generatrici; ma l'applicazione di questo metodo non darebbe con certezza la conoscenza di un tal punto a cagione della obliquità secondo la quale il piano tangente taglierebbe qualunque linea tracciata sulla superficie in quistione, onde miglior consiglio per la determinazione del punto che si cerca è ricorrere alle seguenti considerazioni.

Concepiamo un piano tangente per ciascuno dei punti in cui la generatrice $c'\ Y$ taglia le eliche corrispondenti della superficie: è chiaro che gli angoli fatti da questi piani col coordinato orizzontale aumenteranno a misura che il punto di contatto sarà più vicino all'asse.

Così la inclinazione del piano tangente dipendendo dalla posizione del punto di contatto, reciprocamente la posizione di questo punto dipenderà dalla inclinazione del piano tangente; e poichè questa inclinazione è conosciuta, si dee poter dedurre la posizione del punto cercato.

Costruiscansi nei diversi punti della generatrice $c'\ Y$ le tangenti alle eliche corrispondenti; le tracce orizzontali di esse daran luogo ad una curva $c\ m\ Z\ Y$ facile a costruirsi, e il punto z nel quale questa curva è incontrata dalla traccia orizzontale $Z\ Y$ del piano tangente, sarà la intersezione del coordinato orizzontale colla tangente alla elica che passa pel punto cercato z', il quale rimarrà per conseguenza in tal modo determinato. Non resterà quindi altra cosa da farsi che ricondurre questo punto sul piano $Y_1\ Z_1$, facendo percorrere ad esso prima un arco orizzontale ($Z'\ z$, $z'_1\ z_1$); di poi la verticale (z, $z_1\ z'$) finchè sia pervenuto sulla generatrice $p'\ q'$ o sopra la elica $d'\ z'$ e' facile a dedursi dalla sua proiezione orizzontale $d\ z\ Z$.

397. *Osservazione I* — La soluzione geometrica del

problema somministra a tutto rigore un punto brillante z' per la superficie superiore di ciascun verme della vite; ma se poniam mente che, ad eccezione del verme più alto, su tutti gli altri vermi il punto brillante viene ad occupare un luogo che si trova nell'ombra portata da ciascuno dei vermi medesimi, si vedrà che sulla vite in quistione non può esservi altro punto brillante che quello z' già notato.

398. *Osservazione II.* — Abbiamo scelta in questo esempio la direzione della luce per modo che il punto brillante sia compreso entro i limiti della superficie reale del verme. Ma questo caso non avrà ordinariamente luogo nella pratica, perchè i piani tangenti in questa parte della superficie avendo quasi tutti la stessa inclinazione, avverrà ben di rado che uno di essi riesca perpendicolare alla direzione delle normali.

Ad ogni modo è facile riconoscere a priori quale sarà la posizione del punto brillante. Poichè se il punto Z si troverà sull'arco $F\,f$, il punto brillante apparterrà alla porzione di superficie superiore del verme prolungata al di sotto dell'elica che forma la costola saliente della vite. Se il punto Z sarà sull'arco $f\,g$, il punto brillante apparterrà alla superficie reale superiore del verme. Infine, quando il punto Z fosse sull'arco $g\,m\,e$, il punto brillante apparterrebbe al prolungamento della superficie inferiore del verme al disotto della elica che forma la costola rientrante della vite.

È poi evidente che non può trovarsi alcun punto brillante sulla vite allorquando la generatrice $c'\,F$ farà col coordinato orizzontale un angolo maggiore di $c'\,X\,c$, vale a dire di quello che esprime la inclinazione della direzione delle normali sul medesimo coordinato.

CAPO IV.

Dei luoghi di maggior chiarezza sulle parti illuminate delle superficie dei corpi.

399. Se le superficie di tutti i corpi fossero perfettamente pulite, come nel capo precedente è stato supposto, la teoria delle ombre diverrebbe inutile, e tutto ridurrebbesi alla costruzione dei punti e delle linee brillanti.

Ragionando nella ipotesi del punto di vista e del punto luminoso collocati all'infinito, giacchè le considerazioni che avremo a fare possono egualmente applicarsi al caso in cui uno di questi punti si trovi ad una distanza finita, si vede che qualunque superficie o parte di superficie la quale non sia perpendicolare alla direzione delle normali, non può rinviare all'occhio alcun raggio luminoso; e per conseguenza queste parti quantunque illuminate dovrebbero comparire coperte di una tinta oscura come se fossero nell'ombra.

Ma questo fenomeno non ha luogo a cagione delle ineguaglianze di cui è ricoperta la superficie dei corpi, e che presentano alla luce, siccome lo abbiamo detto al N.° 354, un gran numero di faccette inclinate in tutte le direzioni. In conseguenza di questa diversità di inclinazione, deve necessariamente esservi su ciascuna ineguaglianza qualche faccetta perpendicolare alla direzione delle normali; talmente che i raggi luminosi ricevuti da queste faccette essendo rinviati nell'occhio, tutti i punti della superficie che ricevono la luce compariranno illuminati. Però la quantità di luce rinviata da questi punti non può paragonarsi a quella che proviene dai punti e dalle linee brillanti d'una superficie pulita. Imperocchè la operazione del pulimento distruggendo le parti salienti delle ineguaglianze produce su ciascuna di queste una faccetta di una certa estensione, e diminuisce gli intervalli concavi che separano le ineguaglianze le une dalle altre. Le

piccole faccette di cui si compongono questi intervalli sono quelli che per la loro inclinazione in tutte le direzioni fanno comparire illuminati tutti i punti della superficie del corpo; ma a cagione della loro piccola estensione il numero dei raggi luminosi rinviati da ciascuna di esse sarà sempre piccolissimo in confronto del numero di quelli rinviati dalle altre faccette che resultano dal pulimento, e che allorquando sono perpendicolari alla direzione delle normali formano le parti rigorosamente brillanti della superficie.

Dunque allorchè una superficie non è stata pulita, non può contenere punti brillanti nello stretto significato di questo vocabolo. Ma vi hanno sempre su di esso delle parti che sembrano più illuminate delle altre, siccome lo abbiamo provato al N.° 355, e che per analogia abbiamo pure indicate collo stesso nome.

Determinare esattamente il luogo e la estensione di queste parti le quali più propriamente potrebbero chiamarsi *parti di maggior chiarezza*, è una delle quistioni più importanti della scienza del disegno, e che ci proponiamo ora di risolvere almeno in un modo generale.

400. Rammenteremo dapprima che la condizione essenziale per la quale un punto riesce brillante, è che l'occhio si trovi nella direzione del raggio riflesso. Può quindi inferirsi che più il raggio visuale si approssimerà a questa direzione, e più il punto corrispondente comparirà illuminato; e che le faccette della superficie si avvicineranno tanto più ad essere brillanti quanto più i raggi luminosi da esse rinviati si approssimeranno al raggio visuale.

Sia $S\ T$ un piano tangente in M ad una superficie data (*Fig.* 145), $M\ P$ la normale, $L\ M$ il raggio luminoso, $M\ R$ quello riflesso. Sia inoltre $M\ V$ il raggio visuale corrispondente al punto M, $M\ N$ la direzione delle normali, ed $S'\ T'$ il piano perpendicolare in M ad $M\ N$.

Se ammettiamo che i due piani $S\ T$, $S'\ T'$ si taglino secondo una retta $x\ y$ perpendicolare al piano dei due raggi $L\ M$, $M\ V$ ne conseguirà che le cinque rette $M\ L$, $M\ P$, $M\ R$, $M\ N$, $M\ V$, cioè a dire, *il raggio incidente, la normale, il raggio riflesso, la direzione delle normali* e *il raggio visuale* si troveranno in un medesimo piano. Allora siccome

abbiamo fra gli angoli formati da queste rette le relazioni

$$L\,M\,N = P\,M\,R + R\,M\,V - P\,M\,N$$

$$L\,M\,P = P\,M\,R$$

sottraendo la seconda dalla prima si trova

$$R\,M\,V = 2\,P\,M\,N$$

cioè l'angolo fatto dal raggio riflesso col raggio visuale è doppio di quello che la direzione delle normali fa colla normale alla superficie.

Ma se i piani $L\,M\,R$, $L\,M\,V$ (*Fig.* 146) non coincidono, siccome lo abbiamo supposto nel caso precedente, essi si taglieranno secondo il raggio luminoso $L\,M\,L'$; e allora può avvenire, specialmente se gli angoli $L\,M\,P$ ed $L\,M\,N$ differiscono poco da 90 gradi, che ciascuno degli angoli $L\,M\,R$ ed $L\,M\,V$ sia quasi eguale a due angoli retti; e quindi che l'angolo $R\,M\,V$ fatto dal raggio riflesso col raggio visuale resulti più piccolo dell'altro $N\,M\,P$ fatto dalla direzione delle normali colla normale alla superficie.

Può dedursi frattanto da ciò che la quantità di luce inviata da un punto all'occhio non dipende dall'angolo che la normale corrispondente alla superficie fa colla direzione delle normali, ma piuttosto da quello che il raggio visuale fa col raggio riflesso. Per conseguenza, quantunque le parti più illuminate di una superficie si trovino per ordinario in vicinanza dei punti brillanti, non bisogna concluderne che la luce debba essere distribuita attorno a questi punti di una maniera simmetrica; e allorchè di più punti *egualmente illuminati* di una superficie vorremo conoscere quelli che sono più favorevolmente disposti per rinviare la luce all'occhio, bisognerà cercare quali sono i punti pei quali l'angolo formato dal raggio visuale col raggio riflesso è il più piccolo possibile.

401. Nelle applicazioni il raggio visuale è quasi sempre perpendicolare ad uno dei piani coordinati, onde la costruzione dell'angolo da esso formato col raggio riflesso in un punto qualunque d'una superficie data, potrà ottenersi ordinariamente nel modo seguente:

1.° Si abbatterà sul coordinato orizzontale il piano formato dal raggio luminoso colla normale corrispondente al punto che si considera, e si costruirà immediatamente il raggio riflesso.

2.° Si riporterà il piano suddetto alla primitiva sua posizione, e si costruiranno le proiezioni di quest' ultimo raggio

3.° Prendendo finalmente per nuovo asse d' abbattimento il raggio visuale, nel caso in cui sia perpendicolare ad uno dei coordinati, si farà abbattere il raggio riflesso parallelamente a quello dei piani coordinati a cui è perpendicolare il raggio visuale.

In generale è sufficiente fare tali operazioni per quella porzione della superficie illuminata che si trova compresa fra i due piani proiettanti il raggio luminoso e il raggio visuale.

402. Altre cause contribuiscono a far variare il grado di chiarezza delle diverse parti illuminate d' un corpo, e delle quali è necessario tener conto. Esse sono la inclinazione degli elementi superficiali del corpo rispetto al raggio luminoso, la loro distanza dall' occhio, infine le ombre portate dalle ineguaglianze della superficie entro gli intervalli concavi che le separano le une dalle altre.

403. Egli è facile a dimostrarsi che *la quantità di luce ricevuta da una faccia piana è proporzionale al seno dell' angolo che questa faccia fa colla direzione dei raggi luminosi.*

Supponiamo che $A\ B$ (*Fig.* 147) sia la proiezione ortogonale d' un quadrato illuminato dal sole secondo la direzione $L\ M$. Supponiamo di più, ciò che può essere concesso, che tutti i raggi luminosi sieno equidistanti fra loro, siccome la figura dimostra. La intensità di luce che riceverà il quadrato nella posizione $A\ B$ sarà evidentemente rappresentata dalla quantità di raggi luminosi compresi fra $A\ l$ ed $M\ L$

Immaginiamo frattanto che il quadrato si muova ruotando attorno al lato verticale A, e prenda le successive posizioni $A\ B_1$, $A\ B_2$, $A\ B_3$ . . . : si vedrà facilmente che aumenterà gradatamente il numero dei raggi luminosi che il quadrato va ricevendo, che questo numero diventerà massimo allorchè sarà venuto nella posizione $A\ B_3$ perpendicolare alla direzione $L\ M$ dei raggi luminosi, e tornerà poi a decrescere oltrepassato che avrà questa posizione.

Considerando ora che il lato A è illuminato dal medesimo numero di raggi luminosi, qualunque sia la posizione nella quale si trova il quadrato, noi possiamo inferire

che la luce ricevuta da $A\ B$ è alla luce ricevuta da $A\ B_2$ come

$$A\ M : A\ B_2 :: A\ M : A\ B :: sen\ A\ B\ M : R$$

Talchè se indichiamo con 1 la quantità di luce che riceve una superficie perpendicolare alla direzione dei raggi luminosi, con x quella ricevuta da un altra superficie equivalente, e con α l'angolo che questa ultima fa colla direzione suddetta, si avrà:

$$x : 1 :: sen\ \alpha : R$$

e quindi

$$x = sen\ L, \text{ facendo } R = 1$$

che è quanto ci eravamo proposto di dimostrare.

Ma non deve per altro concludersi da un tal resultato che gli elementi della superficie i quali si trovano perpendicolari alla direzione della luce sieno quelli che nel disegno debbono comparire i più chiari; sendo che a questo effetto concorrer debba anche la loro posizione rispetto a quella nella quale si suppone situato l'occhio dello spettatore. Però la loro determinazione può in generale stabilire uno dei limiti di quella parte della superficie che deve avere la maggior chiarezza nel disegno; l'altro limite verrà poi determinato dall'elemento superficiale che, secondo le considerazioni fatte al N.° 400, è posto nella miglior condizione per rinviare all'occhio la maggior quantità di luce.

404. È noto che la intensità della luce varia in ragione inversa del quadrato della distanza alla quale si trova il corpo luminoso.

Pei corpi illuminati dal sole è inutile tener conto di questa legge, giacchè tutti, e a più forte ragione le diverse parti di un medesimo corpo rappresentato in un dato quadro, possono ritenersi egualmente distanti da quella sorgente di luce. Ma per l'occhio dell'osservatore, il quale percepisce la esistenza non solo del corpo, sì bene anche la forma e la posizione delle diverse sue parti in virtù della diversa sensazione che su quell'organo producono le tinte più o meno chiare di cui le parti medesime sono ricoperte, non possono del tutto trascurarsi le conseguenze di quella legge. E con ciò non vogliamo dire che si abbia nei disegni ad applicarla nello stretto significato del suo valore matematico; basta solo rammentarsi

che le parti illuminate le quali sono più vicine all'occhio non debbono essere ricoperte di una tinta più scura di quella con cui si rappresentano le parti che si trovano più indietro.

Queste considerazioni si applicano per convenzione anche ai disegni che rappresentano le proiezioni dei corpi, sebbene in questi suppongasi infinita la distanza da cui sono riguardati dall'occhio dell'osservatore.

405. Le ombre portate dalle ineguaglianze della superficie negli intervalli concavi che le separano le une dalle altre modificano la luce rinviata dalle faccette di cui gli uni e le altre si compongono, diminuendola più o meno a seconda della posizione che ha ciascuno elemento rispetto al raggio luminoso (N.° 403) e a quello visuale, e della distanza dell'elemento medesimo dall'occhio (N.° 404).

Ad eccezione dell'elemento superficiale per il quale l'angolo fatto dal raggio riflesso col raggio visuale è il più piccolo possibile, e che perciò rinvia nell'occhio la maggior quantità di luce (N.° 400), tutti gli altri elementi contigui, quantunque illuminati, si trovano coperti di una tinta che va gradatamente facendosi più scura fino alla linea di separazione d'ombra e di luce, a cagione delle ombre prodotte dalle ineguaglianze degli elementi medesimi.

La posizione poi di questi elementi rispetto alla direzione dei raggi luminosi come rispetto a quella dei raggi visuali farà conoscere da qual parte dell'elemento considerato ha luogo più rapidamente la diminuzione di luce.

406. Sono queste le considerazioni generali su cui sono fondati i principii dell'acquerello per le parti illuminate della superficie dei corpi. Questi principii sono i seguenti

1.° *Allorchè una superficie illuminata ha tutti i suoi punti egualmente distanti dall'occhio, deve ricevere su tutta la sua estensione una tinta chiara ed uniforme.*

In questa condizione si trovano tutte le facce piane di un corpo parallelo al quadro tanto nei disegni di proiezione, come in quelli prospettici

2.° *Di due superficie con disposte parallelamente e per conseguenza illuminate nella stessa maniera, quella che si trova la più vicina all'occhio deve ricevere una tinta più debole dell'altra*

Digitized by Google

Nelle proiezioni dei monumenti architettonici si hanno frequentissimi esempi di questo caso. Tutta la maestria del disegnatore consiste allora nel trovare tale accordo di tinte per queste parti da produrre veramente in chi osserva la sensazione del loro parallelismo e ad un tempo delle differenti distanze a cui si trovano collocate.

3.° *Ogni superficie illuminata e inclinata per rapporto al piano del quadro, avendo i suoi punti disegnolmente distanti dall'occhio, deve ricevere una tinta ineguale.*

Combinando questo principio col precedente si vede che questa tinta dovrà diminuire d'intensità per le parti che sono più vicine all'occhio. Questa degradazione deve poi essere fatta con tanta cura da non produrre sull'occhio la impressione d'una faccia curva, se essa è piana, e viceversa.

4.° *Di due facce illuminate, quella che si presenta più direttamente alla luce deve essere espressa da una tinta più debole.*

Questo principio ha il suo fondamento nelle considerazioni fatte al N.° 400, e può in qualche caso modificare i principii precedenti che sono stabiliti sulla distanza degli elementi superficiali dall'occhio dello spettatore.

407. Daremo termine alle generalità che precedono con una applicazione.

Abbiasi il cilindro circolare retto ($A\ V\ B$, $A'\ A''\ B''\ B$) (*Fig.* 148) illuminato dal sole secondo la direzione (R, R'), e sia proposto di determinare la parte di maggior chiarezza sulla sua proiezione verticale.

Essendo ($V\ O$, O') la direzione dei raggi visuali, è evidente che questa parte si trova compresa fra l'elemento L, $l'\ l''$, determinato dal piano verticale $O\ L$ parallelo alla direzione dei raggi luminosi, e l'elemento (V, $O'\ O''$) determinato dal piano verticale $O\ V$ parallelo a quello dei raggi visuali. Imperocchè il primo ha tal posizione sulla superficie del cilindro da ricevere il maggior numero di raggi luminosi, e la posizione del secondo è il limite di tutti quelli di cui le faccette piccolissime possono con efficacia rinviare una certa quantità di luce nell'occhio dello spettatore.

Fra i due notati elementi si troverà dunque quello capace di rinviare nell'occhio il maggior numero di raggi lu-

minosi, cioè quello del quale il raggio riflesso fa il più piccolo angolo col raggio visuale (N.° 400).

Per determinare quest' ultimo elemento, bisogna prima risolvere il problema generale per un punto qualunque del cilindro. A tale oggetto consideriamo una normale qualunque ($O\ n$, $O''\ n'$); e invece di fare le operazioni pel punto nel quale essa incontra la superficie, eseguiamole per il punto (O, O'') in cui incontra l' asse. Ciò non cangerà il resultato, poichè per qualsivoglia punto della normale considerata le direzioni del raggio luminoso corrispondente e del raggio visuale rimangono le stesse.

Ciò posto tiriamo per (O, O'') il raggio luminoso ($O\ L$, $O''\ L'$), e cerchiamo la posizione del raggio riflesso. Siccome la retta ($O\ n$, $O''\ n'$) è orizzontale, è evidente che gli angoli d'incidenza e di riflessione devono proiettarsi orizzontalmente sopra due angoli eguali; onde se dalla proiezione orizzontale L di un punto qualunque (L, L') del raggio luminoso conducesi $L\ r$ perpendicolare sopra $O\ n$, e si prende $i\ r$ eguale ad $L\ i$, sarà $O\ r$ la proiezione orizzontale del raggio riflesso. Trovando sopra $O''\ n'$ la proiezione verticale r' del punto in cui la normale e la retta proiettata in $L\ r$ si incontrano, la $L'\ i'$ prolungata sarà la proiezione verticale di questa ultima retta, e la perpendicolare alla linea di terra $X\ Y$ condotta per r somministrerà il punto r' e con esso la proiezione verticale $O''\ r'$ del raggio riflesso.

Per trovar l' angolo che questo raggio fa con quello visuale ($O\ Y$, O'') prenderemo quest' ultimo per asse d' abbattimento, e faremo ruotare il primo finchè venga a situarsi parallelamente al coordinato orizzontale. In questo movimento il punto (r, r') descriverà l' arco di cerchio ($r\ r_1$, $r'\ r'_1$) parallelo al coordinato verticale, ed abbattendosi in (r_1, r'_1), l' angolo cercato sarà nella sua vera grandezza $Y\ O\ r_1$.

Ripetendo questa operazione per un' altra normale ($O\ n_1$, $O''\ n'_1$), si troverà per raggio riflesso la retta ($O\ R_1$, $O''\ R'_1$) e l' angolo da questo fatto col raggio visuale sarà $Y\ O\ r_2$.

Se ora si osserva che le rette $L\ R$, $L\ R_1$ . . . . sono divise per metà nei punti i, i_1 . . . . , e che per conseguenza debbono nei corrispondenti punti i', i'_1 . . . rimanere pure divise per metà le proiezioni verticali $L'\ R'$, $L'\ R'_1$ . . . ne

dedurremo facilmente che tutte le estremità R', R'_1 . . . . delle proiezioni verticali dei raggi riflessi si troveranno sopra una retta R', R' parallela ad O' n' o alla linea di terra. Talchè il punto V' nel quale essa incontra la O' O'' determinerà la proiezione verticale O'' V' del raggio riflesso secondo O V; questo raggio corrisponde evidentemente alla normale O N che divide in due parti eguali l'arco L V; il suo abbattimento fatto sul medesimo piano orizzontale A'' B'', sul quale sono stati abbattuti tutti gli altri, produce il più piccolo degli archi descritti col centro in O'', poichè O'' V' è la più corta retta di tutte le altre che han servito a descriverli; dunque è certo che l'angolo V O v fatto da questo raggio riflesso col raggio visuale è anche il più piccolo di tutti quelli che corrispondono alle altre normali comprese fra O L ed O N, ovvero fra O N ed O V.

Resulta da ciò che l'elemento del cilindro, il quale si trova meglio collocato per rinviare la maggior quantità di luce all'occhio dello spettatore è quello proiettato sul punto di mezzo dell'arco L V, e che di più la parte di maggior chiarezza è compresa fra quest'ultimo e l'elemento proiettato in L che riceve il più gran numero di raggi luminosi (N.° 403).

408 La luce e le ombre si distribuiscono sulla superficie del cilindro, come sul tronco di colonna scannellata, di cui le proiezioni sono rappresentate nella *Fig.* 149. Si può infatti concepir facilmente che i rapporti di grandezza fra le parti illuminate e quelle in ombra non saranno cangiati immaginando le diciotto scannellature sostituite da cento che saranno più piccole, e ciascuna di queste ultime da mille altre, fino a che si arrivi col pensiero a delle dimensioni così piccole da poter considerare quelle scannellature come le ineguaglianze di cui è ricoperta la superficie. E potremo poi formarci una idea dell'effetto prodotto in questa ultima ipotesi, riguardando la *Fig.* 149 da una distanza sufficientemente grande perchè le parti in ombra e quelle illuminate compariscano confuse per modo da non formare che una tinta continua e dolcemente degradata da N verso L.

Deve pure osservarsi che il principio 3° del N.° 406 non è applicabile per gli elementi situati alla destra di quello proiettato in N; sendochè la luce che ricevono questi elementi venga

ad essere indebolita dalle ombre delle ineguaglianze che sono tutte visibili e che crescono di dimensioni da N fino all'elemento P che è linea di separazione d'ombra e di luce, mentre le ombre delle ineguaglianze situate alla sinistra di N sono nascoste dai filetti salienti delle ineguaglianze medesime.

Al di là dell'elemento L la luce torna a indebolirsi più rapidamente di quello che avviene fra N ed L, sempre però in un grado molto inferiore alla diminuzione che ho luogo al di quà di N, e questa oscurità dovuta nella massima parte alle ombre prodotte dalle ineguaglianze della superficie, che aumenta gradatamente e quasi con simmetria da ciascun lato dell'elemento N, contribuisce ad approssimare a questo elemento la parte del cilindro dotata di maggior chiarezza.

CAPO V.

Della luce aerea e dei riflessi.

409. Nel porre i principi che servono a stabilire la Teoria delle Ombre (Lib. I, Cap. I), noi abbiamo supposto i corpi luminosi e i corpi opachi perfettamente isolati nello spazio; e così, fatta astrazione dal mezzo in cui essi necessariamente si trovano, siamo giunti a dei resultati che non esistono giammai in natura. Nondimeno tali resultati hanno un grado non piccolo di utilità pel Disegnatore, poichè determinando le linee che separano le parti illuminate dei corpi da quelle che si trovano nell'ombra, determinano pure in un modo sicuro per ciascun di essi il luogo sul quale deve rivolgersi l'esame della distribuzione della luce, e fan conoscere la estensione di quello su cui si distribuiscono le ombre.

Nel capo precedente abbiamo parlato delle cause che modificano la luce sulle parti illuminate dei corpi, ma sempre indipendentemente dal mezzo in cui essi si trovano: ora parleremo di quelle che influiscono sensibilmente sulle ombre, e principalmente diremo degli effetti dovuti alla presenza dell'aria.

Digitized by Google

410. L'aria che circonda la terra e che è ritenuta attorno a questa dalla gravità, forma uno strato di più miriametri d'altezza. La luce emanata dal Sole non arriva più in linea retta alla superficie della terra, siccome lo abbiam fatto supporre al N.° 1, perchè costretta a traversare quello strato passa a ciascun istante da un mezzo aereo d'una certa densità in un altro di densità più grande; onde ciascun raggio solare si troverà necessariamente piegato secondo una linea di una certa curvatura. Questa curvatura però è sì debole che un raggio di luce di 100 a 200 metri può sempre considerarsi come rigorosamente retto.

411. Rappresentiamo la terra col circolo *g e b* (*Fig.* 150), e con l'altro concentrico rappresentiamo lo inviluppo esterno della atmosfera. Sia *R a* un raggio solare che refrangendosi nell'aria descrive la curva *a e c* tangente in *e* alla terra. È evidente che la massa d'aria *a e c d* sarà illuminata direttamente dal sole, e che ciascuna delle sue molecole rinviando della luce in tutte le direzioni, la massa intera *a e c d* farà ufficio di corpo luminoso: allora essa illuminerà la parte *c g h i* dell'atmosfera come la porzione *e g* della massa terrestre, per la quale il sole non trovasi sull'orizzonte. Alla sua volta e per un secondo rinvio di luce, la parte *c g h i* illuminerà delle parti della terra più lontane dal punto *e* che il punto *g*, e così di seguito, fino a che la luce rinviata divenga insensibile.

Questa luce, che vien chiamata *luce aerea* o *atmosferica*, perchè è rinviata dall'aria, è quella di cui godiamo dopo il tramonto o innanzi il levar del sole e che si conosce coi nomi di *crepuscolo* e d'*aurora*.

412. La intensità della luce aerea è considerevole; perchè al momento in cui il sole passa al di sotto dell'orizzonte e in cui cessiamo di ricevere direttamente i suoi raggi, non sentiamo diminuzione subitanea di chiarezza. È vero che allora i raggi solari diretti traversando l'atmosfera sotto un angolo molto obliquo avranno perduto una forza molto maggiore di quella che perdono verso il mezzo del giorno; ma da ciò non segue che la luce aerea non sia a tutte le ore del giorno d'una intensità rimarchevolissima rispetto a quella della luce diretta, siccome le fatte esperienze hanno provato.

413. La differenza fra gli effetti dei raggi solari, e quelli dei raggi aerei sta in ciò, che i primi arrivano alla superficie della terra in direzioni quasi parallele (N.i 11 e 340), mentre i secondi ci arrivano al disotto dell'orizzonte in tutte le direzioni possibili. Laonde le ombre sono prodotte solamente dalla intersezione dei raggi solari, e alla chiarezza aerea non rimane altro ufficio che quello di modificarle. Gli effetti dunque di quest'ultima sulla superficie dei corpi sono da ricercarsi entro i contorni determinati nel Libro I.

Prima però di procedere alla ricerca di questi effetti, importa determinare in qual direzione ha luogo il massimo effetto della luce aerea rispetto a quella del raggio solare.

414. Supponiamo che le molecole dell'aria sieno altrettante sfere perfettamente pulite, le quali riflettano senza alterarli minimamente i raggi luminosi da esse ricevuti; e sia $r\ d\ m$ una di queste molecole (*Fig.* 151). Il raggio $l\ d\ n\ k$ diretto verso il centro o si rifletterà sopra se stesso; i suoi tenuissimi filetti non divergeranno sensibilmente dalla primitiva direzione e la luce non perderà per conseguenza niente o quasi niente della sua intensità.

Ma considerando un altro raggio a e $m\ b$ della stessa grossezza e della stessa intensità del precedente, resulterà manifesto che la grandezza di $c\ m$ supererà tanto più quella di $d\ n$ quanto più il raggio a e $m\ b$ si discosta dal centro; e che per questa ragione le normali in c ed in m si allontaneranno di più fra loro, aumentando per conseguenza la divergenza dei filetti luminosi componenti il raggio riflesso. Dal che può inferirsi che la luce rinviata in una direzione $m\ q$ sarà tanto più debole, quanto più cresce l'angolo $b\ m\ q$, ovvero la sua metà $b\ m\ z$ che è l'angolo d'incidenza.

415. Ciò posto, supponiamo che un punto (M, M') (*Fig.* 152) sia illuminato dai riflessi di una serie di molecole aeree distribuite sopra un circolo orizzontale qualunque $(a\ b\ c\ d\ e\ f,\ a'\ c')$, avente il centro (M, c') sulla verticale del punto considerato; e sia (R, R') la direzione dei raggi luminosi.

Le molecole situate in (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), (e, e'), ... rinvieranno al punto (M, M') i raggi $(a\ M, a'\ M')$, $(b\ M, b'\ M')$ . . . $(c\ M, c'\ M')$ . . . . Ora è facile cosa il dimostrare che di tutti questi raggi rinviati, il più in-

tenso e, nella ipotesi fatta al N.° 414, il raggio (*e M*, *e' M'* che si proietta orizzontalmente secondo la retta e *M* parallela alla proiezione orizzontale *R* del raggio luminoso, e che va da e in *M*, in direzione contraria a quella del raggio stesso.

A tale oggetto tiriamo *e' l'* parallela ad R', e prendiamo *e' l'* eguale ad *e' M'*; dipoi conduciamo il piano orizzontale *l' g'*. Questo piano taglierà evidentemente il cilindro formato dai raggi luminosi che terminano al circolo (*a c e*, *a' e'*) secondo un circolo identico a questo, e determinerà su questi raggi delle parti (*g a*, *g' a'*), (*h b*, *h' b'*), (*i c*, *i' c'*) . . . . eguali fra loro ed ai raggi riflessi (*a M*, *a' M'*), (*b M*, *b' M'*), (*c M*, *c' M'*) . . Talchè i triangoli (*g a M*, *g a' M'*, (*h b M*, *h' b' M'*), (*i c M*, *i' c' M'*) . . . . saranno tutti isoscoli; e siccome i loro angoli al vertice sono compresi fra lati di egual grandezza, così il più piccolo di questi angoli si troverà opposto alla base più corta. Queste basi sono le oblique (*g M*, *g' M'*), (*h M*, *h' M'*) . . . : la minore di tutte è evidentemente (*l M*, *l' M'*), la quale trovandosi nel piano *g* e, dal lato e verso il quale si avanza il raggio (*R*, *R'*), è quella che meno delle altre si discosta dalla perpendicolare (*M*, *M' n'*), condotta dal punto dato al piano *g' l*; dunque l'angolo *l' e' M'* opposto ad essa sarà il più piccolo di tutti gli altri. Segue da ciò che il raggio riflesso (*e M*, *e' M'*) è quello che si approssima di più a riflettersi sopra se stesso, e che presenta il più piccolo angolo d'incidenza con la molecola che lo rinvia: dunque (N.° 414) esso è il più intenso di tutti i raggi rinviati dal cerchio (*a c e*, *a' e'*).

Quello che avviene per la circonferenza (*a b c d e f*, *a' e'*) ha luogo pure per tutte le altre situate in piani paralleli e col centro sulla verticale del punto (*M*, *M'*); e siccome gli effetti di due raggi aventi la medesima direzione si sommano, si vede che di tutte le direzioni, secondo le quali l'aria rinvia della luce riflessa al punto (*M*, *M'*, quelle per le quali la intensità di questa luce è maggiore, si trovano tutte situate nel piano verticale *a e* dal lato della verticale (*M*, *M' n'*) opposto al sole.

416 Ma la ipotesi da cui siamo partiti (N.° 414) cioè, che i raggi di luce ricevuti da una molecola d'aria non sieno

minimamente alterati nella riflessione non sembra esatta; poichè numerose esperienze han provato che la luce riflessa da superficie piane e pulite soffre un'alterazione tanto più considerevole nel riflettersi quanto meno grande è l'angolo d'incidenza.

Quindi due cose devono far variare la forza d'un raggio *m q* riflesso da una molecola *r d m* (*Fig.* 151):

1.° La divergenza dei filetti luminosi dovuta alla curvatura, divergenza che diminuisce la intensità a misura che l'angolo d'incidenza aumenta;

2.° L'alterazione che nella riflessione diminuisce la intensità quando l'angolo d'incidenza diminuisce. Talchè i raggi riflessi dai diversi punti dell'arco *M K N* della molecola *r d m* presenteranno in *M*, sotto la incidenza *zero*, un primo *massimo* d'intensità; in *N*, sotto la incidenza di 90 gradi un secondo *massimo*; ed in un certo punto *K* situato fra *M* ed *N* un *minimo* d'intensità.

Onde può veramente ritenersi che la luce rinviata al punto (*M*, *M'*), (*Fig.* 152), dalla circonferenza (*a b c d e f*, *a' e'*) presenta un massimo d'intensità secondo il raggio (*e M*, *e' M'*); che questa intensità diminuisce in seguito a misura che la direzione del raggio riflesso differisce meno da quella del raggio solare (*R*, *R'*) fino ad un certo punto che corrisponde al minimo d'intensità; e che al di là la intensità aumenta a misura che più si avvicinano fra loro le direzioni del raggio riflesso e del raggio solare; di modo che la intensità torna ad essere un massimo nella direzione (*a M*, *a' M'*).

417. Consideriamo ora un punto materiale situato al centro di una superficie sferica sulla quale si trovino distribuite le molecole dell'aria illuminate da raggi solari. Immaginiamo condotto pel punto dato un piano verticale parallelo alla direzione dei raggi stessi; e poi supponiamo tagliata la sfera da una infinità di piani orizzontali. Ciascuna sezione ottenuta avrà il centro sulla verticale del punto che si considera, e il raggio di luce più intenso rinviato da essa al punto medesimo si troverà sul piano verticale suddetto e dal lato della verticale, luogo dei centri delle sezioni, opposto al sole (N.° 415). Tutti questi raggi resulteranno evidentemente simmetrici attorno al prolungamento del raggio solare condotto pel punto

in questione; quindi i loro effetti si sommeranno attorno a questo prolungamento e ne resulterà un massimo d'intensità di luce rinviata a quel punto in direzione contraria al prolungamento medesimo. Potremo quindi inferire che nel caso che ci occupa, i raggi più intensi saranno da una parte rinviati dall'aria nella direzione del raggio solare condotto pel punto dato; dall'altra parte lo saranno secondo la linea direttamente opposta a questo raggio.

Così un corpo elevatissimo, un areostato per esempio, dovrà considerarsi come illuminato in tutte le direzioni dall'atmosfera, e particolarmente secondo due linee principali, quella del raggio solare, e quella opposta a questo raggio: imperocchè senza errore sensibile può farsi astrazione dall'aria situata al difuori della sfera che avesse il centro nell'areostato e fosse tangente alla terra.

448. Supponiamo il punto materiale *M* situato sopra il piano *O O'* dell'orizzonte (*Fig.* 153), e in condizione tale da ricever luce da tutte le molecole d'aria situate al di sopra di questo piano.

Si può, senza commettere errore apprezzabile, considerare la massa d'aria rischiarante come una sfera avente per centro il punto *M* e per raggio l'altezza dell'atmosfera; e mentre immaginiamo che le molecole dell'aria si trovino distribuite su tante sfere concentriche di centro *M*, possiamo anche supporre che il raggio solare *R* condotto per questo punto sia nel piano verticale della figura. Allora pei principi svolti precedentemente avverrà che per ciascuna superficie sferica di molecole i raggi di più grande intensità saranno rinviati dal lato del sole secondo la linea *R*, e dal lato opposto nella direzione della retta *O' M*, intersezione dell'orizzonte col piano verticale condotto pel raggio solare *R*. Talchè avvertendo soltanto al caso in cui gli effetti parziali di queste superficie si sommino, si vede che secondo le due notate direzioni dominerà principalmente la chiarezza atmosferica.

Ma è importante l'osservare che le molecole d'aria rinviandosi scambievolmente la luce le une colle altre, si prestano un mutuo soccorso per illuminare il punto *M*; talmentechè la intensità della luce ricevuta in una direzione data non dipende solamente dalla intensità dei raggi provenienti

dalle molecole d'aria situate in quella direzione, sì bene essa dipende eziandio dalla massa più o meno grande d'aria da cui la direzione medesima è circondata. Per lo che se la luce aerea che arriva al punto *M* fosse nella medesima quantità in tutte le direzioni, la linea di più grande chiarezza atmosferica sarebbe evidentemente la verticale *P M* che passa pel centro *M* della massa d'aria situata al disopra del piano dell'orizzonte *O O'*; dunque se vuolsi tener conto ad un tempo e dell'effetto della massa e della intensità dovuta alla riflessione molecolare, si troverà che le direzioni dei più grandi effetti di chiarezza aerea devono essere rollocate fra il raggio *R* e la verticale *P M* da una parte, e dall'altra parte fra *P M* ed *O' M*.

419 Giova però osservare che dal lato del sole, ed allorchè questo astro è elevato più di 20 gradi al disopra dell'orizzonte, la massa d'aria *R M O* (*Fig* 153) è considerevole, e il soccorso che essa presta alla luce diretta secondo il raggio *R* è presso a poco lo stesso di quello che questa luce riceve dalla massa *R M O'*; essendo evidentemente debolissimo il soccorso delle parti di quest'ultima massa che sono situate verso il punto *O'*. Talchè si vede che dal lato del sole, la più grande chiarezza atmosferica viene quasi sempre nella direzione del raggio luminoso.

Dal lato opposto al sole, il raggio *O' M* non ha al di sotto del piano *O O'* che la piccola quantità d'aria compresa fra questo piano e la terra; onde la influenza della massa d'aria che circonda il punto *M* al di sopra del medesimo piano si fa sensibilissima, e quindi è causa che la direzione della più gran chiarezza sia una linea *N M* situata fra le rette *P M* ed *O' M*, ed assai divergente da questa ultima.

420 Al seguito di queste considerazioni è evidente che un punto (*M, M'*) del globo terrestre (*Fig.* 152) riceverà dall'atmosfera, secondo le direzioni degli elementi d'un cono retto verticale, dei raggi di luce che presenteranno, come nel caso d'una semplice circonferenza d'aria (N.° 415), due massimi situati nel piano verticale condotto pel raggio solare, e due minimi situati simmetricamente per rapporto a questo piano.

Le esperienze di Bouguer, che si trovano registrate nel suo Trattato d'Ottica, concordano con questo resultato: im-

perocchè egli ha trovato due massimi secondo le direzioni (a M, a' M'), (e M, e' M') e due minimi secondo linee poco lontane dal piano verticale c M o.

Sarebbe di molto interesse conoscere precisamente la posizione di queste linee, che Bouguer crede a 110 o 120 gradi dal sole; ma senza molto allontanarsi dal vero si possono ritenere esattamente comprese nel piano c M o perpendicolare alla proiezione orizzontale R del raggio luminoso; lo che è anche comodo per le applicazioni.

421. Per determinare gli effetti della luce atmosferica, bisognerà dunque considerare:

1.° la direzione del raggio solare,

2.° la luce rinviata dall'aria sotto angoli di un retto al più col raggio solare; luce che ha il suo massimo nella direzione di questo raggio e di cui gli effetti sono rimarchevolissimi, avendo l'osservazione mostrato che a ciel sereno e col sole a 25 gradi sull'orizzonte, la luce presa a 3 o 4 gradi da questo astro è quattro volte più intensa di quella a 31 o 32 gradi.

3.° la luce rinviata dall'aria sotto angoli maggiori di un retto, e particolarmente in una certa direzione N M (*Fig.* 153) situata nel piano verticale condotto pel raggio solare; direzione secondo la quale questa luce ha il suo massimo d'intensità, e che è più o meno inclinata secondo l'altezza del sole e secondo la elevazione del corpo illuminato.

A questa ultima direzione N M è stato dato il nome di *raggio atmosferico principale*.

La luce aerea agisce sulle parti della superficie dei corpi che si trovano nell'ombra pura secondo questo raggio, importa quindi fissare almeno in un modo generale la sua inclinazione sull'orizzonte per giungere a determinare con una giusta approssimazione gli effetti dovuti alla presenza dell'aria.

422. Nelle applicazioni si può ritenere che l'effetto della luce proveniente dalla massa d'aria che circonda un punto materiale dal lato del raggio solare non si faccia sensibile per far variare la direzione di questo raggio, e che per conseguenza sia sufficiente tutto ciò che abbiamo detto nei Capi precedenti rispetto alle parti illuminate dei corpi, astrazione fatta dalla presenza dell'aria. Laonde a completare i principi ne-

cessari a conoscersi per l'acquerello rimane a considerarsi l'effetto della luce proveniente dall'aria che circonda il punto dalla parte opposta al sole, effetto che si produce massimamente nella direzione del raggio principale atmosferico.

La direzione e la intensità di questo raggio variano necessariamente colla posizione del punto che si considera, poichè esso non potrà ricevere luce aerea che dalla porzione dell'atmosfera la quale rimane al di sopra del piano tangente corrispondente. Determinare esattamente questa direzione e questa intensità per ciascheduno punto di un corpo dato, oltre ad essere cosa difficilissima, riesce poi una ricerca per lo meno superflua pel nostro oggetto: imperocchè un corpo, comunque grandissimo, può considerarsi siccome un punto per rapporto all'effetto generale dell'atmosfera. Quindi se noi ci limiteremo ad esaminare le inclinazioni che prenderà il raggio principale *N M* (*Fig.* 153) per rapporto a quelle del raggio solare *R*, nel caso in cui il punto *M* si trovi nel piano *O O'* dell'orizzonte, i resultati che otterremo saranno applicabili a tutti i corpi che toccano la superficie della terra.

423. Supponiamo in primo luogo che il raggio *R* sia orizzontale, siccome avviene al levare e al tramontare del sole. È evidente che i raggi rinviati dalle molecole situate nel prolungamento *M O'* del raggio solare avranno il massimo d'intensità, poichè sono direttamente opposti a questo raggio; quindi l'effetto della luce proveniente dalle porzioni dell'aria vicine ad *M O'* sarà il più grande possibile, e per conseguenza l'angolo *N M O'* fatto dal raggio principale coll'orizzonte sarà più piccolo che in qualunque altro caso. Esso è stato fissato ad una ventina di gradi.

424. In secondo luogo supponiamo che il raggio luminoso *R* sia inclinato di 45 gradi. I raggi rinviati dalle molecole situate nella direzione orizzontale *O' M* avranno sempre il massimo d'intensità; ma saranno però meno intensi che nel caso precedente perchè non resultano direttamente opposti al raggio luminoso. Da ciò resulta che essi avranno minore influenza per attirare nella loro direzione la linea *N M* della maggior chiarezza atmosferica; e quindi l'angolo *N M R* sarà più grande che nel caso in cui il raggio solare era orizzontale. È stato questo angolo valutato, senza errore sensibile, a

45 gradi: onde il raggio luminoso R e il raggio atmosferico $N M$ saranno perpendicolari fra loro

425. Supponiamo infine che il raggio solare abbia una direzione presso a poco verticale, siccome ha luogo talvolta fra i tropici. I raggi molecolari $O' M$ avranno una forza anche minore di quella che potevano esercitare nei casi precedenti per diminuire l'angolo $N M O'$. In questo caso l'angolo fatto dal raggio atmosferico coll'orizzonte è stato valutato a 60 gradi.

426. Questi resultati sono sufficienti per la pratica, a tutto ciò che può obiettarsi alla teoria che li somministra, può ridursi al più alla supposta forma sferica delle molecole dell'aria. Ma è agevole ribattere una simile obiezione: imperocchè se le molecole aeree avessero la forma di poliedri regolari piuttosto che sferica, sussisterebbero del paro i ragionamenti già fatti e quindi giungerebbesi alle medesime conseguenze; se poi si volesse ritenere che esse avessero una forma irregolare qualunque, i venti e le altre forze che possono sollecitarle darebbero loro una direzione comune secondo quella del vento e variabile per rapporto alla direzione della luce: talchè da un'istante all'altro variando la direzione del vento tutti i corpi verrebbero ad essere illuminati in due modi differenti, lo che è contrario ai resultati dell'osservazione.

427. Stabilita per ogni caso la direzione del raggio atmosferico principale, si dovrà operare rispetto a questo come pel raggio solare onde ottenere i punti e le linee di maggior chiarezza nelle parti ombrate dei corpi.

Così il principio del N.° 403 applicato a questo raggio può tradursi nel seguente:

La intensità delle ombre decresce col crescere del seno dell'angolo d'incidenza che il raggio principale fa col piano tangente al punto corrispondente.

Talmentechè i punti più chiari dell'ombra sono quelli pei quali il piano tangente è perpendicolare al raggio principale: ed i punti meno illuminati da questo raggio sono quelli pei quali il piano tangente è ad esso parallelo.

428. Le ombre provenienti dalle ineguaglianze della superficie dei corpi possono, siccome si è detto al N.° 405 per le parti illuminate, diminuire gli effetti della luce aerea su quelle ombrate. E questa diminuzione si farà tanto più grande

pei punti vicini alla linea di separazione d'ombra e di luce per le quali il piano tangente è sempre parallelo al raggio solare.

429. Anche la maggiore o minor distanza dall'occhio delle superficie ombrate è causa di modificazione della luce aerea che le rischiara. Perchè quanto più grande sarà questa distanza, e altrettanto maggiore resulterà la massa d'aria interposta fra la superficie in questione e l'occhio; quindi maggiore sarà pure la quantità di luce che le molecole dell'aria potranno rinviare sopra di essa.

430. Da queste considerazioni emergono i principi generali seguenti applicabili all'acquerello delle parti ombrate nelle proiezioni dei corpi.

1.° *Allorchè una superficie nell'ombra è parallela al piano di proiezione o al piano del quadro, dee ricevere una tinta uniformemente carica su tutta la sua estensione.*

Tutti i suoi punti infatti si troveranno ad egual distanza dall'occhio, come su tutti è costante la inclinazione del raggio atmosferico principale (N.i 427 e 429).

2.° *Di due superficie parallele nell'ombra, quella che è più vicina all'occhio dee essere indicata da una tinta più carica.*

Ciò è conforme a quanto si è detto al N.° 429.

3.° *Se una superficie nell'ombra è inclinata al piano di proiezione o a quello del quadro la tinta che serve a rappresentarla deve gradatamente diminuire d'intensità pei punti che sono più lontani dall'occhio.*

Ed anco in questo caso, come lo abbiamo avvertito pel principio 3.° del N.° 406, la degradazione della tinta deve esser fatta con molta diligenza, affinchè si produca sull'occhio la sensazione della vera forma e della inclinazione della superficie.

4.° *Se due superficie, disegualmente inclinate per rapporto alla luce, ricevono ombra da un corpo qualunque, la tinta che rappresenta quest'ombra deve essere più carica su quella che riceve l'ombra più direttamente.*

È questo il principio giustamente opposto a quello del N.° 403. Imperocchè se la opacità del corpo interposto fra il cammino della luce solare e la superficie in questione non

precludesse la via alla luce medesima, quella superficie o la proiezione di essa che riceve l'ombra sarebbe incontrata da un numero di raggi luminosi maggiore di quello dei raggi che a tutte case eguali, incontrerebbero l'altra superficie. È quindi naturale che la dimiouzione di luce sulla prima si faccia maggiore che su quest'ultima.

431. Resta ora a parlarsi dei riflessi degli altri corpi che si trovano in presenza del corpo considerato, come di quelli che sono dovuti alle parti illuminate del corpo medesimo. La luce che da essi proviene è, come la luce aerea, il resultato della disseminazione; non di meno bisogna ben distinguerla da questa ultima

L'atmosfera è un corpo così vasto che non si può paragonare per il volume ad alcun corpo terrestre; i suoi riflessi sottoposti a delle leggi generali si legano agli effetti della luce diretta e li accompagnano di una maniera sì costante da far credere che non abbiano una causa particolare: mentre i riflessi dei corpi terrestri dovuti alle pareti che li rinviano, essendo quasi sempre isolati, mostrano in qualche modo la causa accidentale che li produce.

432. In grazia della luce rinviata dalle superficie riflettenti dei corpi vengono necessariamente a modificarsi le tinte di cui si hanno a ricoprire le parti di un corpo che vuolsi rappresentare col disegno Quindi bisognerà aver riguardo alla direzione dei raggi così rinviati e alla loro intensità.

La direzione può ritenersi sempre determinata dalla nota legge dell'eguaglianza dell'angolo d'incidenza con quello di riflessione.

Il grado maggiore d'intensità poi dipende da diverse cause

1.° Dalla intensità della luce diretta;

2.° Dalla grandezza dell'angolo d'incidenza (N.° 403);

3.° Dal pulimento delle superficie riflettenti;

4.° Dal colore più o meno bianco e più o meno brillante delle superficie medesime, essendo, come è noto, l'assorbimento della luce diretta tanto minore quanto più bianchi e brillanti sono i corpi che la ricevono;

5.° Infine dalla prossimità del corpo riflettente e del corpo che riceva il riflesso, poichè la luce si altera traversando l'aria non tanto per la divergenza dei raggi lumi-

nosi, quanto ancora per la opacità del mezzo che essi percorrono.

433. A tutte queste considerazioni poi, delle quali deve tener conto il disegnatore per giovarsi della luce riflessa a conseguire il migliore effetto possibile dalla sua opera, sono da aggiungersi le altre che abbiamo fatto rispetto al grado di chiarezza che acquistano per la presenza della luce in generale le diverse parti di un corpo secondo l'angolo più o meno grande sotto il quale esse presentansi al raggio incidente, non che per l'angolo che il raggio medesimo fa col raggio visuale. Negli esempi che seguono noi abbiamo procurato di riassumere, applicandoli, i principi fin qui esposti.

434. I. Abbiasi un cilindro retto ($A\ B\ C\ D$, $A'\ C''$) (*Fig.* 154), posato con una delle sue basi sulla superficie della terra che sceglieremo per coordinato orizzontale. Prenderemo il coordinato verticale parallelo al raggio luminoso (R, R'), e supporremo questo inclinato di 45 gradi coll'orizzonte; allora il raggio atmosferico sarà diretto secondo la linea (P, P') perpendicolare ad (R, R') (N.° 424).

Ciò posto, è evidente che le linee di separazione d'ombra e di luce (B, $B'\ B''$), (D, $B'\ B''$), relative al raggio (R, R'), saranno pure linee di separazione d'ombra e di luce rispetto al raggio principale (P, P'): onde si vede che le faccette opache situate su quelle linee, non ricevendo i raggi più vivi che sotto un angolo nullo saranno necessariamente le più oscure del cilindro dato. Le faccette situate lungo le linee (A, $A'\ A''$), (C, $C'\ C''$) ricevono al contrario, l'una i raggi solari, l'altra i raggi atmosferici principali sotto angoli più prossimi ad un retto che gli angoli analoghi delle altre faccette del cilindro, esse dunque saranno più illuminate delle porzioni respettive $B\ A\ D$, $B\ C\ D$ del corpo opaco dato. E siccome la luce ricevuta da una faccetta aumenta a misura che l'angolo di questa faccetta col raggio luminoso si avvicina a 90 gradi, egli è manifesto che la chiarezza andrà decrescendo insensibilmente dall'elemento A agli elementi B e D. Da un altro lato la luce aerea diretta altrimenti che secondo il raggio principale (P, P') illuminerà ciascuno elemento del cilindro di meno in meno a misura che questo elemento si allontana da (C, $C'\ C''$) e da (A, $A'\ A''$); dal che potremo inferirne che le variazioni di

tinto, lasciando l'elemento *C* saranno minori che lasciando l'elemento *A*.

Considerando ora i riflessi della superficie *X Y* del suolo, si vede;

1.° Che essi saranno i più intensi possibili sull'elemento (*A*, *A'*), e in seguito sugli elementi i meno lontani da *A*.

2.° Che essi avranno maggiore intensità sulle parti inferiori del cilindro che sulle superiori; perchè la luce traverserà piccola massa d'aria per andare dalla superficie riflettente al basso della superficie *B A D*, e perchè le parti inferiori di questa superficie non riceveranno solamente i raggi solari rinviati dal suolo, ma sibbene ancora una debole quantità di luce dall'alto del cilindro, la quale è riflessa una prima volta da *B A D* sul suolo ed una seconda volta dal suolo sopra *B A D*.

Questi riflessi del piano *X Y* non modificheranno la chiarezza esistente sulla superficie *B C D* situata nell'ombra; perchè la parte del suolo vicina si troverà nell'ombra portata dal cilindro, ombra che rinvierà della luce aerea troppo debole per produrre riflessi sensibili.

435. *Osservazione.* — Se il cilindro dato avesse un'altezza considerevole, come nel caso d'una torre, l'elemento (*C*, *C' C''*) non sarà uniformemente illuminato; in quanto che il raggio atmosferico principale corrispondente al punto *C''* approssimandosi ad essere più direttamente opposto ad (*R*, *R'*) del raggio atmosferico principale corrispondente al punto *C'*, la chiarezza dei punti dell'elemento (*C*, *C' C''*) dovrà aumentare a misura che sono più elevati. Ed anche questo accrescimento di chiarezza da *C'* in *C''* sarà reso un poco più sensibile dai riflessi delle parti del suolo situati al di là dell'ombra portata dal cilindro

436 II. Sia dato un muro *A B C D* fabbricato sopra un suolo orizzontale *X Y* (*Fig.* 155).

Sia *R C* la proiezione del raggio solare, che, non facendo astrazione dalla grandezza del sole, fa il più grande angolo coll'orizzonte; il raggio atmosferico principale avrà per proiezione una retta *P D* tale che l'angolo di *R C* con *P D* sia la proiezione d'un angolo compreso fra i limiti di 30 e di 160 dati dai principi stabiliti ai N.i 423 e 425

Ciò posto, la costola proiettata in *C* avendo per ombra portata la retta proiettata in c, si vede che l'ombra portata dal muro sul piano *X Y* avrà la larghezza *B c*. Questa ombra non riceverà alcun raggio solare, ma essa sarà illuminata dalla atmosfera, e la chiarezza che riceverà, aumenterà dal piede *B* del muro al bordo c dell'ombra. Poichè, se immaginiamo prolungata la faccia *C B* del muro si vede che la costola *B* non può essere illuminata che dalla porzione dell'atmosfera compresa entro l'angolo *x B y*; mentre per ogni oltra linea *y* parallela a quella costola, e che può intendersi determinata dal piano *x' y*, si scorge che la massa d'aria corrispondente e capace di illuminarla è compresa entro l'angolo *x' y Y* maggiore del precedente

Ora tutti gli angoli *x' y Y* aumentano da *B* fino a *c*, quindi l'ombra compresa fra *B* e *c* deve diminuire d'intensità a misura che dal piede del muro ci si avvicina al limite c dell'ombra portata.

Se vogliamo determinare la penombra che circonda l'ombra *B c*, si condurrà per *C* una retta *r C* tale da fare col raggio *C R* un'angolo eguale a quello sotto il quale si vede il sole (N.° 340), e il piano *r C s*, che tocca ad un tempo il corpo luminoso e il corpo opaco, taglierà il piano *X Y* secondo una retta proiettata in *s* la quale insieme con l'altra proiettata in c comprenderà la penombra cercata *c s*.

Esiste anche un'ombra *A d* dovuta ai raggi principali atmosferici, e collocata dalla parte opposta a quella resultante dai raggi solari. Ma quest'ombra sarà molto più debole dell'altra *B* c, e si annullerà gradatamente, perchè il raggio *P D* quantunque sia il più intenso di tutti quelli rinviati dall'aria, non illumina sensibilmente più dei suoi vicini. L'ombra *A d* dovrebbe andare aumentando da *d* verso *A*; ma ciò non si avvera a causa dei riflessi della faccia illuminata *A D* del muro. Tali riflessi sono specialmente rimarchevoli da *A* in a presso la costola *A*, da *a* in *b* pareggiano sensibilmente l'effetto progressivo illuminante dell'aria; al di là del punto *b*, questo effetto prendendo su quello della luce riflessa una preponderanza a mano a mano più grande, la intensità dell'ombra andrà diminuendo.

Quanto alle facce *b* c, c *d*, *d* e si vedrà primieramente

che, *A D* ricevendo i riflessi del piano *X A*, la chiarezza diminuisce da *A* in *D* a misura che questi raggi si indeboliscono: in secondo luogo che la faccia *D C*, ricevendo i raggi solari, i raggi atmosferici principali e quelli aerei di tutte le direzioni, sarà necessariamente la parte la più illuminata del corpo dato, salvo la piccola larghezza *A a* del piano *X Y* a cagione del riflesso vivo di *A D*; in terzo luogo finalmente che la faccia *B C*, ricevendo soltanto i raggi atmosferici principali e i raggi aerei compresi nell'angolo *C B Y*, è la più oscura di tutte le altre facce del corpo in questione. Tuttavia, siccome la costola *C* riceve una maggior quantità di luce della costola *B*, la chiarezza della faccia *B C* andrà diminuendo da *C* fino in *B*.

437. Crediamo che questi esempi sieno sufficienti ad indicare al lettore la via da tenersi per valutare in un modo ragionato e non a caso l'azione della luce sui corpi, provenga essa direttamente dal sole, o dalla massa dell'atmosfera, o dai riflessi dei corpi circonvicini. Nondimeno giova notare che l'esame fatto sui medesimi conduce solo a rintracciare gli effetti reali di questa luce, e non quelli che appariscono all'occhio dell'osservatore. Questi ultimi dipendono necessariamente dalla posizione che si suppone avere l'osservatore rispetto al corpo considerato; ma da quanto si è detto nei numeri precedenti è facile scorgere aver essi un tal legame coi primi da riescire impossibile di riprodurli sul disegno senza avere una intiera conoscenza di quelli.

Non abbiamo creduto utile di determinare in un modo rigoroso gli effetti apparenti dei corpi sopra esempi particolari. Poichè ben si comprende, come i resultati possano variare secondo le circostanze particolari della quistione, e d'altra parte ammettendo come generali delle soluzioni che non possono resultare che da alcune ipotesi particolari, ci porremmo nel caso di rimaner privi della più gran parte delle risorse di cui si compone l'arte del disegno.

Per ottenere un resultato sodisfacente bisogna restar padroni di far variare fra i limiti più larghi la direzione e la intensità della luce; bisogna potere, allorchè si giudica conveniente, sostituire alla luce diretta proveniente dal sole quella diffusa inviata in tutte le direzioni dalle molecole dell'atmo-

sfera, deve esser permesso di supporre in prossimità degli oggetti che si disegnano, altri corpi la superficie dei quali rinvii la luce sulle parti ombrate dei primi, che senza di ciò potrebbero resultare troppo oscure o non distaccarsi abbastanza dalle parti contigue.

Lo studio ragionato delle cause che producono tutte queste variazioni di tinte abituerà il lettore a non ammettere giammai che delle ipotesi possibili, ed allora i punti brillanti e le parti illuminate o oscure si troveranno sempre determinate in un modo sodisfacente.

CAPO VI.

Regole dell' acquerello.

438. Le cose fin qui esposte intorno all' argomento del presente Libro schiariscono bastantemente la quistione almeno per lo scopo che fin da principio ci eravamo proposti. Con tutto ciò siam d' avviso non sia per riescire affatto inutile lo esporre brevemente alcune regole generali per l' acquerello dei disegni, l' applicazione delle quali assicura e ad un tempo facilita il conseguimento di un buon resultato.

439. Dicesi *disegno all' acquerello* un disegno eseguito sopra la carta in prospettiva o in proiezione, sul quale dei colori stemperati nell' acqua sono distesi per mezzo d' un pennello. Noi ci limiteremo a parlare del semplice *chiaro-scuro*, ma le generalità che esporremo saranno applicabili in gran parte anche all' acquerello in colori.

Frattanto, siccome in qualunque disegno ci si propone di imitare così bene gli oggetti rappresentati da produrre la maggiore illusione possibile, non sarà di lieve momento il passare prima in rassegna le cause fisiche che producono in noi il sentimento delicatissimo dell' apparenza dei corpi, in grazia della quale giudichiamo sovente della loro forma e della posizione delle parti che li compongono.

440. Le principali di queste cause sono gli effetti della luce bianca, la quale tingendo le faccette della superficie più o meno di color naro, offre modo di giudicare della loro curvatura.

Così sapendo che i punti oscuri di queste superficie appartengono in generale alle linee di separazione d'ombra e di luce, potremo giudicare, dal luogo in cui l'ombra domina, quali sono le posizioni di queste linee, e quindi quali sono i contorni secondo cui i raggi luminosi toccano gli oggetti.

Le ombre portate ci aiutano colla loro degradazione a conoscere la posizioni delle parti che le portano e di quelle che le ricevono; i loro contorni accusano le forme di quelle parti, e le penombre che le terminano danno la idea delle distanze comprese fra una linea di separazione d'ombra e di luce e l'ombra portata corrispondente.

441. Per l'azione dell'aria siccome corpo riflettente, le ombre sono trasparenti, rivestono i corpi senza nasconderli e producono ciò che più propriamente è chiamato dai pittori *chiaro-scuro* Queste ombre divengono come un nuovo fondo sul quale la luce aerea produce delle ombre particolari che danno facilità all'occhio di ben distinguere le diverse parti ombrate.

In oltre poichè l'aria rinvia la luce facendo ufficio di corpo riflettente, ciascuno oggetto pur la rinvia, e tutti i corpi la riflettono gli uni sugli altri per modo da indicare scambievolmente la loro presenza.

Quando la luce riflessa è rinviata da superficie non pulite, i riflessi sono deboli e finiscono insensibilmente; se al contrario essi vengono da superficie pulite allora sono vivi e pronunziati; ciò che ci fa giudicare del pulimento dei corpi.

442. Ma il pulimento delle superficie meglio è indicato dallo splendore più o meno grande dei punti e delle linee brillanti. E come questo pulimento dipende dalla organizzazione molecolare dei corpi, noi giudichiamo frequentemente di questa organizzazione in grazia delle immagini brillanti. Così la vivacità di queste ultime fa distinguere il diamante dal metallo, il metallo dal legno, il legno dalla pietra bruta, la pietra bruta dalla terra ec.

Le immagini brillanti possono servire ancora a farci giu-

dicare della curvatura delle superficie. Supponiamo che una biglia perfettamente nera e pulitissima sia posta sopra una tavola nera in una stanza dello stesso colore illuminata da una finestra. Il contorno della sfera sarà appena visibile; gli effetti reali d'ombra e di luce scompariranno, e la immagine brillante della finestra sarà quasi la sola cosa rimarchevole sulla biglia. Ma questa immagine avrà molta intensità; sarà terminata da un contorno ben marcato corrispondente al quadro della finestra; sarà traversata dalle linee rappresentanti le stecche della vetrata, e la curvatura di questi contorni e di queste linee basterà per indicare la grossezza e la sfericità della biglia.

443. I corpi a superficie non pulita non offrono immagini brillanti; ma le parti di questi corpi ove tali immagini esisterebbero se essi fossero puliti hanno una chiarezza maggiore di quella delle altre parti: ciò che unitamente alla degradazione più o meno pronta della luce attorno di esse offre modo ancora di giudicare della direzione delle faccette più illuminate e della curvatura della superficie a cui le faccette medesime appartengono.

Quello che si è detto delle superficie non pulite può pure applicarsi alle parti di esse che si trovano nell'ombra. Ivi le immagini brillanti dovute ai raggi atmosferici principali hanno pure una certa chiarezza, la quale, come nel caso precedente, ci fa giudicare della curvatura di quelle parti.

444. Le costole resultanti dalla intersezione delle facce dei corpi ci vengono indicate dalla tinta brillante chiara o molto scura della quale si trovano rivestite.

Poichè ciascuna costola, intersezione di due facce illuminate dal sole, potendo considerarsi siccome una superficie d'accordamento delle facce stesse (N.° 356), avrà le sue faccette molecolari più variamente dirette di quelle componenti le superficie piane contigue; per conseguenza i punti brillanti dovuti alla riflessione dei raggi solari si troveranno sopra di essa in maggior numero che sulle facce piane dalle quali resulta. Per rapporto ai raggi aerei, ciascun punto della costola considerata sarà parimente un punto brillante corrispondente ad uno di questi raggi. Onde si vede che essa sarà in generale più illuminata di quello che nol sieno tutti i punti

vicini delle due facce di cui è la intersezione. Sulle costole comuni a due facce situate entrambi nell' ombra agiscono i raggi atmosferici principali; quindi può ripetersi rispetto ad esse lo stesso ragionamento fatto per le costole illuminate direttamente dal sole; e si vedrà che in tutti i loro punti offriranno una chiarezza maggiore di quella che compete ai punti vicini delle facce a cui appartengono.

Le costole infine resultanti dalla intersezione di una faccia illuminata con una faccia in ombra, presenteranno una linea di separazione d'ombra e di luce: e come tali saranno sempre più oscure della faccia ombrata su cui si trovano.

445 Ciò posto immaginiamo un muro *A D*, di lunghezza e di altezza indefinita, munita di un pilastro *B M N C*; e supponendo la materia del muro come quella del pilastro bene omogenea in tutta la estensione, investigbiamo le cause per le quali un occhio situato un poco al di qua del pilastro può accorgersi dell' aggetto del piano *M N* sul piano *A B C D*.

In primo luogo si osserverà che questi due piani avranno lo stesso splendore reale e lo stesso splendore apparente, poichè l'effetto dell'aria, che in grazia del proprio colore, sarebbe quello di tingerli leggermente in bleu è nullo per la piccola distanza a cui abbiam supposto trovarsi l'occhio dell'osservatore. Ma da un lato esisterà l'ombra *C S* portata da *C N*, e questa ombra più vigorosa lunga la costola *N* che altrove (N.° 444) basterà per produrre la sensazione di questa ultima e per indicare l'aggetto *C N*: dall'altro lato si ha l'ombra atmosferica *B R* di *B M* per far distinguere la costola *M*.

Potrebbe però avvenire che il riflesso di *B M* sopra *B A* distruggesse l'effetto di quest'ombra; in allora resterà il brillante della costola *M* dovuto alla circostanza dell'essere questa la intersezione di due facce direttamente illuminate dal sole. Dunque è questo effetto che colpirà in generale la vista, allorchè si esamina da vicino la superficie *A B M N*, e ad esso sarà dovuta la sensazione della costola *M*.

446 Se il corpo *A B M N C D*, invece d'essere formato da una materia omogenea, fosse di marmo macchiato, le linee *M* ed *N* sarebbero benissimo indicate dalle macchie che si arresterebbero bruscamente a queste linee.

Parimente se il pilastro *B M N C* fosse di materia diversa da quella che compone il muro, come sarebbe per esempio, un pezzo di legno applicato contro il paramento *A D*, la differenza dei colori del pilastro e del muro indicherà perfettamente le costole *M* ed *N*.

447. Ma uno dei mezzi i più potenti a farci giudicare delle forme degli oggetti e spesso anche delle loro distanze relative è la prospettiva lineare. Poichè essa coordina tutte le parti dello spettacolo che si offre ai nostri occhi, proporziona le immagini dipinte sulla retina alle grandezze e alle distanze; decide degli oggetti che si vedono e di quelli nascosti: in breve essa determina tutta la disposizione geometrica del quadro.

Così se il corpo *A B M N C D* fosse composto di corsi regolari di pietra, le giunture situate sopra *M N* e quelle che si trovano sopra *A D* non si confonderebbero sopra una medesima linea, e da questo effetto potremmo giudicare meglio che nei casi sopra discorsi della forma *A B M N C D*.

448. Fra le cause che aiutano ad apprezzare le distanze non è da passarsi sotto silenzio la impurità dell'aria dovuta ai corpuscoli estranei in essa sospesi e che ne intorbidano la trasparenza.

Leonardo da Vinci ha osservato per il primo che le parti più elevate degli oggetti si vedono molto meglio di quelle che sono presso al suolo. Ciò deve attribuirsi alla presenza degli indicati corpuscoli, dei quali sono più carichi gli strati inferiori della atmosfera. Nei luoghi molto frequentati in cui la siccità cagiona sempre della polvere, specialmente sulla sera, questo effetto dell'aria è molto sensibile anche a debolissima distanza.

Per gli oggetti poi molto lontani, l'effetto della impurità degli strati bassi dell'aria si trova per la vista vantaggiosamente sostituito da quello del bleu d'azzurro che riveste le loro superficie, e di cui la intensità aumenta con la spessezza dell'aria interposta fra essi e l'occhio.

449. La esperienza che ognuno può acquistare sulla apparenza dei corpi farà giudicare facilmente che fra le cause precedentemente esaminate le ombre in generale e le parti più o meno chiare degli oggetti sono le più importanti a

ben conoscersi nella scienza del Disegno. E se fassi attenzione; 1.° che delle bande di egual larghezza alternativamente bianche e nere si mostrano a noi come se le bande bianche fossero più larghe delle nere, lo che è facile a provarsi misurando con tutta esattezza l'angolo apparente di queste bande con un cerchio ripetitore; 2.° che la opposizione dei colori fa comparire il bianco più vivo presso il nero che altrove, e il nero più intenso presso i bordi delle bande bianche che un poco più lungi da esse, potremo convincerci che le ombre o le parti chiare non hanno in realtà il tono vigoroso che mostrano in apparenza.

450. L'ingrandimento apparente delle parti illuminate degli oggetti è dovuto al fenomeno della *irradiazione*, il quale consiste nella emissione o rinvio d'una viva luce. Così allorchè la luna non ha che pochi giorni, il suo disco è diviso in due parti; l'una illuminata dal sole, l'altra debolmente chiara per la luce che la terra ad essa rinvia. Ora la prima di queste parti per l'effetto della irradiazione sembra appartenere ad un cerchio sensibilmente maggiore di quello della seconda.

Quindi e che i punti brillanti, le immagini brillanti, e tutte le parti dei corpi vivamente illuminati, devono comparire d'una dimensione più grande di quella che realmente hanno.

451. Non solamente però queste parti compariscono più grandi; ma per le opposizioni di cui abbiamo sopra parlato, la prossimità delle ombre, le fa sembrare più chiare, mentre dal loro canto le ombre presentano un tono più carico del vero.

Così quando si riguarda un pilastro *B M N C* (*Fig.* 156), lo splendore della costola *M* forza la oscurità delle parti *M V* e *B R* dei piani *M N* e *B A*; la costola *N*, a cagione del suo vigore come separazione d'ombra e di luce, fa comparire la parte *V N* del piano *M N* più chiara di quello che è, e quindi la tinta apparente di *V M* sembra ancora più scura. I piani *A B* ed *M N*, supposto che rinvino all'occhio la medesima quantità di luce, fanno dunque un effetto differentissimo da quello che avrebbe luogo, se *A B* si trovasse nel prolungamento di *M N*.

Questi resultati sono l'effetto di ciò che in arte chiamasi

contrasto; e si vede che noi possiamo porre in principio che esso fa comparire lo splendore delle parti brillanti più vivo di quello che è; che esso forza la oscurità delle ombre; che rende i colori opposti più distinti, e che infine dona a tutte le cause relative al chiaro e allo scuro una intensità d'azione che senza di esso non avrebbero.

Ciò premesso, ecco quali sono i dettagli delle regole da seguirsi per fare un buon disegno all'acquerello.

452 Regola I. *Immagine brillante principale.*

Si costruiranno tutte le immagini brillanti; di poi si cercherà quella che per la intensità del raggio incidente, pel pulimento e per la curvatura della superficie dovrà presentare il massimo splendore. Questa immagine sarà ordinariamente la parte più chiara del disegno, e si darà ad essa il bianco stesso della carta.

453. Regola II. *Ombra principale.*

La linea di separazione d'ombra e di luce che dalle superficie vicine e dall'aria riceverà la minor quantità di luce riflessa, limiterà dal lato del corpo illuminante la tinta d'ombra più scura. Il grado d'intensità di questa tinta dovrà essere tanto più forte quanto maggiore sarà il numero di tinte intermediarie da intercalarsi fra essa e il bianco della carta; tuttavia dovremo procurare che non perda mai quella specie di trasparenza che è propria del chiaro-scuro.

454. Regola III. *Immagini brillanti secondarie.*

A misura che la ragione della poca intensità del raggio incidente, dell'imperfetto pulimento e della piccola curvatura della superficie brillante, le immagini di cui è questione dovranno avere minore splendore, le si copriranno di una tinta leggera più o meno forte, che le ponga in armonia con la immagine brillante e l'ombra principale.

455. Regola IV. *Ombre secondarie.*

A seconda della maggiore o minore quantità di luce riflessa che le ombre riceveranno dall'aria e dai corpi circostanti, esse dovranno essere più o meno intense; e le tinte da cui sono indicate dovranno approssimarsi più o meno al vigore dell'ombra principale.

456. Regola V. *Parti chiare delle superficie non pulite.*

Quantunque gli oggetti che non sono terminati da superficie

pulite non abbiano immagini che possano a rigore chiamarsi brillanti, pure siccome presentano in generale delle parti che riuniscono le condizioni del più grande splendore, si dovrà dare anche a queste parti il bianco della carta.

457 Regola VI. *Degradazione della luce dovuta alla curvatura dei corpi.*

Se una superficie è pulita, le sue immagini brillanti avranno dei limiti bene espressi per mezzo di piccole tinte fra le quali dovranno esser comprese

Sulle superficie non pulite, le tinte che circondano le parti chiare si fonderanno dolcemente con le ombre.

La degradazione poi della luce dovrà rendere fino a un certo punto la natura pulita, granellosa, vellutata o liscia delle superficie.

458. Regola VII. *Brillante delle costole illuminate.*

Tutte le costole illuminate saranno espresse da linee chiare circondate da una mezza tinta, la quale aumenterà il loro splendore, e dovrà essere un poco più forte presso di esse che altrove, affinchè l'effetto prodotto dal contrasto, effetto che deve aver luogo sulla imitazione siccome ha luogo sul modello, resulti alquanto esagerato

Allorchè queste costole hanno delle immagini brillanti, una di esse potrà essere la immagine brillante principale.

459. Regola VIII. *Degradazione delle tinte situate presso le linee di separazione d'ombra e di luce.*

Presso le separazioni d'ombra e di luce le ombre devono essere degradate d'intensità a seconda della curvatura della superficie, tanto andando verso le parti illuminate quanto dal lato opposto.

Tale degradazione però deve essere meno rapida verso quest'ultimo lato.

460. Regola IX. *Ombra portate.*

In generale queste ombre diminuiranno d'intensità a misura che dal loro contorno ci si approssimerà al corpo che le produce.

Se più piani paralleli ricevono l'ombra d'un medesimo corpo, si avrà ben cura di indebolire la tinta di questa ombra di mano in mano che essa si troverà sopra dei piani più lontani da questo corpo.

461 Regola X. *Penombre.*

I contorni delle ombre portate non dovranno essere, come suol dirsi *duri*, salvo il caso in cui la penombra sia quasi nulla: a misura che questa aumenterà, i bordi dell'ombra dovranno essere meno duri.

Presso le linee di separazione d'ombra e di luce la penombra sarà sempre poco sensibile. Più essa sarà grande o minore intensità dovrà avere l'ombra contigua a queste separazioni.

462. Regola XI. *Costole di separazione d'ombra e di luce.*

Queste costole dovranno sempre essere distinte con una sottile linea molto scura.

463. Regola XII. *Punti brillanti dovuti ai riflessi dell'aria.*

Questi punti saranno costruiti per mezzo del raggio atmosferico principale; il loro splendore sarà debole e nascerà sempre gradualmente a partire dall'ombra.

464. Regola XIII. *Ombre atmosferiche.*

Le ombre atmosferiche saranno distinte da tinte leggeri che finiranno insensibilmente. Queste tinte produrranno qualche volta il loro effetto quantunque sieno quasi invisibili.

465. Regola XIV. *Costole nell'ombra.*

Queste costole saranno indicate da una linea chiara. Se avranno qualche punto brillante dovuto al raggio atmosferico principale, la loro chiarezza in questo punto dovrà essere più sensibile.

466. Regola XV. *Riflessi.*

I riflessi che i corpi si inviano reciprocamente dovranno essere tanto più intensi quanto più viva è la luce ricevuta dalla superficie riflettente, quanto più questa superficie è pulita, a meglio fa convergere in grazia della sua forma la luce riflessa.

La parte più viva dei riflessi è quella a cui corrisponde l'eguaglianza dell'angolo d'incidenza con quello di riflessione.

467. Regola XVI. *Diminuzione di chiarezza dovuta alla opacità degli strati inferiori dell'aria.*

I corpuscoli sospesi nell'aria diminuiscono la trasparenza di essa; quindi gli oggetti più vicini al suolo e più lontani

da noi devono presentare delle parti chiare di più in più scure, e delle ombre di meno in meno intense.

468. Regola XVII. *Prospettiva.*

Da quanto abbiamo detto al N.° 447 può dedursi essere la prospettiva una delle cause più energiche della visibilità; quindi la necessità che essa resulti accuratissima. Per gli oggetti suscettibili d'una definizione rigorosa, deesi costruirla esattamente; per gli altri, come gli animali, gli alberi, le rocce, ec. deve esser fatta co' mezzi che si acquistano disegnando dalla natura.

Allorchè la prospettiva d'un disegno è buona, non si ha bisogno nè di dare alle ombre un gran vigore che nuocerebbe alla loro trasparenza, nè di forzare sensibilmente gli effetti del contrasto e della irradiazione (N.° 450).

469. Regola XVIII. *Proiezioni.*

Le proiezioni non sono altra cosa che prospettive per le quali il punto di vista è all'infinito; talmente che a tutto rigore esse non possano fare un effetto sodisfacente se l'osservatore non si allontana fino all'infinito per esaminarla. Deriva quindi da ciò che una proiezione, generalmente parlando, non potrà mai fare illusione.

Per ovviare a tale inconveniente bisogna nell'acquerello delle proiezioni forzare tutte le tinte. Tuttavia allorchè l'oggetto è compreso quasi interamente in un medesimo piano, la prospettiva e la proiezione di esso offrono deboli differenze, e in questo caso si debbono poco esagerare gli effetti che producono la visibilità. Questo caso è evidentemente quello, nel quale le proiezioni presentano il minor numero d'inconvenienti.

470. Tali sono le regole principali che possono prescriversi per l'applicazione dell'acquerello a chiaro scuro ai disegni.

Siamo ben lungi dal credere che esse sieno sufficienti per formare da per loro un buon disegnatore. Nondimeno aiuteranno il lettore nello studio di ciò che accade in natura; l'esercizio poi e l'assistenza di un buon Maestro faranno il resto.

Digitized by Google

LIBRO QUARTO.

TAGLIO DELLE PIETRE

CAPO I.

Nozioni generali.

471. È una opera in *pietra da taglio* qualunque massa composta esclusivamente di pietre che sono state tagliate a scalpello in forme determinate e tali da potere essere sovrapposte le une alle altre con un certo ordine, e sostenersi scambievolmente senza bisogno di alcuno intrinseco legame, mentre formano un sol tutto solido e resistente di forma e dimensioni precedentemente stabilite.

472. Gli antichi, e in special modo i Romani, sonosi distinti in questo genere di costruzioni, gli avanzi delle quali ci attestano la sommo diligenza con che eseguivano il taglio della pietre. Essi non adoperavano ordinariamente cemento di sorta; al più cercavano di aumentare quel collegamento che proviene nelle pietre dalla precisione del contatto e più dalla particolare disposizione delle parti, per mezzo di opportuni incastri analoghi a quelli coi quali potrebbero collegarsi fra loro i diversi pezzi di un solido di legname, ovvero per mezzo di grappe o arpesi di ferro e più comunemente di maschi di ferro o di legno duro introdotti nello interno delle pietre fra le facce di contatto.

473. Ai tempi nostri in cui, per l'eccessivo valore al quale è salita la mano d'opera, la economia delle costruzioni ha fatto grandi progressi, non si erigono più di questi grandiosi monumenti.

Accoppiando però con savio accorgimento i materiali di diversa natura in una medesima fabbrica siam pervenuti ad ottenere la eleganza e la maestà ad un tempo negli edifizi senza perdere nulla della necessaria stabilità.

474. Ordinariamente le pietre tagliate di cui si fa uso nella moderna architettura servono a decorare l'esterno delle fabbriche. Salvo qualche caso particolare di difficile soluzione, ben di rado si vedono sorgere oggi monumenti di qualche importanza che sieno interamente in pietra da taglio. L'ultima di queste opere che io mi sappia costruita in Italia è l'ardito e rinomato Ponte sulla Dora Riparia presso Torino costruito nel 1827 dal valentissimo Ingegnere Capitano C. Mosca. Questo ponte ha un solo arco di 45 metri di luce sopra 5,50 metri di saetta.

Tuttavia in questo ultimo genere di costruzioni di acque e strade, e più nei lavori che possono occorrere per le vie ferrate, ove l'elegante e il leggero devono cedere il posto al grave e al maestoso, può frequentemente presentarsi il caso di dover costruire in pietra da taglio.

475. Allorchè le pietre sono adoperate per uso di decorazione, e qui non intendo parlare delle cornici, colonne ec. non fanno in generale ufficio di resistenza. Esse trovansi come incrostate nella massa murale componente la fabbrica, e in questo caso non è necessario che le superficie di contatto sieno tagliate a perfezione; basta solo che il contatto abbia luogo con precisione lungo gli spigoli esterni delle diverse pietre, acciocchè l'opera non produca sull'occhio la disaggradevole impressione della discontinuità delle linee.

Ma quando l'opera è interamente in pietra da taglio, e deve per conseguenza formare un sistema ben resistente, bisogna che le diverse parti di cui si compone e che si appoggiano le une contro le altre coincidano il più possibile fra loro. Fa d'uopo pure che tutte le superficie possano facilmente concepirsi ed eseguirsi, e che due superficie le quali debbono coincidere nell'opera possano essere fatte bene identiche. Onde si

vede che nel Taglio delle Pietre non si debbono impiegare che delle superficie di rigorosa definizione.

476. Ciò premesso possiamo dire che la Scienza del Taglio delle Pietre riposa sulla risoluzione de' tre seguenti Problemi.

1.° *Trovare il modo di divisione più vantaggioso per repartire l'opera in parti, di cui ciascuna possa tagliarsi da un solo masso, e che sovrapponendosi tutte esattamente vengano a costituire la intera costruzione nelle forme e dimensioni già stabilite.*

Questa prima operazione che si esprime in breve dicendo: *tracciare l'apparecchio dell'opera*, trae le sue regole dalle condizioni della solidità, della economia e bellezza del lavoro.

2.° *Determinare i contorni e le dimensioni di tutte le facce di ciascheduna pietra, i cui limiti sono sempre le intersezioni di superficie note.*

3.° *Trovare i mezzi geometrici i più propri alla pronta e buona riduzione dei massi.*

Queste due ultime operazioni sono affatto del dominio della Geometria Descrittiva, le cui risorse contribuiscono potentemente ad assicurare tutta la possibile esattezza nella esecuzione delle opere in pietra da Taglio.

Prima però di entrare in materia giova esporre alcune generalità che si riferiscono alla soluzione degli enunciati problemi, e costituiscono principi indeclinabili per ciascun caso speciale di pratica.

477. Tutti i pezzi d'un'opera murale qualunque, essendo animati dalla forza di gravità, si deve cercare di disporli per modo che a ciascuna altezza l'affetto che tende a produrre il peso delle masse superiori sia distrutto dalla resistenza delle masse inferiori.

Perciò bisogna primieramente, che l'opera sia stabilita sopra un suolo ben resistente, e che sia stato ricoperto questo suolo d'un massiccio di fondazione sufficientemente esteso e sufficientemente grosso perchè non provi alcuno avvallamento; in secondo luogo poi è necessario che a qualunque altezza dell'opera non possa aver luogo fra le pietre alcun effetto di strisciamento delle une sulle altre.

Ora siccome la forza di gravità agisce in direzione verticale, si vede subito che quest'ultimo effetto sarà distrutto

quando tutte le pietre sieno disposte, se altre condizioni non vi si oppongono, per strati appoggiati sul suolo gli uni sugli altri secondo dei piani orizzontali.

478. Possiamo quindi inferirne il seguente principio:

I. Nel determinare l'apparecchio d'un opera murale devesi procurare tal disposizione alle diverse parti da distruggere l'azione della gravità colla resistenza delle masse sottoposte, e da impedire che per la medesima azione nessuno dei pezzi costituenti l'opera concepisca un moto progressivo o di strisciamento sul pezzo che sta in contatto con esso.

479. La esperienza ha provato che allorchè le due facce d'una medesima pietra fanno un angolo acuto, bisogna non solamente aver molta cura nel taglio per non fare scheggiare le pietre presso le costole dell'angolo, ma che poi non si giunge neppure ad una esecuzione sodisfacente, salvo il caso in cui l'angolo superi 50 o 60 gradi per le pietre di media consistenza.

Havvi anche un'altra ragione che concorre a proscrivere il taglio secondo angoli acuti.

Supponiamo difatti che due pietre consecutive abbiano due facce in contatto, delle quali una corrisponda all'angolo acuto d'una delle pietre, e l'altra corrisponda ad un angolo ottuso dell'altra pietra; se le costole de' due angoli coincidono fra loro e se contro la loro faccia comune agisce parte della pressione sopportata dalla massa murale, egli è evidente che l'angolo ottuso presenterà una resistenza maggiore di quello acuto; e siccome essi agiscono l'uno sull'altro e per conseguenza devono resistere ad un medesimo sforzo, ne consegue che la pietra avente l'angolo acuto sarà la prima a deperire: conviene perciò che gli angoli delle due pietre sieno possibilmente eguali fra loro.

Questa condizione è sodisfatta allorchè le facce di contatto delle due pietre sono normali alla superficie costituita dalle due facce adiacenti dei notati due angoli; ed è tanto più necessario che si verifichi nel caso in cui la superficie medesima sia esterna e ben visibile; poichè dopo l'esecuzione dell'opera essa non deve presentare alcun difetto, e non deesi neppur temere che la pietra col tempo si scheggi presso la

costola in quistione, siccome avverrebbe se la repartizione della resistenza lungo questa costola fosse difettosa.

480. Si chiamano *superficie* o *facce di giuntura* quelle delle pietre che in opera stanno in contatto, e *spigoli di giuntura* le costole coincidenti de' loro angoli. Le facce poi contro le quali si trovano più specialmente dirette le pressioni si distinguono col nome particolare di *letti*.

481. Dal fin qui detto si può ricavare frattanto questo secondo principio relativo all' apparecchio delle opere in pietra da taglio:

II. Nelle forme da darsi alle pietre si deve evitare l' impiego degli angoli acuti. Perciò tracciando l' apparecchio d' un' opera qualunque bisogna procurare che le facce di giuntura resultino normali alle superficie esteriori che sono da quelle facce intersecate.

482. Consegue da questo principio che ogni qualvolta un' opera è composta di strati di pietra orizzontali, le giunture che separano le pietre d' un medesimo strato debbono resultare verticali.

Questa sola condizione se è sufficiente ad assicurare una equabile resistenza in tutte la pietre, non è però tale da garantire la stabilità di un' opera così fatta. Supponiamo che le giunture verticali di uno degli strati inferiori si trovino sopra o molto prossime al prolungamento delle giunture degli altri strati superiori: è chiaro che l' opera tenderà a dividersi in parti, e questa divisione avverrà al più piccolo cedimento ineguale del suolo destinato a sostenere l' opera intera. Bisogna dunque che le giunture verticali di ciascuno strato, cominciando dal secondo in basso e procedendo verso l' alto, corrispondano se non al giusto mezzo delle pietre componenti i due strati fra i quali è compreso, almeno a delle parti medie di queste pietre.

In tal modo il sistema resulta ben collegato, e il pericolo sopra enunciato si trova affatto remosso.

483. La stabilità d' ogni opera in pietra richiede ancora che i più grandi sforzi del sistema sieno diretti sulle masse le più grandi. Là dove sono piccole masse vi ha difetto di resistenza, e allorche quegli sforzi si trovano diretti sopra queste ultime si dice che il sistema *spinge in vuoto*.

È necessario pure che gli sforzi esercitati sopra la parte di una pietra sieno riportati sopra un' altra pietra che sostenga direttamente quella parte. Allorchè una tale condizione non è sodisfatta dicesi che la pietra sottoposta *porta in falso*, e questo è un vizio evidentemente nocevole alla stabilità.

484. Di qui il terzo principio seguente, al quale conviene aver riguardo nel tracciamento dell' apparecchio d' un sistema di pietre;

III. È necessario evitare che alcuna parte di un' opera spinga in vuoto, o qualche pietra porti in falso.

485. Una condizione essenziale per la durata delle pietre riguarda la scelta delle facce contro le quali si esercitano le pressioni che si sviluppano nell' opera, e che abbiamo detto nomarsi *letti* (N. 480)

Le pietre per quanto appariscano nella materia omogenee, non lo sono difatti e per conseguenza non riescono egualmente resistenti in tutte le direzioni.

Quelle che ordinariamente si impiegano sono composte di sottili strati orizzontali avanti la loro estrazione dalla cava e simili ai fogli d' un libro, che si chiamano *letti naturali* o *letti di cava*. Un blocco impiegato per modo da esser premuto dal peso che sopporta in direzione perpendicolare ai suoi letti naturali, resisterà lungo tempo; se per lo contrario sarà compresso in direzione parallela o quasi parallela a quella dei letti medesimi, questi tenderanno a separarsi e ben tosto il blocco perirà.

I grès, i graniti, i marmi e molte altre pietre nelle quali non vi ha alcuna apparenza di strati, periscono prontamente dividendosi in lame più o meno spesse e parallele ai loro letti naturali, quando per avventura si commette il grave errore sopra indicato nel collocarle in opera.

486. Il letto di cava essendo dunque ordinariamente di squadra con la direzione della più grande resistenza d' una pietra, dobbiamo concludere che.

IV. È necessario tagliare le pietre per guisa che dopo averle messe al posto, cioè a dire dopo la loro posa, il più grande sforzo da esse sopportato riesca normale al letto di cava

487. La economia è pure una delle condizioni importanti

di tutti i lavori: quindi fa mestieri evitare il più possibile i tagli di pietra che obbligano a grandi scarti; perchè non solamente vi ha bisogno di una mano d'opera per tagliare tali parti superflue, ma queste parti costituiscono una porzione di pietra avente un valore che se ne va in pura perdita.

488. In fine bisogna aver cura di impiegare sempre nei progetti le superficie che soddisfacendo alle convenienze prescritte sono anche le più semplici, poichè per ordinario tali superficie esigono operazioni di tracciato e di taglio le più facili.

La buona conoscenza della Geometria potrebbe lusingare talvolta l'Ingegnere a non temere di contravvenire a questo principio; ma è ben facile che poi se ne penta quasi sempre nella esecuzione. Imperocchè egli costerà una pena maggiore il dirigere gli operai, i quali lavorando con maggiore difficoltà esigeranno anche un prezzo più grande del loro lavoro, e gli sarà d'altra parte agevole il convincersi che ben di rado per questa via si può giungere a tutta la perfezione che l'arte può comportare.

489. Fra le cose che conviene avere continuamente in vista, componendo un progetto di Taglio delle Pietre, devonsi porre in prima linea le operazioni reclamate dalla posa; poichè riescirebbe inutile affatto una perfetta esecuzione, se poi la posa presentasse inconvenienti tali da obbligare o ad un cangiamento di forma nei pezzi, o a contentarsi di un collocamento difettoso dei medesimi.

D'altronde bisogna riflettere che la perfezione nel taglio non si raggiunge mai; che molte difficoltà nella posa dei pezzi possono presentarsi durante la costruzione dell'opera, difficoltà più o meno gravi a seconda della natura del sistema da comporsi, e della capacità per avventura sempre limitata di coloro che generalmente si destinano a dirigere il taglio delle pietre e il loro collocamento.

Quindi non si può mai raccomandare abbastanza tanto per la economia come per la stabilità delle opere lo impiego delle soluzioni le più semplici, ed una continua ed attiva vigilanza dell'autore per sciogliere le difficoltà degli operai o per evitare i malintesi tanto frequenti fra i teorici e i pratici prodotti quasi sempre da un mal collocato amor proprio di questi ultimi.

490. Un' ultima avvertenza ancora ha da farsi intorno alla composizione geometrica del sistema. È necessario che questa non si opponga alla riunione di tutti i pezzi che quello compongono. Potrebbe avvenire che un pezzo avesse la forma del vuoto da riempirsi fra i suoi vicini, e che questa forma quantunque identica a quella del vuoto non permettesse la introduzione del pezzo in quistione. Supponiamo, per esempio che una sfera dovesse essere inclusa in un'altra sfera per modo che la sfera inviluppata e quella inviluppante coincidessero fra loro; egli è manifesto che questa ultima non potrebbe esser fatta d'un sol pezzo, poichè non potrebbesi ne fare il vuoto nell'interno di essa, nè introdurvi la prima. Bisognerebbe dunque che la sfera inviluppante fosse almeno composta di due pezzi, e che in tal caso ciascuno di questi comprendesse esattamente il vuoto di una semisfera, senza di che la introduzione della sfera inviluppata nella cavità dei due emisferi inviluppanti riescirebbe ancora impossibile.

Concluderemo pertanto quest' ultimo principio:

V. I pezzi di un' opera di pietra debbono avere tagli tali da rendere possibile la riunione di tutti in un solo sistema.

CAPO II.

Del Tracciamento delle opere e del Taglio.

491. Allorchè un' opera in pietra da taglio è stata concepita e disegnata in conformità dei principi stabiliti al Capo precedente, e questa opera sodisfa a tutte le convenienze proprie dell' uso a cui si destina, bisogna pensare a farne per gli operai una descrizione geometrica completa, e procedere in seguito alla esecuzione dei diversi pezzi.

Tale disposizione, sempre di grandezza naturale, è ciò che

chiamasi *tracciamento dell' opera*; si fa sopra un' area piana orizzontale o verticale. Debbono esser tracciati sopra quell' area tutti gli accessori che la esecuzione può reclamare, e che per ordinario sono l' apparecchio generale dell' opera, le proiezioni e le grandezze vere delle faccie dei pezzi da tagliarsi. Potendo un' errore, per quanto piccolo, esser cagione di gravi conseguenze è necessaria la più grande precisione ed accuratezza nel tracciamento di che si ragiona; onde l' Ingegnere non dee stancarsi mai di verificare per ogni modo l' adempimento di tutte le condizioni in questo lavoro che è base e fondamento del Taglio.

492. Gli strumenti che si adoperano sono la riga, la squadra, ed una specie di compasso in ferro che porta il nome di falsa squadra (*Fig* 157).

Per la costruzione delle curve che non possono essere generate da un movimento continuo, o che essendone suscettibili, sono però troppo grandi per non dubitare dell' esattezza nel resultato, si impiega il metodo delle ordinate e delle ascisse. E a tale oggetto si calcolano tavole apposite nelle quali si registrano i valori delle une e delle altre, affinchè ad ogni circostanza possa verificarsi la curva che ne dipende.

493. La falsa squadra indicata nella *Fig.* 157 non serve solamente di compasso; essa impiegasi pure per riportare sulla pietra gli angoli presi sul tracciato. Per questo oggetto si impiega anche lo strumento in legno *A B C* (*Fig.* 158) che porta lo stesso nome del precedente, e che si compone di due righe unite da un pezzo attorno al quale sono mobili.

Talvolta si ha bisogno di riportare sulla pietra degli angoli mistilinei o curvilinei; allora allo istrumento precedente si sostituiscono quello della *Fig* 159 o l' altro della *Fig.* 160. Strumenti di quest' ultimo genere si costruiscono sempre sul posto, e secondo il bisogno, richiedendosi per ogni caso speciale archi di curvatura diversa.

494. I notati strumenti, ed altri ancora che possono essere richiesti dalla necessità o di cui sarebbe superfluo il parlare, non sono i soli mezzi adoperati per la costruzione geometrica delle figure. Spesso si impiegano dei poligoni, come *A B C D E* (*Fig.* 161) fatti in legno per riportare sulla pietra le figure del tracciato. Questi poligoni si chiamano *modelli*;

talvolta sono formati di sottili assi, ma ordinariamente sono specie di telai, siccome viene indicato dalla figura, tagliati all'esterno secondo il poligono rettilineo, mistilineo o curvilineo del quale si ha bisogno.

495. Ciò premesso passiamo a dire del Taglio, e in primo luogo vediamo come si eseguisca una faccia piana in un blocco o masso di pietra grezza estratta dalla cava.

Sia *A B C D E F G* (*Fig.* 162) il masso proposto che sortendo dalla cava ha una forma presso a poco prismatica. Sopra una delle facce *A B G*, e a piccola distanza dal bordo superiore, si traccerà con una riga *X Y* un segno nero, il quale se non riescirà una linea retta a cagione della scabrosità della faccia, sarà certo una linea piana. L'operaio taglierà allora con lo scalpello o il maglio la pietra eccedente questo segno, producendo una intaccatura o piccola banda piana *A B a c* di 1 o 2 centimetri di larghezza. La poca larghezza di questa banda ne agevola l'esecuzione; e d'altronde può sempre verificarsi il suo piano applicandovi il canto della riga. Ciò fatto si farà posare la riga *X Y* in equilibrio e per taglio sopra la intaccatura *A B a c*, o venuti alla faccia opposta *C D E F* si applicherà contro di questa un'altra riga *X' Y'* per modo che traguardando lungo le porzioni del suo canto superiore eccedenti il masso, esse collimino con le porzioni del canto inferiore della prima riga *X Y*, le quali eccedono pure il masso medesimo. Segneremo allora un altro tratto nero sulla faccia *C D E F* lungo il bordo superiore della riga, e questo tratto costituirà una seconda linea piana interamente distesa sopra uno stesso piano con la linea precedentemente segnata sulla faccia *A B G*, ossia con la faccetta della intaccatura sulla quale sta la prima riga *X Y*. Posto ciò potrà farsi eseguire un'altra intaccatura *D d b C* sulla faccia *C D E F*, e riuniti gli estremi *a* e *b*, *c* e *d* con una linea tracciata sulle corrispondenti facce *B C F G*, *A D E*, l'operaio potrà agevolmente tagliare tutte le scabrosità della pietra eccedenti le quattro linee notate per ottenere la faccia piana *a b d c*. Siccome poi le due rette *a c*, *b d* possono considerarsi come le direttrici del piano della faccia da eseguirsi, egli dovrà durante l'operazione porre frequentemente il canto d'una delle righe sulle porzioni delle due rette *a c*, *b d* che

di mano in mano rimangano scoperte, e verificare se quella collima perfettamente colla superficie eseguita.

Con un processo analogo si potranno spianare tutte le facce del masso, ed ottenere così il solido prismatico *a b c d e f g* (*Fig.* 463).

496. Quando una delle facce *a b f g* dovesse essere perpendicolare alla precedentemente eseguita *a b d c*, si dovrebbe prima tagliare lunga la costola *a g* una intaccatura perpendicolare alla costola *a c*, e in seguito colle due direttrici *a b* ed *a g* si eseguirebbe la faccia domandata verificandone continuamente la posizione colla squadra *r s t*, la quale posta col vertice *s* sopra *a b* e con uno dei lati *s t* disteso sopra la faccia *a b d c*, deve avere l'altro lato *s r* interamente in contatto colla faccia *a b f g*

497. Supponiamo che anche l'altra faccia *d c e h* sia tagliata a squadra con *a b d a*, e che si voglia ricavare dal solido *a b c d e f g h* un parallelepipedo, di cui la base abbia per lati *a b*, *a c*, e l'altezza sia indicata dalla retta *u v*.

Immaginando per semplicità che la costola *a c* sia perpendicolare ai lati *a b* e *c d*, poseremo la squadra *r s t* sulla faccia *a b d c* nel modo indicato dalla figura, e tracceremo su questa faccia lungo il lato *s t* la linea *b d'* che somministrerà il rettangolo *a b d' c* base del parallelepipedo in quistione. Impiegando di poi l'altra squadra *r' s' t'* che è conosciuta nelle arti col nome di *quartabana* potremo tracciare sulla faccia *c d e h* la retta *d' e'*, che resulterà perpendicolare al piano *a b d' c*, e rivoltando il quartabona, l'altra retta *c h'* che sarà pure perpendicolare allo stesso piano. Si faranno poi le rette *d' e'*, *c h'* eguali entrambe ad *u v*. Si tirerà la *a' h'* e si prolungherà fino all'incontro in *e''* ed *h''* colle costole *d e*, *c h*.

Si ripeta sulla opposta faccia *a b f g* quello che si è fatto sulla faccia precedente, e supposta che la costola *b f* resulti perpendicolare al piano *a b d c* e che sia *a g'* la perpendicolare al medesimo piano condotta per *a*, si prenderanno sopra di esse le lunghezze *a g'*, *b f''* eguali ad *u v*. Allora potranno tracciarsi sulle facce *b d e f*, *a g h c* le rette *f'' e''*, *g'' h''*, e rimarrà determinato il parallelepipedo richiesto *a b d' c h' g' f'' e'*. Per ottenerlo dovranno tagliarsi i solidi eccedenti *e'' f'' g'' h'' h e f g*, *e' e'' f'' b d' d*, *h' h'' g'' g' a c*.

498. Eseguire sopra una pietra una faccia piana, tagliare altre facce a squadra con quella, ricavarne in fine un solido semplice, come un parallelepipedo, un prisma retto ec. sono operazioni ben facili, e che non richiedono molta abilità. Non è così per i corpi di forme più complicate: per questi occorrono processi geometrici di natura più elevata, e cognizioni più estese negli operai o in coloro che dirigono il taglio.

Due sono in generale i processi che possono adoperarsi per tagliare una pietra, di cui la descrizione geometrica è data. Nell'uno s'immagina che un solido semplice sia circoscritto a quello da costruirsi: si dà prima alla pietra la forma del solido semplice; in seguito si distruggono i solidi in eccesso costituenti la differenza del solido circoscritto e di quello cercato, ciò che necessariamente somministra questo ultimo.

I solidi in eccesso formano, come si vede, una specie di veste che inviluppa il solido richiesto. Chiamano gli operai *spogliamento* del blocco la operazione che consiste a tagliare da esso le parti eccedenti, e al taglio fatto con questo processo danno il nome di *taglio per spogliamento*. Siccome poi il solido inviluppante è ordinariamente quadrato, sostituiscesi sovente alla precedente denominazione l'altra di *taglio per squadramento*.

Il secondo processo consiste nel tagliare un piano sulla pietra: riportando quindi su di esso una delle facce del solido domandato si taglia la pietra per mezzo della squadra o della falsa squadra secondo i piani o le superficie che passano per i lati della prima faccia. Su questi piani e su questa superficie si riportano poi le facce corrispondenti del solido, e si fa passare per i lati di queste delle nuove superficie; si tracciano delle nuove facce su queste ultime e così di seguito, e si ottiene evidentemente il solido cercato.

È manifesto che una simile operazione non può eseguirsi senza il soccorso di un numero sufficiente di profili e di modelli del solido da costruire, onde si dà ordinariamente a questo metodo di tagliare le pietre il nome di *taglio per profili* e *modelli*, o semplicemente quello di *taglio per profili*. Applichiamo ad un esempio ambedue i metodi su esposti

499. Taglio per squadramento. Supponiamo che si tratti di costruire un ottaedro regolare *M N O P Q R* (*Fig.* 164).

Si immagini che esso sia inviluppato da un cubo *A B C D E F G H*, di cui le facce *A B G F*, *B C H G*, *C D E H*, *D A F E* passano respettivamente ciascuna per le costole *N O*, *O P*, *P Q*, *Q N* dell'ottaedro domandato e sono diretta perpendicolarmente al piano del quadrato *N O P Q*; mentre i piani delle due altre facce *A B C D*, *F G H E* passano per le sommità *R* ed *M*. Si eseguisca dapprima il cubo *A B C D E F G H* che, per facilità di discorso, noi concepiremo collocato colla sua faccia *F G H E* sopra un piano orizzontale.

Si tracceranno sulle facce verticali del cubo le rette *N O*, *O P*, *P Q*, *Q N*, e sulle sue facce orizzontali le rette *I J*, *K L* che tutte dividono in due rettangoli eguali i quadrati *A B G F*, *B C H G*, *C D E H*, *A D E F* di cui esse fanno parte. In seguito si condurranno le rette *I N* ed *I Q*, *J O* ed *J P*, *L O* ed *L P*, *K N* e *Q K*.

Ciò fatto si leveranno al cubo di pietra *A B C D E F G H* i prismi *N A I J O B*, *Q I D C J P*, *N K F G L O*, *E Q K L H P*, e si otterrà il parallelepipedo *N I Q K L P J O* (*Fig* 165).

Su questo solido si marcheranno i punti di mezzo *M* ed *R* delle costole *I J*, *K L*; si tracceranno le rette *R N*, *R O*, *R P*, *R Q*, *M N*, *M O*, *M P*, *M Q* e si toglieranno dal parallelepipedo *N P* i tetraedri *M N Q I*, *M J P O*, *R L O P*, *R Q N K*. In questo modo si giungerà ad ottenere l'ottaedro domandato *M N O P Q R* (*Fig.* 166).

500. *Osservazione I.* — Invece di costruire il cubo *A B C D E F G H* (*Fig.* 164), si vede che avremmo potuto costruire immediatamente il parallelepipedo rettangolo *N I Q K L P J O* (*Fig.* 165) Poichè è evidente che la sua lunghezza *N O* è una delle costole dell'ottaedro, e che la sua base *N I Q K* è eguale alla sezione, facile a costruirsi, fatta nel solido *M N O P Q R* (*Fig.* 166) da un piano *M n R* a condotto per le sommità opposte *R* ed *M* perpendicolarmente alle costole parallele *N O* e *P Q* congiungenti le altre quattro sommità *N*, *O*, *P*, *Q*.

Ora è manifesto che eseguendo immediatamente il parallelepipedo *N I Q K L P J O* potrà aversi l'ottaedro da un blocco di pietra meno considerevole di quello che esige il cubo *F C*; e che sarà necessario minor lavoro operando

col parallelepipedo di quello che ne bisogna operando col mezzo del cubo.

501. *Osservazione II.* — Resulta da ciò che nel processo per squadramento convien scegliere il solido inviluppante con molto discernimento non tanto a cagione delle operazioni geometriche a cui può dar luogo per dirigere il taglio, quanto ancora per la difficoltà e quantità di lavoro da farsi per ottenere il solido cercato. Bisogna insomma che il solido inviluppante soddisfi ad un tempo alle tre seguenti condizioni: 1° deve essere il più convenevole possibile per la esattezza del taglio; 2° deve occasionare pochi scarti di pietra; 3° non deve esigere molto lavoro.

502. Taglio per profili. Proponiamoci ancora di eseguire lo stesso solido, che supporremo collocato con una delle sue facce A' N' sopra un piano orizzontale X Y, e rappresentato dalle sue proiezioni A m N a M n, A' m' a' N' (*Fig.* 167). Noi sappiamo (*Geom. Descritt.*) come si costruiscono queste proiezioni, e sappiamo di più che a cagione delle facce orizzontali A' N', m' a', le quali hanno un lato perpendicolare al coordinato verticale, l'angolo fatto da due facce qualunque del solido è somministrato nella sua vera grandezza da A' m' a' ossivvero da A' N' a'.

Ciò posto, ecco la maniera di procedere per la esecuzione dell'ottaedro. Si costruirà un profilo S T U giustamente eguale al triangolo A M N, e si aprirà la falsa squadra P Q R per guisa che i suoi due bracci P Q, Q R comprendano fra loro un'angolo P Q R eguale all'angolo A' m' a' di due facce del solido. Si eseguirà in seguito un piano sulla pietra, e si poserà su questo piano il profilo S T U. Supponiamo che siasi posato in (m n a, m' a'). impiegandolo allora come riga potrà tracciarsi il triangolo (m n a, m' a') che sarà eguale ad una faccia qualunque dell'ottaedro; per ciascuna delle costole (m n, m'), (n a, m' a'), (m a, m' a') faremo passare, adoperando la falsa squadra P Q R nello stesso modo indicato per la squadra al N.° 497, dei piani inclinati sul piano m' a' di angoli eguali all'angolo P Q R determinato dalla falsa squadra. Su questi piani si descriveranno per mezzo del profilo S T U, i nuovi triangoli (m n A, m' A'), (n a M, m' a' N'), (a m N, a' m' N') e si

Digitized by Google

avranno di già quattro delle otto facce cercate. Per le costole (n A, m' A') ed (n M, m' N'), (a M, a' N') ed (a N, a' N'), (m N, m' N') ed (m A, m' A') si faranno passare tre nuovi piani; si tracceranno poi su questi delle rette che congiungano i punti (A, A') ed (M, N'), (M, N') ed (N, N'), (N, N') ed (A, A') e si otterranno altre tre facce esatte del solido In fine facendo passare un piano per le tre rette di già tracciate (A M, A' N'), (M N, N') (N A, N' A') si avrà, se le operazioni sono state ben fatte, l'ottaedro domandato.

503. *Osservazione I.* — A misura che il lavoro procede verso il suo termine, è necessario assicurarsi continuamente che le facce e gli angoli diedri di mano in mano ottenuti sieno eguali respettivamente al triangolo S T U e all'angolo P Q R.

504. *Osservazione II.* — Paragoniamo i due metodi precedentemente impiegati per la esecuzione dell'ottaedro.

Col metodo di squadramento bisogna: 1° fare un cubo A B C D E F G H (*Fig.* 164); 2° condurre le linee I J, N O, K L, P Q che dividono le quattro facce A B C D, A B G F, G F E H, E H C D in due parti eguali; 3° prendere i punti di mezzo M ed R delle rette I J, K L. Si hanno allora immediatamente sul cubo le sei sommità M, N, O, P, Q, R dell'ottaedro, e non è più possibile alcuno errore di tracciato durante il lavoro.

Avviene lo stesso partendo dal parallelepipedo N I Q K L P J O (*Fig.* 165): poichè in questo caso basta dividere due delle sue costole longitudinali opposte I J, K L in parti eguali per avere le sei sommità M, N, O, P, Q, R

Operando invece col metodo dei profili o modelli, si comprende agevolmente che un piccolo errore commesso nella applicazione di questi strumenti sulla pietra condurrà ad ottenere le facce corrispondenti un poco inesatte; allora quelle che se ne deducono riusciranno ancora più fallaci, tanto nelle loro forme, quanto nella loro posizione, e l'ultima, che sarà conseguenza di errori i quali ben raramente si compensano, potrà riescire estremamente difettosa.

Tuttavia considerando che col metodo di squadramento, e partendo non da un cubo ma soltanto da un parallelepipedo,

bisogna dare al blocco successivamente sei forme diverse, si vedrà che questo metodo produce necessariamente molti scarti ed esige per conseguenza molto lavoro.

Consegue da ciò che, volendo aver riguardo alla economia, deve poter trovarsi nei casi usuali una via di mezzo fra la condizione di operare a caro prezzo coi mezzi i più favorevoli alla esattezza, e quella di operare a miglior mercato con mezzi meno sicuri. E questa conclusione resulterà tanto più manifesta, se osserviamo che nel metodo di squadramento nulla può dispensare dal fare molto lavoro, mentre operando coi profili dee potersi evitare la inesattezza facendo con precisione tutte le operazioni di tracciato e di taglio.

505. *Osservazione III.* — Il metodo per profili o per modelli potendo riunire l'esattezza alla economia porterebbe l'arte alla sua perfezione, se la natura del lavoro permettesse un grado sufficiente di precisione. Ma questo non è possibile raggiungere: imperocchè gli operai lavorano all'aria aperta; le loro righe si trovano per conseguenza esposte alternativamente alla pioggia e al sole, e non possono quindi conservarsi rette per lungo tempo. D'altra parte gli strumenti in legno o in ferro, come i modelli, le squadre, le false squadre ec., che si appoggiano sopra una materia dura e scabra siccome la pietra, si deformano, si smussano nei canti, e perdono prontamente coll'uso le qualità che avrebbero dovuto conservare. Infine le superficie su cui si tracciano le linee è sempre troppo ineguale perchè esse resultino pure, e la pietra rossa o nera, con la quale si fanno, si smussa troppo presto per conservare costantemente uno spigolo delicato ed atto a produrre delle linee ben sottili.

506. *Osservazione IV.* — Di questi due modi di operare, l'uno per squadramento, l'altro per profili, il secondo è dunque il più diretto, quello che esige il minor lavoro, che dà luogo al minor numero di scarti, quello insomma che dovrebbe sempre preferirsi quando si operasse con mezzi meno grossolani di quelli che comporta l'arte del tagliatore di pietre; ma il primo è sovente preferibile, perchè tutto ben considerato, è il più idoneo a condurre a dei resultati esatti.

Nei casi semplici, siccome quello dell'ottaedro questi due metodi sono assolutamente distinti; non è così però nei casi

complicati, pei quali conviene usare sovente, come avremo luogo di vedere, ambedue i metodi ad un tempo.

507. Termineremo queste considerazioni sul taglio avvertendo che conviene sempre cominciare dal tagliare la pietra secondo le superficie più importanti. Molte ragioni potrebbero addursi in proposito, ma le principali sono le seguenti:

1° Le prime superficie fatte servono al tracciato delle ultime; onde giova che questo tracciato sia eseguito sulle superficie che sono tagliate con maggior cura, perchè esse sono più proprie a dare dei resultati esatti;

2° Se, eseguendo le prime superficie, si incontra un difetto che obbligh o a rifarle o a prendere un altro blocco, vi sarà minor quantità di lavoro perduto che nel caso in cui questo difetto non si scoprisse che dopo il taglio delle facce accessorie.

CAPO III.

Dei Muri.

508. I muri sono massicci, di sezione ordinariamente rettangolare o trapezia, destinati a cingere o chiudere un' area data, ovvero impiegati a sostenere un rilievo qualunque di terra, o a servire di difesa lungo i fianchi delle strade, sopra le fronti di un ponte ec. Nel primo caso si chiamano *muri di cinta*, nel secondo *muri di rivestimento*, nel terzo *muri di parapetto* o semplicemente *parapetti*.

509. Sia qualsivoglia l' ufficio d' un muro, si dà sempre il nome di *paramento* a quella superficie di esso che rimane visibile o scoperta; e i pezzi che lo compongono, se è tutto in pietra, si distinguono col nome di *conci*. Chiamasi poi *faccia di paramento* di un concio quella che fa parte del paramento del muro.

510. Nei muri di sezione rettangolare tutte le pietre hanno

la forma di parallelepipedo rettangolo, e si trovano in essi collocate sempre per modo che la minore delle loro tre dimensioni resulta verticale. Per questa ragione si chiama *altezza* del concio questa dimensione, si chiama *lunghezza* del concio la dimensione maggiore, e quella media si distingue col nome di *larghezza* ed anche con l'altro di *grossezza*.

511 In arte si specificano ancora i conci dal modo di loro collocazione nei muri. Così tutte le volte che un concio parallelepipedo presenta due paramenti nella direzione della lunghezza, si distingue col nome di concio *collocato a grossezza*. Ciò ha luogo evidentemente allorchè la larghezza del concio eguaglia la grossezza del muro.

Se invece esso presenta due paramenti nella direzione della larghezza, che è il caso in cui sono facce di paramento del concio le due minori, dicesi *concio collocato in chiave*. E ciò avviene evidentemente allorchè la lunghezza del concio eguaglia la grossezza del muro.

Portano infine il nome di *quadrelli* tutti gli altri conci i quali in opera non presentano che un solo paramento.

512. I muri si dividono in *semplici* e *composti*. Si chiamano semplici quelli di cui tutti i conci hanno la medesima forma, qualunque sia d'altronde la maniera di loro collocazione; e di cui il paramento è una superficie continua ed uniforme. Composti diconsi gli altri che sono il resultato della combinazione di due o più muri semplici. I conci nei muri di questa seconda classe non potranno avere tutti in generale la medesima forma, e quindi i paramenti dei muri debbono essere superficie discontinue.

513. Muri semplici. Il paramento di questi muri, è una superficie piana o una superficie curva. La loro sezione retta, vale a dire la intersezione di essi con un piano normale al loro paramento, può in ambedue i casi essere o un rettangolo o un trapezio. Quando è un rettangolo, il muro dicesi *retto*, quando è un trapezio, distinguesi il muro col nome di *muro a scarpa*.

514 *Apparecchio dei muri retti a paramento piano.* Questo apparecchio non può essere meglio dimostrato che dalle figure 168, 169 e 170. La prima di esse rappresenta un muro avente la grossezza eguale alla larghezza dei conci,

i quali essendo tutti eguali, si trovano perciò collocati per grossezza. La seconda rappresenta un muro che ha per grossezza il doppio della larghezza dei conci; si è supposto in questo muro che i conci abbiano la stessa altezza e la medesima larghezza; ma alcuni sieno lunghi quanto è grosso il muro, ed altri sieno di lunghezza doppia dei precedenti. La terza mostra un muro avente per grossezza il triplo della larghezza dei conci più piccoli: in questo si è supposto che i conci abbiano la medesima altezza e la medesima lunghezza; e che la larghezza mentre è in alcuni la terza parte della grossezza del muro, in altri sia il doppio.

Quanto alla disposizione delle pietre, che è ciò che costituisce propriamente l'apparecchio del muro, si trova, in ciascuna delle figure indicate, conforme ai principi stabiliti nel Cap. I. Così esse si veggono disposte per strati orizzontali, che diconsi anche *filari* o *corsi*, gli uni agli altri sovrapposti, e le facce di giuntura delle pietre di un medesimo filare non si trovano nè sul prolungamento nè molto prossime al prolungamento delle facce di giuntura delle pietre appartenenti ai due filari che lo comprendono (N.° 482).

Per soddisfare a queste condizioni nel miglior modo possibile si vedono i conci, aventi fra le loro dimensioni la relazione indicata per la *Fig.* 169, collocati alternativamente in un filare tutti in chiave, e nel successivo disposti ad ufficio di quadrelli: le medesime ragioni spiegano la disposizione data ai conci pel muro della *Fig.* 170, nel quale fanno tutti ufficio di quadrelli.

515. *Forma e taglio dei conci pei muri retti a paramento piano.*

In forza delle condizioni prescritte dalla stabilità e durevolezza dell'opera, questa forma non può essere diversa da quella del parallelapipedo rettangolo. Talchè quanto al taglio dei conci non v'ha nulla da aggiungere a ciò che dicemmo nei numeri 495, 496 e 497, per la esecuzione di simili pietre.

516. *Apparecchio dei muri retti a paramento curvo.*

Il paramento non può essere altra cosa che una superficie cilindrica retta, la cui direttrice orizzontale è una curva piana qualunque.

La disposizione delle pietre nell' interno del muro, come quella delle loro facce di paramento sono analoghe alla già veduta pei muri a paramento piano: solo le facce verticali di giuntura invece di resultare parallele fra loro, come in questi ultimi, debbono essere normali alla curva direttrice del paramento, secondo prescrive il Principio II al N.° 484.

517. *Forma e Taglio dei conci pei muri retti a paramento curvo.*

La forma ordinaria dei conci è quella rappresentata dal solido *A a i b B G f l e H* (*Fig.* 171), del quale tutte le facce sono piane ad eccezione di quella di paramento *a i b f l c*, che è cilindrica. Questa faccia può essere all' esterno convessa, come nel caso che si considera, o concava, a seconda del paramento del muro che sebbene sia ordinariamente convesso, pure in qualche caso è concavo.

Per tagliare uno di questi conci si immagina circoscritto al solido *A a i b B G f l e H* un prisma retto *A B C D E F G H* e si taglia il blocco dapprima secondo questo prisma: di poi sulle due facce *A B C D*, *E F G H* si pone convenientemente il modello *M* somministrato dalle proiezioni del muro, e si tracciano le due curve *a i b*, e *l f*. In fine si tolgono alla pietra i solidi *D a i l e E*, *C b i l f F*, e si ottiene il solido richiesto. Per tagliare con la maggior precisione possibile la faccia curva *a i b f l e* sogliono i pratici tener conto sul modello *M* dei punti 1, 2, *i*, 3, 4 nei quali le generatrici del cilindro tagliano lo spigolo a_1 i b_1. Riportati allora questi punti sulle linee corrispondenti *a i b*, e *l f* è sempre possibile verificare con una riga la forma della superficie *a i b f l e* che durante il lavoro si va scoprendo sulla pietra.

Questo metodo esclude il bisogno di tagliare il blocco secondo una faccia piana *C D E F* tangente alla superficie cilindrica da trovarsi. Poichè una volta preparata la pietra secondo le cinque facce piane *A B C D*, *A D E H*, *E F G H*, *B C F G*, *A B G H*, mediante l' applicazione del modello *M* sulla faccia *A B C D* che deve essere la prima ad eseguirsi, si vede che qualunque sia la eccedenza della pietra al di quà delle curve *a i b*, e *l f*, essa potrà sempre tagliarsi per modo da ottenere successivamente sul blocco le piccole faccette ci-

indriche, 1 *a* e 1 . . . . . dall'accordo delle quali resultar deve la faccia di paramento del concio.

Ciò che si è detto per questo concio a paramento convesso, può applicarsi interamente a quei conci che per avventura facessero parte di un muro a paramento concavo.

518. *Muri a scarpa*. Supponiamo che il paramento d'un muro retto devii anche per poco dalla posizione verticale, ed avremo un muro a scarpa. La sezione retta di questi muri, lo abbiamo già detto, è sempre un trapezio *S i f G* (*Fig.* 172).

La inclinazione della scarpa si misura coll'angolo che la faccia inclinata del muro fa con la verticale, e non con quello da essa fatto coll'orizzonte; poichè se quest'ultimo fosse di 90°, la scarpa al contrario sarebbe nulla. D'altronde è uso d'indicare la scarpa non per gradi del quadrante, ma mediante una frazione $^1/_4$, $^1/_5$, ... che esprime il rapporto della proiezione orizzontale *f I* della retta *d i* all'altezza del punto *i* sul piano orizzontale medesimo.

La retta *f I* si chiama anche *base* della scarpa e la *I i* *altezza*. Così quando dicesi che un muro ha la scarpa di $^1/_5$ si deve intendere che la base *f I* è espressa da 1, e l'altezza *I i* da 5, o in altri termini, che ad ogni unità lineare della base, ne devono corrispondere cinque di altezza.

519. *Apparecchio dei muri a scarpa*. Nella faccia inclinata, che ordinariamente è l'unico loro paramento, deve l'apparecchio comparire simile a quello dei muri retti. I corsi devono essere orizzontali; talchè se prendiamo la sezione retta per proiezione verticale del muro, si avrà la disposizione interna delle pietre dividendo la retta *f i* (*Fig* 172) in un certo numero di parti eguali o disuguali *f c*, *c h*, *h l*, *l i*, e dai punti di divisione conducendo altrettante orizzontali. E se la spessezza del muro sarà tale da non permetterne la costruzione in pietre di lunghezza eguale ad essa si disporranno queste pietre in ciascun filare nel modo indicato pei muri retti, e siccome è dimostrato dalle verticali $g\,g_1$, $m\,m_1$.

Colla disposizione suespressa ciascuna faccia di paramento resulta inclinata ad angolo acuto sul letto inferiore. Questa obliquità quantunque contraria al Principio II (N.° 481), pure nei muri si può lasciare sussistere senza inconvenienti quando

la inclinazione della scarpa non sia molto grande, ma dovrà evitarsi nelle scarpe molto inclinate. Per togliere questo spigolo acuto soggetto a rottura tanto nel taglio del concio, quanto nella sua posa come anche per l'effetto del carico soprapposto, si opera nel modo seguente.

Per i punti c_1 h, l, i . . . . si conducono le rette c h, h o, l n, i m . . . . perpendicolari sopra f i, e si prolungano fino ad una retta c_1 i_1 parallela ad f i tirata distante da questa per 5 a 8 centimetri. Quindi si tracciano le orizzontali c_1 p, o q, n r, i_1 s . . . . ; e le spezzate p c_1 c, q o h, r n l . . . . rappresenteranno i letti dei diversi corsi. All'oggetto di togliere anche l'angolo acuto formato dalla faccia inclinata i f colla superficie superiore del fondamento, s'inalza per lo spigolo f il piano verticale f e fino al livello del terreno T T_1 e si termina la faccia inclinata del primo corso allo spigolo d, aggiungendo in seguito le due facce d e orizzontale ed e f verticale, che saranno l'una al livello l'altra al di sotto del suolo. Così mentre l'apparecchio del paramento del muro rimane lo stesso, varia soltanto la forma di quelle pietre che hanno una faccia di paramento. E soppresso ogni angolo acuto, e quindi evitato ogni inconveniente che da tali angoli potesse derivare.

Per questa seconda forma data alle pietre di paramento nei muri a scarpa l'apparecchio di questi muri distinguesi da quello ordinario, testè dimostrato, col nome di *apparecchio a faccette*.

520. *Forma dei conci pei muri a scarpa.* Nell'apparecchio ordinario la forma delle pietre aventi una faccia di paramento è quella di prisma retto a base trapezia. Le basi di questi prismi sono in opera le facce di giuntura delle pietre in ciascheduno corso. Tutte le altre facce sono rettangolari: hanno per base uno dei lati della faccia trapezia, e per altezza la lunghezza del concio.

Nell'apparecchio a faccette la forma del concio appartiene alla stessa famiglia di solidi geometrici, se non che la base di questi solidi è diversa: per le pietre dell'infimo corso essa ha per modello la figura a c_1 c d e f g; per le pietre dei corsi sovrapposti il modello di questa base è della forma g a h c c_1 p. Tutte le altre facce poi di questi conci sono ret-

tangoli aventi per base uno dei lati degli indicati poligoni, e per altezza la lunghezza dei conci.

Quando i conci di paramento non hanno larghezza sufficiente per raggiungere la grossezza del muro, si conserva la forma di parallelepipedo rettangolo a tutte le pietre che si nell'una come nell'altra maniera di apparecchio occorressero per dare al muro la grossezza prestabilita.

521. *Taglio dei conci pei muri a scarpa.* Le facce di giuntura delle pietre di paramento in questi muri sono le superficie più importanti, siccome quelle che determinano la forma del concio: quindi il taglio deve cominciarsi dalla esecuzione di queste facce (N.° 507). Pei muri a scarpa di apparecchio ordinario si eseguirà prima una di queste facce; si taglieranno poi le altre a squadra con essa nel modo indicato al N.° 496, e si verificherà la posizione della faccia di paramento per mezzo della falsa squadra.

Si può anche cominciare il taglio dalle facce di giacitura, o dai letti. Il modo allora da tenersi è analogo a quello che andiamo ad esporre per la pietra proiettata in $a\ c_1$ e $d\ e\ f\ g$ (*Fig.* 172) del primo corso di un muro apparecchiato a faccelle.

Per tagliare questo concio si sceglierà un blocco eguale almeno al parallelepipedo che ha per base la faccia proiettata in $g\ f$, e per altezza quella del punto a sopra $g\ f$. Si spianerà la faccia inferiore che deve formare la superficie di giacitura, e vi tracceremo un rettangolo $g'\ f'\ i\ h$, (*Fig.* 173) eguale a quello che ha per base la $g\ f$ e per altezza la lunghezza del concio. Di poi si eleverà una faccia piana $a''\ d''\ f'\ g'$ perpendicolare a quella di giacitura, e che passa per lo spigolo $g'\ f'$, ciò che si eseguirà facilmente mediante la squadra; e su questa seconda faccia si traccerà il contorno $a'\ b'\ c'\ d'\ e'\ f'\ g'$ identico ad $a\ c_1\ c\ d\ e\ f\ g$. Ciò fatto si potranno tagliare tutte le facce perpendicolari ad $a'\ b'\ c'\ d'\ e'\ f'\ g'$ abbattendo la pietra lungo questo contorno, ed applicandovi la squadra per modo che mentre uno dei bracci si appoggio sulla faccia $f'\ a'$, l'altro coincida per tutta la sua lunghezza colla faccia che si sta spianando. Finalmente daremo a tutte queste nuove facce una lunghezza eguale a quella del concio.

Questo piccolo numero di dati è sufficiente rigorosamente

parlando; nondimeno per maggiore esattezza sarà bene spianare non solo la faccia $a''\ d''\ f'\ g'$, ma ancora l'altra $h''\ i''$ e h a squadra colla superficie di giacitura, e tracciare anche su questa ultima il contorno h' o $m\ n\ i'\ i\ h$ identico all'altro: perocchè allora per ciascuna delle facce ad esso perpendicolari avremo due direttrici situate nello stesso piano; e facendo scorrere la riga fra queste due direttrici potrà la faccia eseguirsi con maggior precisione e facilità.

Ciò che si è detto per questo concio che appartiene al primo corso, può ugualmente applicarsi a quelli dei corsi superiori.

522. Muri composti. Abbiamo detto (N. 512) essere un muro composto quello che risulta dalla combinazione di due o più muri semplici, e di cui il paramento non è per conseguenza una superficie continua. Le combinazioni più agevoli tanto per l'apparecchio, quanto per la forma e per il taglio dei conci si hanno dallo incontro di due muri, i quali possono essere ambedue retti, ed incontrarsi sotto un'angolo di 90 gradi o sotto un'angolo qualunque; possono essere ambedue a scarpa di eguale inclinazione o di inclinazione diversa; infine uno dei muri può esser retto e l'altro a scarpa.

Tutte le altre combinazioni che in arte possono aver luogo, resultano dall'accordo di due muri con un terzo; e queste hanno un grado maggiore di difficoltà.

Problema I. *Incontro di due muri retti facenti fra loro un angolo di 90 gradi.*

523. Supponiamo che la grossezza di ambedue i muri eguagli la larghezza dei conci dei quali si compongono. Allora questi conci saranno sì nell'uno che nell'altro collocati tutti in grossezza. L'incontro poi dei due muri avrà luogo nel modo migliore e più stabile se, come viene dimostrato dalla *Fig.* 174, si troverà nell'angolo collocato un concio di ciascun muro in chiave fra due conci collocati in grossezza.

Quando uno dei muri od ambedue fossero composti di quadrelli si dovrà conservare nell'angolo una disposizione analoga alla precedente, senza di che non potrebbe averai stabilità sufficiente nell'opera.

PROBLEMA II. *Incontro di due muri retti facenti fra loro un angolo qualunque*

524 La *Fig.* 175 è la proiezione orizzontale di due muri che s'incontrerebbero sotto l'angolo *h o f*. Si fanno essi terminare ad un piano verticale, la cui traccia *h f* sia perpendicolare alla bisettrice *c o* dell'angolo. E ai conci che compongono il 4°, 3°, 5° . . . . . corso si da la forma di prismi retti aventi per base il poligono *b* b_1 *h f d* d_1 e per facce di giuntura i piani verticali *b* b_1, d d_1 normali ai respettivi paramenti a_1 *h*, e_1 *f*: a quelli che compongono il 2°, 4° 6° . . . . corso si da la forma di prismi retti aventi per basi i poligoni *a* n, *h g c* h_1 *a*, e e_1 *f g c* f_1 *e*, e per faccia di giuntura comune il piano verticale *c g* normale al paramento *f h*. Al di là di questi conci costituenti propriamente lo incontro dei muri, si proseguono questi con conci parallelepipedi nel modo ordinario.

PROBLEMA III. *Incontro di due muri a scarpa egualmente inclinati, e facenti fra loro un angolo qualunque a o c* (*Fig.* 176)

525. Si terminano i due muri ad un piano *v c a* avente la medesima inclinazione delle due scarpe, e la cui traccia orizzontale *c* n sia perpendicolare alla bisettrice *a o*. Le intersezioni di questo piano colle facce delle scarpe si proietteranno sulle rette *c v*, *a v* bisettrici degli angoli eguali *l c a*, *m* n c. Ai conci del 1°, 3°, 5° . . . . corso si darà la forma proiettata in *l c a m*, colle facce di giuntura in *l* ed *m* normali alle direzioni *a m*, *c l* dei respettivi muri. A quelli del 2°, 4°, 6° . . . . corso si darà la forma proiettata in *h g q p r s*, ed *f e q p t u* aventi la faccia verticale di giuntura comune proiettata in *p q* e normale al paramento *a b c* d.

PROBLEMA IV. *Incontro di due muri a scarpa d'inclinazione diversa.*

526. Sia *E' F' G' I'* (*Fig.* 177) la sezione retta di uno dei muri, e ad un tempo la proiezione verticale del muro

stesso: A_1 E ed r F perpendicolari ad E' F' saranno le tracce orizzontali delle sue facce. A A_1, B' r sieno le tracce orizzontali dell'altro muro a scarpa che incontra il primo sotto un'angolo qualunque A A_1 E, ed A' B' C' D' sia la sua sezione retta abbattuta sopra il coordinato verticale.

Apparecchio. Perchè l'incontro avvenga regolarmente bisogna che le pietre costituenti i diversi corsi nei due muri abbiano respettivamente la medesima altezza. Per non complicare inutilmente la figura non considereremo che il 1° e 2° corso dei due muri e per maggior generalità supporremo che sia necessario l'apparecchio a facette; allora determinato questo apparecchio in uno dei muri, per esempio, in quello proiettato sopra E' F' G' I', col metodo indicato al N.° 519, rimarrà determinato anche sull'altro. Conducendo per i punti I', h', g' altrettante orizzontali si avranno gli spigoli D', c', b' sulla scarpa del muro A' B' C' D', e le faccette su quest'ultimo verranno somministrate dalle rette D' d'', C' c'' normali alla b' D', e che terminano al punto d'incontro colle orizzontali corrispondenti condotte dai punti i'', h'': i punti c'', d'' dovranno trovarsi sopra una retta parallela a b' D'. Ciò fatto, le proiezioni orizzontali degli spigoli del primo muro saranno b_1 g, c_1 h, d_1 i; quelle degli spigoli dell'altro muro saranno b b_1, e c_1, d d_1 facili si gli uni che gli altri a costruirsi.

Ora essendo b_1 la proiezione orizzontale del punto d'incontro dei due spigoli (g b_1, g'), (b b_1, b') e d_1 essendo quella del punto nel quale si incontrano gli altri due spigoli (i d_1, I'), (d d_1, D'), è evidente che la intersezione dei due paramenti inclinati (b d, b' D'), (g i, g' I') si proietterà orizzontalmente secondo la retta b_1 d_1, sulla quale dovranno trovarsi le proiezioni orizzontali c_1 dei punti in cui tutti gli altri spigoli di paramento si incontrano.

Gli spigoli resultanti dall'incontro delle faccette coi letti dei corsi nei due muri si troveranno evidentemente in piani paralleli alle respettive scarpe, ma situati a distanze diverse; e per conseguenza la proiezione orizzontale c_2 d_2 della comune intersezione dei suddetti piani, che si costruisce in un modo analogo a quello adoperato per ottenere la b_1 d_1, non coinciderà con questa ultima retta, ma dovrà resultare ad essa parallela se il disegno è esatto. Inoltre poichè c_2 è la proiezione orizzontale del

Digitized by Google

punto d'incontro degli spigoli dei corsi sulle due scarpe per il primo concio inferiore, e c_3 quella del punto d'incontro degli spigoli provenienti dalla intersezione delle faccette col letto orizzontale del concio medesimo, la c_2 c_3 sarà la proiezione orizzontale della retta secondo cui si intersecano le due faccette. Similmente la d_2 d_3 sarà proiezione orizzontale della intersezione delle due faccette $D' d''$, $F' t''$; e siccome tutte le faccette sono parallele fra loro, dovrà trovarsi c_2 c_3 parallela a d_2 d_3.

Per la disposizione da darsi alle pietre si seguiranno le stesse norme già indicate al N. 519 per i muri semplici a scarpa; solo deve farsi attenzione al luogo dell'incontro nel quale per ciascuno dei corsi una sola pietra dee far parte dell'uno e dell'altro.

Forma dei conci Ci occuperemo soltanto di quelli contenenti l'incontro dei due muri, e particolarmente prenderemo in esame il concio del primo corso che rimane terminato dai due piani verticali x s, E F. Si desume facilmente che il letto inferiore di questo concio ha per modello la figura x A_1 E F r s x; che il letto superiore è composto della faccetta (t c_2 h h_1 c_2 v, t' v' h'' h') e della faccia orizzontale (a c_3 h_1 F r s, v' h'''); che la faccia di giuntura nel piano verticale x s ha per modello la figura A' a' b' c' c'' c''' B'; e quella nel piano verticale E F la figura E' f' g' h' h' h'' F'. Quindi è facile concepire la forma di tutto il concio.

Taglio dei conci. Per tagliare effettivamente il suddetto concio si sceglierà una pietra (*Fig.* 178) che abbia le dimensioni sufficienti, e spianato il suo letto vi si traccerà sopra il modello E F F_1 s_1 A A_1 E eguale al poligono E F r s x A_1 E (*Fig.* 177): quindi spianate a squadra con questo letto le facce E F q, A s_1 c, F F_1 p, F_1 s_1 c si segneranno sulla faccia E F il modello E g g' h h_1 r_1 eguale ad E' f' g' h' h' h''' F' (*Fig.* 177), e sulla testa A s_1 il modello A a b c c_1 s s_1 eguale ad A' a' b' c' c'' c'' B'. Si dirigeranno quindi opportunamente i tagli sulle facce che fanno parte della due scarpe, prendendo le misure occorrenti sulla proiezione orizzontale per determinare esattamente i punti d'incontro degli spigoli; e lo stesso si farà per il taglio delle faccette e della parte orizzontale del letto superiore.

Problema V. *Incontro di un muro a scarpa con un muro retto.*

527. Anche in questo caso i letti dei corsi devono trovarsi sopra i medesimi piani orizzontali nell'uno e nell'altro muro ed una medesima pietra deve in ciascun corso far parte nel luogo dell'incontro di ciascuno dei muri. Per cui, veduta la soluzione del problema precedente, è agevole cosa il tracciare l'apparecchio di questo muro composto, riconoscere la forma di ciascheduno dei conci facenti parte del muro retto e di quello a scarpa, dirigere opportunamente il taglio di essi.

Problema VI. *Accordare due muri a scarpa con un terzo muro a paramento cilindrico.*

528. Sieno A' B' C' D', E' F' G' H' (*Fig.* 179) le sezioni rette di due muri a scarpa: le rette A' F', p' q'_{1}, ... le proiezioni verticali dei letti dei diversi corsi; A α, F γ le tracce orizzontali delle scarpe prolungate fino al loro incontro in (ε, A'): (D β, D'), (G δ, G') gli spigoli superiori delle due scarpe prolungati anch'essi fino al loro incontro in (E, D'). finalmente B o, o E le tracce orizzontali delle facce verticali dei due muri prolungate fino al loro incontro in (o, B').

Apparecchio. Alla superficie cilindrica con cui voglionsi accordare i paramenti esterni di questi due muri debbono resultare tangenti i piani dei paramenti medesimi: perciò la traccia orizzontale di essa dovrà esser toccata dalle tracce orizzontali di questi ultimi. Di più se vuolsi che la direttrice di quella superficie sia circolare, il suo centro dovrà trovarsi sulla retta ε v che divide in due parti eguali l'angolo ε. Si scelga ora sopra una delle tracce orizzontali delle scarpe, per esempio sulla F ε, il punto γ da cui vuolsi far cominciare l'accordamento; il punto analogo sull'altra traccia non sarà più arbitrario, ma si determinerà conducendo γ v perpendicolare sopra F ε, e dal punto d'incontro v con questa ultima, la v α perpendicolare ad A ε. Il punto v sarà il centro dell'arco traccia orizzontale della superficie d'accordamento; e

i punti α e γ saranno le tracce orizzontali delle generatrici di contatto di quello superficie coi paramenti inclinati dei due muri.

La base superiore della superficie, ossia la sua traccia sul piano orizzontale D' G' deve essere identica alla inferiore; perciò essendo l'angolo ε_1 eguale all'angolo ε, se conducesi ε_1 v_1 bisettrice dell'angolo ε_1, e si prende ε_1 v_1 = ε v, sarà v_1 il centro della proiezione orizzontale della base superiore, e u v_1 la proiezione orizzontale dell'asse della superficie Finalmente condotte v_1 δ, v_1 β perpendicolari respettivamente a G δ e D β, i punti δ e β saranno le proiezioni orizzontali degli estremi superiori delle generatrici di contatto, e le rette γ δ, α β le proiezioni orizzontali delle generatrici medesime. È evidente che le tre rette v v_1, α β, γ δ, dovranno resultare parallele fra loro ed eguali

Ciò posto sarà facile ottenere le proiezioni degli spigoli intermedi Primieramente conducendo p' P, q'_1 Q perpendicolari alla linea di terra A' F', dal punto P la P p perpendicolare ad A B, e dal punto Q proiezione di q'_1 la Q p_1 perpendicolare ad E F avremo le proiezioni degli spigoli dei letti sulle due scorpe; elevata di poi da p_1 la p_1 e' perpendicolare a Q p_1 fino all'incontro coll'asse v v_1, faremo centro in e_1 e l'arco di cerchio descritto col raggio e' p_1, al quale resulterà tangente in p_1 anche la retta P p, sarà lo spigolo corrispondente sulla superficie cilindrica.

Il paramento verticale del muro d'accordo deve essere una superficie cilindrica retta perchè possano resultare tangenti ad essa le facce verticali corrispondenti dei due muri dati. Il raggio di questa superficie può essere arbitrario, ma il centro della sua base deve necessariamente trovarsi sulla bisettrice o w dell'angolo o formato dalle tracce orizzontali delle due facce predette Nella nostra figura w è il centro di questa base, e w t il raggio.

Le condizioni di stabilità esigono che le facce di giuntura dei conci facienti parte del muro d'accordamento, sieno normali agli spigoli orizzontali di questo. Ora la superficie esterna di tal muro essendo obliqua, le facce di giuntura resulterebbero superficie storte difficili a tagliarsi: d'altronde nel caso che si contempla le forze agenti sull'opera sono tali da per-

mettere senza pregiudizio della stabilità, che queste facce sieno piane; perciò potremo farle normali alla sezione prodotta nella superficie da un piano orizzontale equidistante dai letti di ciascheduno dei corsi. Supponiamo che si tratti del primo corso inferiore: questa linea intermedia avrà per proiezione verticale la retta $m' n'$, e per proiezione orizzontale la linea $M m m_1 N$, essendo c il centro dell'arco $m m_1$. Condotto perciò in situazione opportuna il raggio c e f, sarà e f la proiezione orizzontale dello spigolo di giuntura nella porzione di faccia curva, e la rimanente porzione del taglio dovrà esser diretta normalmente alla superficie cilindrica verticale; perciò nel nostro caso sarà c b che prolungata passa per w centro dell'arco t b a.

Il piano f e non essendo parallelo alle generatrici, produrrà nel paramento del muro d'accordo una sezione ellittica facile a ritrovarsi nella vera grandezza, poichè considerando diversi punti di questa sezione ed immaginando che il piano si abbatta o parallelamente al coordinato verticale, od anche sul coordinato orizzontale, ruotando attorno alla sua traccia e f, noi avremo la figura e s r f che sarà la porzione di giuntura corrispondente alla superficie d'accordamento.

Forma dei conci. Basta considerare uno dei conci che fanno interamente parte del muro d'accordamento, ed uno di quelli che fanno parte di esso e del muro a scarpa adiacente.

Il concio proiettato orizzontalmente in a b e f g d a, e che fa parte esclusivamente del muro d'accordamento, è terminato da sei facce piane e due cilindriche, che sono: 1ª il letto inferiore avente per proiezione orizzontale e per modello la figura a b e f g d a; 2ª il letto superiore che ha pure per proiezione orizzontale e per modello la figura a b e d; 3ª e 4ª le due facce piane rettangolari aventi per basi a d, b e, e per altezza B' q'; 5ª e 6ª le facce piane aventi per tracce orizzontali g d, e f. Il modello della prima è la figura e s r f e, quello dell'altra si determina nello stesso modo con cui abbiamo sopra accennato potersi costruire la precedente; 7ª la faccia cilindrica verticale avente per base l'arco a b, e per altezza B' q'; 8ª la faccia cilindrica obliqua avente per traccia orizzontale l'arco g f, e per limite superiore l'arco e d.

Il concio consecutivo proiettato in b e f F E b fa

parte del muro d'accordo e di quello a scarpa, ed è terminato da sette facce piane e due cilindriche, le quali sono: 1ª il letto inferiore avente per modello la figura b e f F E b; 2ª il letto superiore che ha per modello la figura b e p_1 Q E b; 3ª la faccia piana verticale proiettata orizzontalmente in E F ed avente per modello la figura E' F' q'_1 p'_1; 4ª e 5ª le facce verticali proiettate in e b ed E t, le quali sono rettangoli aventi per basi queste rette e per altezza l'altezza del concio; 6ª la faccia verticale e f avente per modello la figura e s r f; 7ª la faccia piana in scarpa orizzontalmente proiettata in γ p_1 Q F; 8ª la faccia cilindrica verticale che ha per traccia orizzontale l'arco b t, e per altezza B' q'; 9ª la faccia cilindrica obliqua che ha per basi gli archi f γ, e p_1 e dee accordarsi lungo la generatrice γ p_1 colla faccia in scarpa γ p_1 Q F.

Taglio dei conci Per tagliare convenevolmente i conci deesi spianare prima la faccia che serve di letto inferiore, e tracciare sopra di essa il respettivo modello; si avranno così le linee occorrenti per dirigere il taglio delle facce di giuntura e di quelle di paramento

Abbiasi, per esempio, da eseguire il concio proiettato in a b e f g d a, che supporremo potersi ricavare dal masso m a_1 b_1 c h l a b, (*Fig.* 180); Scelta la faccia del masso che è parallela ai suoi letti di cava (N° 485), spianeremo questa faccia e coll'opportuno modello tracceremo su di essa la figura g d_1 a_1 b_1 e_1 f identica al letto g d a b e f già determinato nelle proiezioni dell'opera. Di poi si taglieranno secondo le rette f e_1, e_1 b_1, a_1 d_1, d_1 g e a squadra col letto stesso le facce verticali f e_1 e h', e_1 e b b_1, a_1 d_1 d a, g d_1 d g' su cui potremo disegnare i modelli respettivi dedotti dalla *Fig.* 179. Allora colle direttrici e b, a d si potrà spianare la faccia che dee servire per letto superiore, e le direttrici stesse offriranno il modo di collocare su questa faccia il modello a b e d in posizione opportuna per esservi tracciato. Ciò fatto noi avremo per tagliare la faccia cilindrica verticale le due direttrici circolari a b, a_1 b_1, e per la faccia cilindrica obliqua i quattro archi d e, e f, f g, g d.

Ciò che si è detto (N.° 517) relativamente alla esecuzione di un paramento cilindrico convesso o concavo ed avente le

generatrici perpendicolari ai letti di un concio, può bastare per il taglio della faccia cilindrica verticale $a\ b\ b_1\ a_1$. Per il paramento obliquo d e $f\ g$ si può porre in pratica il secondo dei mezzi indicati per il precedente. Imperocchè il disegno delle proiezioni somministrerà facilmente i punti in cui le linee curve $d\ e$, $e\ f$, $f\ g$, $g\ d$ sono incontrate da un certo numero di generatrici rettilinee della superficie d e $f\ g$: questi punti riportati sui modelli delle respettive facce di giuntura e dei letti, potranno esser marcati sugli spigoli corrispondenti della pietra, ed allora il taglio del paramento in quistione procederà per piccole faccette di cui potrà verificarsi di mano in mano la posizione.

Problema VII. *Accordare due muri a scarpa con un muro a paramento storto* (*Fig.* 181).

529. Allorchè le sezioni rette di due muri a scarpa sono parallele, il paramento d'un terzo muro che si accorda colle facce inclinate dei primi può essere una superficie storta.

Sieno $A'\ B'\ C'\ D'$, $E'\ F'\ G'\ H'$ le sezioni rette di due muri a scarpa, di cui le direzioni sono parallele e le facce inclinate poste dalla medesima parte. Scelto il piano coordinato verticale perpendicolare a queste direzioni, le sezioni rette sopra indicate saranno le proiezioni verticali dei muri stessi; $S\ T$, $B\ B_1$ perpendicolari alla linea di terra saranno le tracce orizzontali delle loro facce verticali; $E\ E_1$, $A\ A_1$ quelle delle loro scarpe. Uno dei muri sia terminato dal piano verticale $E\ H$ e si estenda indefinitamente nella direzione $E\ E_1$; l'altro termini al piano verticale $A\ D$ e si estenda indefinitamente nella direzione $A\ A_1$. Le proiezioni orizzontali degli spigoli dei corsi saranno $D\ D_1$, $p\ p_1$, ... per questo muro, $H\ H_1$, $p_1\ p_2$, ... per l'altro.

Apparecchio. I corsi nei due muri devono avere la medesima altezza; perciò la superficie d'accordamento coi paramenti inclinati di essi può essere generata da una retta, che mantenendosi costantemente orizzontale si muova dalla posizione $A\ E$ e si appoggi sopra le due rette ($E\ H$, $E'\ H'$), ($A\ D$, $A'\ D'$. Queste rette essendo ambedue parallele al piano coordinato verticale, ne segue che la superficie generata sarà

una Paraboloide iperbolica avente per direttrici le rette suddette, e per piano direttore il coordinato orizzontale. Gioverà quindi rammentare; 1° che un piano qualunque parallelo al coordinato verticale produce in essa una sezione rettilinea, per cui è dato potere considerarla come generata anche da una retta che si muova parallelamente a quel piano appoggiandosi sulle due rette ($A\,E$, $A'\,E'$), ($D\,H$, $D'\,H'$); 2° che la sezione prodotta da un piano parallelo alla linea di terra è una parabola, ed una iperbole quella prodotta da ogni altro piano qualunque (*Geom. Descritt.*). È quindi manifesto che congiungendo con linee rette i punti D, H; p, p_1; . . . . si avranno le proiezioni orizzontali degli spigoli dei letti nel paramento considerato.

L'altro paramento del muro cercato, può essere un piano verticale $B\,S$, giacchè deve accordarsi colle facce verticali dei muri dati.

La disposizione delle pietre nella superficie storta è subordinata alla condizione che le facce di giuntura di ciaschedun concio resultino normali ai due spigoli del corso a cui appartiene. In questo caso però esse resulterebbero superficie storte, come nel Problema precedente, e il loro taglio riescirebbe di molta difficoltà, senza vantaggio apprezzabile della stabilità dell'opera. D'altronde facendole normali ad un solo spigolo si otterrebbero all'altro spigolo degli angoli troppo acuti, per cui si fanno ordinariamente normali ad una generatrice ($\alpha\,\alpha_1$, $\alpha'\,\beta'_1$) intermedia agli spigoli del corso, ed equidistante da essi. Così ad avere la direzione dei tagli per un concio del terzo corso e facente parte esclusivamente del muro d'accordo, si tracceranno per due punti scelti opportunamente sulla generatrice ($\alpha\,\alpha_1$, $\alpha'\,\beta'_1$) due rette $v\,r$, $x\,z$ od essa perpendicolari; e dai punti r, z due perpendicolari a $B\,S$: allora le spezzate $v\,r\,s$, $x\,z\,u$ saranno le proiezioni orizzontali delle facce di giuntura del concio considerato. Tutti gli altri conci devono esser tagliati per modo che gli spigoli di giuntura $v\,r$, $x\,z$ di ciascuno non si trovino mai sul prolungamento o molto prossimi agli spigoli corrispondenti dei conci del corso superiore e inferiore.

Forma dei conci. Il concio proiettato in $v\,r\,s\,u\,z\,x\,v$ ha sette facce piane ed una storta, che sono: 1° e 2° i due

letti inferiore e superiore, il primo dei quali ha per modello la figura $v\ r\ s\ u\ z\ x\ v$, ed il secondo $r\ s\ u\ z$; 3ª la faccia proiettata in $s\ u$, la quale è un rettangolo avente per base $s\ u$ e per altezza $G'\ q'_1$; 4ª e 5ª la faccia piana proiettata in $x\ z$, il cui modello è facilissimo a costruirsi, unitamente all'altra faccia proiettata in $z\ u$ la quale è un rettangolo che ha per base $z\ u$ e per altezza $G'\ q'_1$; 6ª e 7ª le facce analoghe per l'altra giuntura $v\ r\ s$; 8ª la faccia storta proiettata orizzontalmente in $v\ r\ z\ x$.

Considerando poi uno dei conci che fanno parte del muro d'accordamento e di uno dei muri a scarpa proposti, per esempio, quello compreso fra i tagli $v\ r\ s$ e $p_2\ D_1\ B_1$ si vedrà che si compone di otto facce piane ed una storta, le quali sono: 1ª il letto superiore avente per modello la figura $D_1\ B_1\ B\ s\ r\ D\ D_1$; 2ª il letto inferiore eguale alla figura $v\ r\ s\ B\ B_1\ p_2\ p\ v$; 3ª e 4ª le facce piane proiettate in $B_1\ B$ e $B\ s$, e che sono eguali ai rettangoli aventi per basi queste rette e per altezza $G'\ q'_1$; 5ª la faccia di paramento nel piano verticale $A_1\ B_1$ avente per modello la figura $p'\ q'\ C'\ D_1$; 6ª la faccia a scarpa ($p\ D\ D_1\ p_2$, $p'\ D'$), 7ª e 8ª le due facce piane costituenti la giuntura $v\ r\ s$, 9ª la faccia storta proiettata in $p\ D\ r\ v$, e che si accorda col paramento a scarpa lungo la retta ($p\ D_1$, $p'\ D'$).

Taglio dei conci. Per tagliare il primo dei conci sopra descritti si sceglierà una pietra dell'altezza del concio, e sul cui letto possa adattarsi il modello del letto inferiore $s\ r\ s\ u\ z\ x\ v$ quindi si taglieranno opportunamente le facce verticali $x\ z$, $z\ u$, $u\ s$, $s\ r$, $r\ v$ e si tracceranno sopra di esse i modelli già costruiti: in tal modo si avranno gli spigoli di giuntura sulla faccia storta, e le direttrici per spianare la faccia che dee servire da letto superiore. Si traccerà su questa faccia il modello corrispondente $r\ s\ u\ z$, e non rimarrà da tagliare altro che la superficie storta, la quale si otterrà facilmente posando di mano in mano il canto di una riga su gli spigoli $v\ r$, $x\ z$ per modo che sia parallela ai due letti del concio e collimi interamente colla pietra.

Per il secondo concio, scelto il masso opportuno (*Fig.* 182), si faranno prima le stesse operazioni per tracciare il letto inferiore $v\ r\ s\ b\ b_1\ p\ q\ v$, e le facce verticali $v\ r\ r'$, $r\ r'\ s'\ s$,

$s\ s'\ b'\ b,\ b\ b'\ b'_1\ b_1,\ p\ b_1\ b'_1\ p'$. Su questa ultima si traccerà il modello $p\ d_1\ b'_1\ b_1$; si spianerà poi il letto superiore, e vi si traccerà il modello $d_1\ b'_1\ b'\ s'\ r'\ d\ d_1$ identico al poligono $r\ s\ B\ B_1\ D_1\ D\ r$ (*Fig.* 181) colle direttrici $p\ q$, $d\ d_1$ si potrà tagliare allora la faccia a scarpa $p\ d_1\ d\ q$, e tirare sopra di essa la retta $q\ d$, la quale unitamente allo spigolo $v\ r'$ servirà per il taglio del paramento storto $q\ d\ r'\ v\ q$.

È da avvertirsi che il taglio della faccia storta dei conci può essere molto agevolato e reso più esatto segnando prima sopra i modelli $x\ z$, $v\ r$; $v\ r$, $p\ D$ i punti in cui un certo numero di generatrici incontrano i respettivi spigoli di giuntura.

530 *Osservazione*. La soluzione precedente suppone che le scarpe dei muri dati abbiano una inclinazione diversa; poichè se essi fossero egualmente inclinate all'orizzonte, il paramento corrispondente del muro che si accorda coi primi sarebbe piano.

531. Negli esempi di apparecchio pel paramento dei muri mostrati nelle *Fig.* 168, 169 e 170, noi abbiamo supposto che tutti i corsi abbiano la medesima altezza, che gli spigoli di giuntura verticali corrispondano in ciascheduno corso al mezzo dei conci del corso immediatamente superiore e inferiore, che le pietre abbiano tutte una relazione costante fra le loro dimensioni, infine che il taglio sia eseguito con la maggiore accuratezza in tutta la estenzione delle facce. Ciò però non ha luogo che in rare circostanze, e quando il muro fa parte di un'opera di tale importanza da meritare un'apparecchio regolarissimo onde le condizioni di stabilità non solo, ma quelle eziandio della bellezza sieno soddisfatte senza riguardo alla economia. Nel maggior numero dei casi sono unicamente le condizioni di stabilità che regolano l'apparecchio, e queste osservate, si ha cura nel resto di usare la massima economia. Così stabilito un *minimum* per la distanza che deve separare gli spigoli verticali in due corsi successivi, si accettano tutte le pietre, la cui lunghezza dà modo di conservare questa distanza, e per le quali essa resulta maggiore; e purchè in un medesimo corso si mantenga costante l'altezza, non si esige che eguale quest'ultima resulti per tutti i corsi di cui il muro componesi.

Simile licenza nell'apparecchio favorisce non poco la economia dell'opera; imperocchè permette in generale l'impiego di tutte le pietre che una cava può somministrare, eccettuando soltanto quelle nelle quali qualche grave difetto nocivo alla stabilità si manifestasse. Ma il massimo vantaggio che può ritrarsi nei muri ordinari si ha dal modo in cui può entro certi limiti eseguirsi il taglio dei conci. Ad eccezione delle facce di paramento che richiedono la maggior precisione, il taglio di tutte le altre facce si fa con una certa cura solo per una piccola estenzione presso gli spigoli visibili del paramento; nel rimanente si lasciano irregolari, siccome dimostra la *Fig.* 183. Gli intervalli x, y che rimangono fra le pietre si riempiono di buona malta e di schegge delle medesime pietre, le quali facilitano in certo modo la posa dei conci in quanto concerne l'esatto combaciamento degli spigoli esterni.

532. Ma se può concedersi un tale abbandono nella esecuzione delle facce interne dei conci nei muri ordinari, e esso da proscriversi totalmente in tutte le opere di qualche importanza, e specialmente in quelle in cui le pietre si trovano sottoposte a forti pressioni verticali. Imperocchè la malta, per quanto possa essere di eccellente qualità, non è mai dotata di tal resistenza allo schiacciamento da equiparare quella delle pietre impiegate: onde è evidente che essa cedendo sotto gli sforzi a cui è soggetta la pietra, questa può trovarsi nel caso di portare in falso e quindi nel pericolo di rompersi.

Senza cercare altrove esempi in appoggio di tale asserzione, che molti e fra gli altri alcuni dei famosi potrebbero citarsi, uno ne abbiamo avuto e di recente qui in Toscana nella ricostruzione del Ponte sospeso sul fiume Cecina presso Volterra. Le guglie di questo Ponte ruinato per una straordinaria piena nel 1846, che scalzò le male eseguite fondamenta di una delle fiancate, furono ricostruite nel 1854 con pietre di natura tufacea; e lasciate riposare per due anni, si diè mano nel 1856 alla montatura delle catene e del nuovo palco. Nell'aprile del 1857, e precisamente quando le catene si trovarono caricate di quasi il totale peso del palco, si manifestarono nei conci degli ultimi due strati superiori di tutte le guglie delle rotture in direzione quasi verticale, onde con-

venne interrompere il lavoro e remuovera il pericolo da quelle rotture minacciato

La cagione del danno non fu tarda a scoprirsi. I conci erano stati tagliati con gran precisione nelle facce di paramento, ma il taglio dei letti era stato trascurato in tutta la estensione loro fin presso gli spigoli esterni, e si erano riempiti i vacui lasciati dalla irregolarità di tale esecuzione con malta e frantumi di mattoni. La pietra, avendo così pochissimi punti stabili d'appoggio sotto una pressione derivante da un peso di circa 190000 chilogrammi, doveva necessariamente rompersi.

533. Rimangono alcune considerazioni da farsi intorno alla posa, cioè intorno ai mezzi di collocare in opera i diversi conci, i quali, per quanta cura siasi avuta nel tagliarli secondo le forme e le dimensioni prescritte dal disegno, non giungeranno mai a comporre il tutto insieme richiesto senza alcune precauzioni che ne assicurino l'esattezza e ad un tempo ne scuoprano quelle leggere imperfezioni che è malagevole se non impossibile scorgere in essi allorchè si trovano fuor d'opera.

La operazione preliminare alla costruzione di qualunque muro si è quella di tracciare sul fondamento già costruito spianato e livellato, la figura determinata dalle tracce orizzontali delle sue facce; lo che servirà a dirigere la posa dei conci dell'infimo corso. Di poi si collocheranno convenientemente prima le pietre sugli angoli, accordando le loro facce apparenti con quelle dei corsi inferiori, e queste serviranno al costruttore come di capi saldi per allineare perfettamente le facce apparenti delle pietre intermedie. Quando il collocamento delle pietre di ciascheduno corso è compito, si livellerà accuratamente il letto superiore.

Ciò pei muri retti e a paramento piano; trattandosi di muri a paramento cilindrico si segneranno le tracce dei paramenti sul letto spianato del fondamento: quindi si fisseranno dei punti a piacere su ciascuna curva, e in essi si collocheranno stabilmente delle aste disposte per modo che uno spigolo di ciascheduna coincida con quella generatrice che passa per il punto segnato sulla traccia al piede dell'asta medesima. Fatto ciò si taglieranno sulle stesse curve segnate sul letto del fondamento delle sagome di tal lunghezza che arrivino da un'asta all'altra; e

queste potranno esser fissate in guisa da dirigere la posatura dei conci in tutta la lunghezza dei corsi.

Pei muri a scarpa potranno molto utilmente adoperarsi delle aste direttrici, aventi coll'orizzonte la inclinazione dovuta, le quali serviranno all'allineamento delle facce apparenti delle pietre in ciascun corso.

Nell'incontro di due muri, o nel caso di due muri accordati da un terzo la posa dee sempre cominciare da quei conci che fanno parte dei due muri.

Nel caso di un muro, il cui paramento è una superficie storta, si potrebbero egualmente usare delle aste direttrici fissate secondo la inclinazione determinata dalle generatrici. Ma a cagione della diversa loro inclinazione e della difficoltà a tenerle in posizione stabile, è forse miglior consiglio costruire delle grandi sagome verticali secondo le sezioni prodotte da piani verticali nella superficie in questione, poichè la loro posizione può fissarsi molto più facilmente delle aste direttrici.

CAPO IV.

Nozioni generali intorno alle volte in pietra da taglio.

534. Qualunque opera murale destinata a ricoprire un'area data ed organizzata per guisa da sostenersi sì pel mutuo contrasto delle parti che la compongono, coadiuvato sovente dalla forza della malta impiegata per congiungerle, sì per la resistenza di altre masse murali cui essa si appoggia, porta il nome di *volta*.

I muri eretti a sostegno delle volte si chiamano *piedritti*, e possono essere retti o a scarpa.

535. Le volte sono sempre terminate da due superficie:

la inferiore che riguarda direttamente l'area ricoperta, ha il nome di *intradosso*, l'altra, che qualche volta è parallela alla prima, chiamasi *estradosso*.

Quando l'intradosso è una superficie continua, la volta è *semplice*; si dice *composta* allorchè l'intradosso resulta dalla combinazione di più superficie.

536. L'intradosso d'una volta è ordinariamente una superficie curva, ma in alcuni casi può esser piana: allora la volta distinguesi colla denominazione di *volta in piattabanda*, o con l'altra più semplice di *piattabanda*.

Nel primo caso la natura dell'intradosso serve pure a specificare le volte. Così diconsi *volte a botte*, quelle di cui l'intradosso è una superficie cilindrica, *volte coniche*, *volte di rivoluzione*, *volte storte* ec. quelle delle quali lo intradosso è respettivamente una superficie conica, o di rivoluzione, o storta ec.

537. Le pietre componenti una volta, qualunque sia la generazione del suo intradosso, si chiamano *cunei*; la divisione dell'opera in cunei si distingue col nome di *apparecchio* della volta.

I cunei si dispongono sempre per filari sovrapposti gli uni agli altri. Ciascun filare è ordinariamente compreso fra due superficie sviluppabili, le cui generatrici sono altrettante normali dell'intradosso estese fino all'estradosso: e in queste superficie si trovano tutte le facce dei cunei componenti quel medesimo filare, facce che non si toccano e che non fanno parte nè dell'intradosso nè dell'estradosso.

Contro tali facce sono diretti gli sforzi a cui è sottoposta la volta, e si chiamano *facce di giacitura* o *letti* dei cunei: mentre si chiamano *teste* quelle che in un medesimo filare stanno in contatto, e *facce d'intradosso* o *d'estradosso* si dicono le altre che fanno parte delle superficie aventi lo stesso nome.

538. Quando la volta termina ad un piano non orizzontale, la sezione che ne resulta dicesi *fronte della volta*; si chiamano allora *fronti* le teste dei cunei che si trovano in quel piano, e *spigoli di fronte* diconsi le linee dividenti le diverse teste fra loro.

Le linee poi secondo cui le superficie, che comprendono

i diversi filari dei cunei, intersecano l'intradosso o l'estradosso chiamansi *spigoli d'intradosso*, o *d'estradosso*.

539. Nelle volte semplici la direttrice dell'intradosso è ordinariamente una curva tracciata sopra un piano verticale e simmetrico ad una retta verticale situata su quel piano. Il numero e la distribuzione dei filari, la forma e la grandezza delle teste dei cunei dipende sempre da una tal curva, come dalla natura di essa dipendono anche le varietà delle volte di una medesima specie.

L'area rettangolare $A\,B\,B_1\,A_1$ può, per esempio, coprirsi con una volta a botte il cui intradosso abbia per direttrice il semicircolo $A'\,C''\,B'$ (*Fig.* 184); ma può esser coperta anche da una volta egualmente cilindrica ed avente per curva direttrice dell'intradosso la semiellisse $A\,B\,D$ (*Fig.* 185) col semiasse maggiore verticale, ovvero l'altra $A\,B\,D$ (*Fig.* 189) coll'asse minore verticale, oppur'anche la semiovale $m\,p\,n$ (*Fig.* 186), o l'arco di circolo $A\,B\,D$ (*Fig.* 187).

Per distinguere fra loro tutte queste volte che d'altronde sono della medesima specie si dice che la prima è di *tutto sesto*, la seconda di *sesto rialzato*, le ultime tre di *sesto scemo*.

540. Chiamasi *apertura* ed anche *corda* di una volta la distanza che separa i due piedritti R ed S che la sostengono (*Fig.* 184), o la corda $A'\,B'$ della direttrice dell'intradosso. Chiamasi *saetta* o *freccia* la perpendicolare $C'\,C''$ elevata sul mezzo della corda fino al punto più alto della direttrice.

Dalla relazione che passa fra la saetta e la corda si potrà quindi dedurre il sesto della volta, la quale resulterà di tutto sesto allorchè la saetta è eguale alla semicorda, di sesto scemo se la prima è minore della seconda, di sesto rialzato se questa invece è minore dell'altra.

Havvi il *sesto ogivale* $m\,p\,n$ (*Fig.* 188), detto anche *sesto acuto*, o *a terzo punto*, il quale consta di due archi di circolo descritti respettivamente col centro nelle estremità m ed n delle corde, e col raggio eguale alla corda stessa. Ma questo sesto è quasi andato in disuso.

541. La posa delle pietre che compongono le volte esige un'armatura in legname, particolare a ciascuna specie di esse, e destinata a sostenere i diversi filari di cunei durante la costruzione. Queste armature non vanno esenti da una certa flessibilità

che fa loro prendere diverse forme secondo l'avanzamento della costruzione. Allorchè poi si toglie l'armatura, operazione che in arte chiamasi *disarmamento* della volta, succedono dei movimenti più sensibili: i cunei dei filari e più elevati si abbassano più o meno secondo la estensione, il peso e la forma della volta; mentre quelli dei filari intermedi fra il precedente e i piedritti si rialzano pel semplice effetto dell'abbassamento dei primi. In onta a questi movimenti dovrnno le pietre sostenersi scambievolmente al disopra di uno spazio vuoto in virtù della forma di cuneo che esse hanno, è evidente che si troveranno sottoposte a fortissime azioni meccaniche; onde in generale una volta può dirsi tale opera da reclamare la più severa applicazione dei principi della scienza.

542. Il bisogno di questa applicazione si manifesta appena vien proposta la curva A' C'' B' (*Fig.* 184) che deve servire a formare una volta: imperocchè è necessario stabilire immediatamente su questa curva i contorni dei cunei; operazione che obbliga ad occuparsi della direzione ed estensione delle facce di giuntura, della estensione delle facce di introdosso, e del volume respettivo dei diversi pezzi.

Il tracciato di tali contorni sulla curva A' C'' B' può sempre farsi in più maniere, a seconda della natura della volta, della sua estensione e destinazione, ed anche a seconda delle quistioni a cui nel seguito può dar luogo. Tuttavia hannovi delle regole generali da cui non conviene allontanarsi che il meno possibile, e queste noi esporremo brevemente nella ipotesi d'una volta a botte.

543. La prima e principal regola da seguirsi è che le facce di giuntura n' n'', o' o'', p' p'', q' q'' resultino tutte normali all'introdosso della volta, avvenendo sovente all'incontro di quelle facce con questa ultima superficie la rottura delle pietre.

Se dunque la volta A' C'' B' è di tutto sesto, resulta evidente che le linee o' o'', p' p'' . . . . dovranno essere dirette secondo i raggi o' C', p' C' . . . . . del semicerchio A' C'' B'.

Se la curva data è un elisse A B D (*Fig* 185 e 189), gli spigoli di giuntura r s, t u, v x, ec., o n, v u, ec. dovranno essere normali a questa elisse. Ma in certi casi, pur-

chè le superficie di giuntura sieno semplici e poco si discostino dalla normale, potrebbe giovare che le linee *r s*, *t u*, *v x*, ec. che corrispondono alla curva data *A B D*, non fossero normali a questa curva, e talora essere anco necessaria che quelle linee non fossero rette.

544. Pria di tracciare le linee di giuntura bisogna determinare il numero e la larghezza delle superficie d'intradosso dei cunei. Quanto al numero è necessario che esso riesca sempre dispari: perchè se fosse pari saremmo obbligati a chiudere la volta posando due cunei ad un tempo, o posando un cuneo che non occuperebbe il mezzo della volta. Nel primo caso la posa sarebbe difficilissima; nel secondo la volta caricherebbe inegualmente i due lati della sottoposta armatura durante l'esecuzione, e sarebbe tanto più esposta a deformarsi. Quanto alla larghezza dei cunei prescrivesi che le loro superficie d'intradosso abbiano la medesima corda: lo che nel caso del cerchio obbliga a dividere la curva direttrice in archi eguali.

Ma la condizione delle eguali larghezze per le facce di intradosso può condurre a dei volumi troppo disuguali dei cunei; inconveniente che è necessario evitare. Così nel sesto scemo *A B D* (*Fig.* 189), le normali alla sommità essendo meno divergenti di quelle agli estremi, i cunei corrispondenti a questi ultimi, e gli altri vicini ad essi potrebbero riescire pezzi troppo grossi. Tal circostanza unita talvolta alla difficoltà di aggiustare l'estradosso coi corsi delle pietre che debbono ricoprirlo obbliga sovente a ricorrere a delle facce ineguali d'intradosso (N.° 547) pei cunei. In tali casi però si ha cura che queste facce crescano o decrescano per gradi a misura che si allontanano dagli estremi.

545. Si dà il nome di *chiave* al cuneo *z* che rimane alla sommità della volta (*Fig* 185), e di *controchiavi* agli altri due *c*, *c'* fra i quali è compreso. Si chiamano *pulvinari* i cunei *v*, *w* che posano immediatamente sui piedritti, ed anche *cunei di nascita*. Questi partecipano dei corsi dei piedritti colle loro facce di giuntura orizzontali, e dei filari della volta con le facce inclinate *r s*, *r' s'*. Gli spigoli della volta proiettati in *A* e *D* diconsi *linee di nascita*, e *piano di nascita* si chiama quello determinato da queste linee, e sul quale riposano i pulvinari.

Digitized by Google

546. La estensione delle superficie di giuntura o dei letti dei cunei richiede anch' essa particolare osservazione perciò che ha relazione con la stabilità. Si crede talvolta di aumentare il legame fra i diversi cunei delle volte facendo le giunture spezzate m n o, m' n' o' . . . . (*Fig.* 189), denominate dai pratici *crocette*. Se la esecuzione di tali facce facenti canto in n, n' . . . . e delle altre dei cunei sottoposti, facenti costola, potesse ottenersi perfetta, senza dubbio tali giunture vantaggerebbero il vicendevole collegamento dei cunei, e la stabilità per conseguenza delle volte. Ma come la esattezza nel lavoro è impossibile a raggiungersi, resulta manifesto lo inconveniente di questa forma nelle giunture, le quali facilmente si rompono ponendo l' opera nel grave pericolo di ruinare. Laonde conviene per quanto si può evitare l'uso delle crocette, e dare alle superficie o n, o' n' . . . . tale estensione da differire il meno possibile dalle altre n a, n' a' . . .; di più debbono riescire talmente proporzionate al peso che le preme da resistere di per se stesse senza il soccorso delle parti orizzontali m n, m' n' . . . .

547. Quando la fronte di una volta fa parte del paramento di un muro di ordinaria struttura, l' estradosso della volta può essere determinato da una superficie qualunque. Siamo liberi allora di fare eguali o poco differenti fra loro le giunture n' n'', o' o'' . . . . (*Fig* 184), e di terminare i cunei con una faccia orizzontale ed una verticale; ossivvero di farli terminare da una superficie curva che può esser parallela a quella d' intradosso, ed anche non parallela siccome vien dimostrato dalle *Fig.* 186 e 187.

Ma in tutti i casi, nei quali il muro del cui paramento fa parte la fronte della volta, è costruito in pietra da taglio è necessario di disporne l' estradosso per modo che i corsi costituenti il muro si aggiustino coi cunei della volta. Bisogna allora che l' altezza delle facce verticali m p, m' p' . . . . di questi ultimi sia eguale a quella dei corsi. Se questi hanno la medesima altezza e le facce d' intradosso dei cunei sono egualmente larghe, le giunture come r s, t u . . . . (*Fig.* 185) riesciranno differentissime in estensione, e i cunei alla chiave z, c, c' resulteranno al paragone degli altri molto voluminosi.

D' altro canto, se per avere delle giunture d' eguale esten-

sione, si terminano esse verso l'estradosso ad una linea parallela alla direttrice dell'intradosso, si otterranno, prendendo eguali le facce di giuntura, delle altezze pei corsi del muro di mano in mano decrescenti e che finiscono quasi a nulla alla chiave.

È difficile spesse volte trovare una via di mezzo che offra modo di evitare questi inconvenienti opposti. Pure a forza di tentativi e coll'aiuto di un po' di gusto riesce superare tali difficoltà.

548. Un oggetto che in talune circostanze reclama molta precisione e calcolo è la spessezza da assegnarsi alle giunture dei cunei; cioè a dire la grossezza dello strato di malta che suole interporsi fra i letti dei cunei stessi. Per una piccola volta la quale nel disarmamento non può prendere che un movimento poco sensibile, la spessezza delle giunture può essere eguale a quella determinata pei corsi dell'edificio di cui fa parte. Allora conosciuta questa spessezza bisognerà tracciare l'apparecchio di fronte della volta per modo, che l'arco della superficie d'intradosso di un cuneo moltiplicato pel numero dei cunei, più la spessezza di giuntura moltiplicata per il numero dei cunei aumentato di uno, faccia l'arco intero che è direttrice dell'intradosso della volta.

La soluzione di una tale quistione non è però così semplice per le grandi volte. In esse le giunture prendono, dopo il disarmamento e anche durante la posa, se le armature sono dotate di qualche elasticità, delle spessezze differentissime da quelle che erano state dapprima supposte; onde bisogna valutare a *priori* i cangiamenti che esse possono provare secondo la posizione dei cunei per avere definitivamente il resultato che vuolsi ottenere.

549. Per ogni volta geometricamente definita, cercheremo: 1° il sistema d'apparecchio più conveniente e comunemente adottato, e determineremo le proiezioni della volta e della sua divisione in cunei; 2° dedurremo da queste proiezioni la forma particolare di ciaschedun cuneo; 3° indicheremo le regole da seguirsi per dirigere il taglio.

CAPO V.

Piattabande.

550. Ha il nome di Piattabanda ogni volta, il cui intradosso è piano e orizzontale (N°. 536); e si impiega per coprire le porte o le finestre d'un edifizio perchè meglio conviene alla forma degli affissi interni di legname che ordinariamente è rettangolare. S'impiega pure questa specie di volta per coprire delle gallerie o altri spazi di figura rettangolare perchè offre il vantaggio di somministrare per una data altezza un maggiore spazio interno, e permette di illuminare meglio quest'ultimo che nel caso in cui fosse ricoperto da una volta ordinaria.

Siccome però il bisogno di voltare una galleria o un'altra area qualunque in piattabanda è ben raro, e d'altro canto le quistioni di cui ci occuperemo in questo e nel Capo seguente possono offrire elementi bastevoli alla soluzione di tali problemi, noi limiteremo al solo caso delle porte o delle finestre il trattamento di questa specie di volte.

551. La più essenziale delle regole esposte nel Capo precedente, quella che prescrive dover le giunture dei cunei riescire normali all'intradosso (N.° 545), non può essere sodisfatta nelle Piattabande. Poichè se per non declinare da questa regola si facessero le giunture verticali le pietre non si sosterrebbero scambievolmente; e al solo attrito di una faccia con l'altra, unito alla coesione derivante dalla malta interposta fra le facce medesime sarebbe dovuta la stabilità dell'opera. Ma tale stabilità sarebbe momentanea; la volta non riescirebbe capace di sostenere il più lieve peso, e la più piccola mossa che uno dei piedritti facesse dal di dentro al di fuori servirebbe a determinarne la rovina.

Dovendo pertanto ogni pietra portare almeno su quella che le è adiacente, acciocchè una parte del peso della pietra

stessa e di quello sovrapposto venga distrutto dalla loro resistenza allo schiacciamento, si è convenuto di dare ad essa la forma di cuneo, siccome vedesi nella *Fig.* 190. In grazia di questa forma la obliquità delle giunture aumenta a misura che i cunei si approssimano ai piedritti, e se l'ampiezza della volta fosse considerevole le giunture di questi ultimi presenterebbero angoli acutissimi, e molto esposti a rompersi perchè il peso della parte di volta situato verso la chiave e sostenuto dalla resistenza al movimento offerto dagli angoli medesimi. Onde possiamo inferire che non può esser concesso di voltare in piattabanda che degli spazi limitati.

552. Le condizioni di stabilità dedotte dalle teorie della Statica prescrivono che tutte le giunture *M m*, *L l* . . . . concorrano in un medesimo punto *C* della verticale condotta pel mezzo della chiave e della volta, e determinano per limite di obliquità delle giunture *M m*, *N n* dei pulvinari *X*, *Y* l'angolo di 30 gradi colla verticale. Questo angolo *A M C* può esser maggiore non minore di 30 gradi se vuolsi stabilità sufficiente. Dal che è agevole concludere che data l'apertura o corda *M N* di una piattabanda, si potrà sempre costruire sopra *M N* un triangolo equilatero *M C N*; il prolungamento dei lati *C M*, *C N* somministrerà i letti *M m*, *N n* dei pulvinari, e tutti gli altri letti dei cunei rimarranno determinati.

Ma è necessità indeclinabile di eseguire il taglio dei cunei e la lor posa con la massima precisione. Imperocchè al più piccolo movimento dei piedritti, o al sopravvenire di qualche oscillazione nel sistema, la chiave e i cunei vicini si abbassano, la linea *M N* si deforma divenendo convessa verso il basso, ed è forza ricorrere sollecitamente alle riparazioni.

553. Si è cercato ovviare a tale sconcio spezzando le giunture nel modo indicato dalla *Fig.* 191. Ma se è certo che in grazia di questa disposizione il sistema resulti meglio legato, un tal vantaggio non trovasi compensato dagli inconvenienti a cui conduce lo spezzamento delle giunture. Questi inconvenienti non sono pochi: 1° lo scarto della pietra è più considerevole; 2° se il taglio non è perfetto la posa riesce difficile e difettosa; 3° lo spezzamento delle giunture si oppone alla introduzione della malta, della quale non possono mai ben

guarnirsi le parti orizzontali *m r, c b, v k*; 4° nel disarmamento della volta queste parti si serrano più delle altre parti in ciascuna giuntura; 5° non prendendo tutte le parti della giuntura una larghezza uniforme, avviene bene spesso che le faccette orizzontali *m r, c b, v k* non si trovano sopra la direzione d'una stessa linea retta; 6° l'*orsatura*, che è l'operazione in grazia della quale si distruggono sui paramenti di ogni opera le piccole ineguaglianze provenienti dalla posa delle pietre, non può ristabilire nè la uniformità di larghezza nelle giunture, nè la orizzontalità delle linee *m r, c b, v k*; 7° infine la resistenza del sistema trovandosi dovuta alla resistenza delle crocette *c b a, b c d* . . . . tutto lo sforzo è da queste sopportato, e ne avvengono ordinariamente delle rotture *r s, v u* che inducono prontamente la ruina dell'opera.

554. Quello che può farsi con speranza di buon successo si è di apparecchiare i cunei per modo che ciascuno abbia, a partire dai pulvinari, un poco di aggetto sul cuneo precedente al disopra della linea che vuol darsi all'estradosso, tagliando così quest'ultimo secondo la forma presentata dalla linea *m l o* . . . . (*Fig.* 190). Fatta poi con accuratezza la posa e la introduzione della malta fra le giunture, si disarma la volta finchè la malta è ancora fresca, e perchè la chiave prenda tutto l'abbassamento che potrebbe temersi si carica l'estradosso d'un peso eguale almeno al carico che dave la volta sopportare dopo la esecuzione. Se nel movimento delle diverse parti, le giunture in qualche luogo si aprissero s'introduce fra di loro buona malta; di poi allorchè questa ha fatto presa ed è bene asciutta si fabbrica al di sopra dell'estradosso, e l'orsatura in ultimo fa scomparire tutte le irregolarità che l'abbassamento dei cunei ha potuto produrre nell'intradosso.

555. Le piattabande si distinguono in *rette* ed *oblique* secondo che la faccia interna dei piedritti è perpendicolare od obliqua sulla fronte della volta.

Avendo escluso lo esame delle piattabande destinate a coprire grandi spazi, noi considereremo il caso delle porte o finestre coperte da questo genere di volte nei muri retti, in quelli a scarpa, e nei muri a paramento curvo.

PROBLEMA I. *Costruire una piattabanda retta in un muro a paramento piano e verticale* (*Fig* 192).

556. Sia $l\ g\ w\ v$ un muro, ed $x\ a$ perpendicolare a $v\ w$ la direzione d'una apertura, porta o finestra rettangolare, da farsi in questo muro. Sia (a d, a' d') l'ampiezza dell'apertura; i due fianchi $a\ a_1$, d d_1 perpendicolari alla faccia di paramento $v\ w$ potrebbero esser prolungati dalla faccia $v\ w$ all'altra $l\ g$; ma nelle buone costruzioni, e particolarmente trattandosi di porte, sogliono essere questi fianchi tagliati secondo la forma $a\ a_1$ b c e, d d_1 b_1 c_1 e_1 di cui le facce verticali $a\ a_1$, d d_1 chiamansi *soglie* della porta o finestra; le facce più piccole a_1 b, d_1 b_1 costituiscono ciò che si chiama la *battuta* della porta, le altre b c, b_1 c_1 la *controbattuta*, infine le ultime c e, c_1 e_1 gli *squarci* Tali squarci si continuano anche nello intradosso della piattabanda; onde se immaginiamo prodotta in essa una sezione retta col piano verticale $x\ \alpha$, questa sezione abbattuta parallelamente al coordinato verticale presenta ordinariamente la forma $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \varepsilon_1\ \alpha_1$, in cui $\alpha\ \beta$ è la larghezza della soglia, $\beta\ \gamma$ è la battuta, $\gamma\ \delta$ la controbattuta, $\delta\ \varepsilon$ lo squarcio, $\varepsilon\ \varepsilon_1$ l'altezza della volta al di sopra dello squarcio, $\alpha\ \alpha_1$ quella al di sopra della soglia.

Apparecchio. Ciò che precede basta per render conto del sistema d'apparecchio adottato nel problema attuale. Per la qual cosa diremo soltanto che se prendesi $c'\ c''$ = $\beta\ \gamma$; $e'\ e''$ = $\varepsilon\ t$, $g\ g''$ = $\alpha\ \alpha_1$, le parallele e le perpendicolari condotte alla linea di terra dai punti c'', e'', g'' somministreranno la proiezione verticale della battuta e dello squarcio sulla piattabanda, le rette (c e, $e''\ e''$), (c, e_1, c''_1 e''_1) saranno le intersezioni dello squarcio dei piedritti con quello della volta Perciò l'intradosso di questa si troverà composto di quattro facce piane cioè: 1ª la porzione orizzontale che sovrasta ai piedritti, (a a_1 d d_1, a' d') volgarmente detta *soglia*; 2ª la porzione verticale (b b_1, c' c'' c''_1 c'_1) costituente la battuta; 3ª la porzione orizzontale (b c c_1 b_1, c'' c''_1) costituente la controbattuta; 4ª la porzione inclinata (c e e_1 c_1, c'' e'' e''_1 c''_1) costituente lo squarcio che sovrasta a quello dei piedritti

Per evitare gli angoli troppo acuti in a' e d' coi quali

terminerebbero i pulvinari P' e P'' si usa di portare il loro letto orizzontale n' n', m'_1 n'_1 che hanno in comune coi corsi del muro, un poco più basso della soglia della volta.

La proiezione orizzontale di ogni cuneo può facilmente determinarsi. Così per il cuneo rappresentato verticalmente dal trapezio a' a'' z' s' si otterrà la proiezione orizzontale della soglia proiettando a', a'' in a ed a_1 e conducendo a a_1, a_2 a_3 perpendicolari ad a d; il rettangolo a a_1 a_2 a_3 sarà la soglia cercata; ed a_1 a_2 la proiezione orizzontale della battuta. I punti i', i'' proiettati sopra b b_1 in i ed i_1 somministrano il piccolo rettangolo i i_2 i_3 i_1 per proiezione orizzontale della controbattuta, e i punti r', r'' proiettati in r ed r_1 sulla e e_1 determinano il trapezio r i_1 i_3 r_1 proiezione orizzontale dello squarcio. Le altre facce del cuneo si comprendono tanto agevolmente che non abbiamo creduto necessario indicarne nemmeno le proiezioni orizzontali per non complicare di più la figura.

Forma dei cunei. Consideriamo il pulvinare o cuneo di spalla rappresentato verticalmente dalla figura n' n' g'' s' a' m'. Esso componesi di undici facce piane, le quali sono: 1ª la faccia orizzontale g' a' costituente il letto inferiore che si appoggia immediatamente sul piedritto, e che ha per modello la figura a a_1 b e e g w a'; 2ª il fianco rettangolare (g w, n' g''); 3ª la faccia che si trova nella fronte della volta, e segnatamente sul prolungamento del piedritto, la quale ha per proiezione orizzontale w a, e per modello la figura n' g'' s' a' n' n'; 4ª la faccia d'estradosso proiettata verticalmente in s' g'', che ha per modello il rettangolo di altezza g w e di base g'' s'; 5ª la faccia opposta alla fronte proiettata orizzontalmente in r e g, ed avente per modello la figura n' g' s' r' e'' n'' n'; 6ª il piccolo rettangolo (a_1 a, a' m') che fa parte della soglia del piedritto; 7ª la faccia verticale a_1 b sul prolungamento della battuta, che ha per modello la figura n' m'' c'' i' a' m'; 8ª il rettangolo (b c, m'' c'') che fa parte della controbattuta dell'intradosso; 9ª la faccia (c e, m'' c'' e'' n'') che fa parte dello squarcio del piedritto; 10ª la faccia (i_1 r e c, i' r' e'' c'') porzione dello squarcio dell'intradosso della volta; 11ª la faccia proiettata in a' s', la quale ha per modello la figura h l p q o u h facile a costruirsi in grazia dell'abbattimento fatto sul piano a' g'.

Lasciamo al lettore la cura di riconoscere le facce dei cunei

adiacenti che non offrono veruna difficoltà, attesa la maggiore semplicità di loro forma.

Taglio dei cunei. Occupiamoci del pulvinare. Per eseguire il taglio di questa pietra converrà, scelto il blocco opportuno, fare astrazione dallo squarcio, e prima tagliare il parallelepipedo *A B C D E F G H* (*Fig.* 193), avente per base *B C F G* eguale al rettangolo (*g w*, *g' g''*) (*Fig.* 192). Quindi sulle facce opposte *A B G H*, *C D E F* si tracceranno le fronti *B A a h G* e *C F f l g* e respettivamente identiche ai poligoni *m' a' s' g'' n' m'* ed *n' g'' s' r' e'' n'' n'* della *Fig.* 192. Si prolungherà *f l* fino ad incontrare lo spigolo *D E* in a_1, da questo punto si tirerà a_1 *a* parallela allo spigolo *A D*, e togliendo alla pietra il prisma triangolare *a H h f E* a_1 rimarrà l'altro prisma retto *D G* avente per base la fronte *B A a h G* del pulvinare. Ciò fatto tracceremo sulla faccia *a* a_1 *f h*, che per tal modo viene a scoprirsi nella pietra, la figura *a i k m l f h* servendosi del modello *h l p q o n* somministrato dalla *Fig.* 192, e sulla faccia *A B C D* tracceremo il poligono *A* a_2 *b c e C B* identico all'altro *a* a_1 *b c e g w* della figura medesima. Tirata allora la retta a_2 *i* si determinerà la faccetta rettangolare *A a i* a_2 porzione di soglia del piedritto appartenente al pulvinare; con le direttrici a_2 *i k*, a_2 *b*, a relativo modello *m' m'' c'' i' a'* m', si taglierà la piccola faccia poligona a_2 *i k o b* battuta del pulvinare; con le direttrici *b o* e *b c* potremo eseguire il piccolo rettangolo *b c n o* controbattuta del piedritto, e di seguito l'altro *k m n o* porzione della controbattuta della volta. Infine con le direttrici *c n*, *c e*, e *g* si otterrà la porzione di squarcio appartenente al piedritto, e tutti gli spigoli che determinano l'altra parte di squarcio della volta si troveranno tracciati sulla pietra.

PROBLEMA II. *Costruire una Piattabanda obliqua in un muro a scarpa* (*Fig.* 194).

557. È questo il caso di maggior difficoltà per le piattabande costruite in questa specie di muri. Onde per non complicare soverchiamente la figura supporremo che i piedritti sieno privi di battuta, controbattuta e di squarcio, giacchè la esistenza loro non cambia la soluzione del problema. Solo av-

vertiremo che all'oggetto di evitare i canti troppo acuti con cui terminano talvolta i cunei all'intradosso, usandosi di tagliare questi cunei con una piccola faccetta verticale presso di quelli, noi abbiamo introdotto questa modificazione.

Apparecchio. Passi il coordinato orizzontale per l'intradosso della volta, e siano $A\ B$, $C\ D$ le tracce dei due paramenti del muro; $A\ B$ quello del paramento a scarpa, $C\ D$ quello del paramento verticale, $X\ Y$ sia la linea di terra. Consideriamo la metà soltanto della volta e segnatamente quella che rimane alla sinistra del suo asse che supporremo essere la retta $(z\ z'', z')$. Si prenderà per coordinato verticale un piano perpendicolare a questo asse, si condurrà la retta $z''\ e'$ parallela ad $X\ Y$ ad una distanza $z'\ z''$ eguale all'altezza della volta, e tirata ancora la $h'\ l'$ parallela ad $X\ Y$ e ad una distanza $a'\ h'$ eguale all'altezza che vuol darsi alle faccette, che suole essere di 4 o 5 centimetri, si traccerà l'apparecchio al modo stesso che sarebbe prescritto se la volta fosse retta e da costruirsi in un muro retto.

Se conducesi $C\ F$ perpendicolare ad $A\ B$, può questa retta considerarsi come la traccia d'un piano verticale producente una sezione retta nel muro; onde proiettando B in P' potrà supporsi che $P'\ Q'$ sia la inclinazione della scarpa, e in tal caso il punto Q' proiettato in q e quindi riportato in P sulla $C\ F$ somministrerà un punto della proiezione orizzontale dello spigolo superiore della scarpa medesima, che sarà $P\ Q$ parallela ad $A\ B$.

Per avere le proiezioni dei diversi cunei della volta si prolungheranno le rette $h'\ l'$, $f'\ g'$ fino al loro incontro h'', g'' con $P'\ Q'$; ed h'' somministrerà l'altezza delle faccette sul paramento a scarpa, g'' quella delle facce orizzontali $g'\ f'$ dei cunei estremi sullo stesso paramento. Proiettati i punti h'', g'' sulla $B\ E$ parallela alla linea di terra, e riportate queste proiezioni in h_1, g_1 sulla $B\ C$, le parallele ad $A\ B$ condotte per questi ultimi punti conterranno le proiezioni degli spigoli corrispondenti ad h' e g'. Se dunque si proiettano i punti i', b', a' sulla $A\ B$ in i, b, a; gli altri l', o', h' sulla $h\ h_1$ in l, o, h; il punto g' in g, e finalmente m', d', e' in m, d, e sulla $P\ Q$; le spezzate $i\ l\ m$, b o d, $a\ h\ g\ f\ e$ saranno evidentemente gli spigoli di paramento della volta nella faccia a

scarpa del muro e le rette $i\ i_1$, $b_1\ b_2$, $a_1\ a_2$, come le altre $m\ m_1$, $d\ d_1$, $g\ g_1$ perpendicolari alla linea di terra saranno gli spigoli respettivamente d'intradosso e d'estradosso.

Forma dei cunei. Per giudicare della forma dei cunei bisogna determinare i modelli di ciascuna faccia. Così facendo abbattere il piano determinato dalle parallele $A\ B$, $P\ Q$ sul coordinato orizzontale e colla retta $A\ B$ per asse di abbattimento, il punto P verrà sul prolungamento di $P\ B$ in un certo punto P_1 distante da B della quantità $P'\ Q'$, e gli altri punti corrispondenti a g'' ed h'' verranno respettivamente in β_1 ed α_1 a tali distanze da B che saranno respettivamente eguali a $P'\ g''$, $P'\ h''$. Talchè le parallele ad $A\ B$ condotte per P_1, β_1, α_1, conterranno l'abbattimento dei punti m, d . . . . quello dei punti g, e quello dei punti l, c, h. Fatti questi abbattimenti, la figura $e_2\ m_2\ i\ a\ h_1\ g_2\ f_2$ somministrerà i modelli della fronte di ogni cuneo nella faccia a scarpa del muro. Per la fronte nel paramento verticale $C\ D$ si farà abbattere questa faccia sul coordinato orizzontale, dopo averla condotta parallela al coordinato verticale, come si vede in $C\ D_1$: eseguito l'abbattimento, che non offre difficoltà veruna si troverà la figura S dalla quale avremo i modelli della fronte di ogni cuneo.

I modelli delle facce di giuntura, che nel caso delle volte funzionano da letti, si compongono di quelli delle faccette $a'\ h'$, $b'\ c'$ . . . . e di quelli delle facce piane $g'\ h'$, $c'\ d'$, $l'\ m'$ . . . . I primi sono tutti eguali al trapezio $P'\ P''\ h'''\ h''$ ove $P'\ P'' = i\ i_1$: i secondi si potranno determinare nel modo che andiamo ad esporre per trovare quello della faccia proiettata in $c'\ d'$.

Immaginiamo condotto un piano $s\ t$ perpendicolare all'asse della volta; la sezione che in essa produrrà sarà identica alla proiezione verticale $a'\ i'\ m'\ e'$, e la retta ($v\ w$, $c'\ d'$), secondo la quale è tagliata da questo piano la faccia di giuntura che si considera, sarà eguale a $c'\ d'$. Supposto che questa faccia ruotando attorno al lato $c\ b_2$ si abbatta sopra un piano parallelo al coordinato orizzontale, la retta ($v\ w$, $c'\ d'$) si distenderà sopra una lunghezza eguale a $c'\ d'$, che potremo supporre essere $v_1\ w_1$: allora sulle perpendicolari $d_1\ d'_1$, $c_1\ c'_1$ alla $v_1\ w_1$ prese le parti $v_1\ d_1$, $w_1\ c_1$;

e le altre n_1 d'_1, w_1 c'_1 respettivamente eguali a n d, w c; v d_1, w b_2, resulta il trapezio d_1 c_1 c'_1 d'_1 che sarà il modello cercato.

Taglio dei cunei. Parliamo del cuneo proiettato in b' i' l' m' d' c' b'. Si spianerà la testa di un masso, la cui lunghezza sia almeno eguale alla distanza che separa il punto i_2 da una parallela ad s t condotta per b, e si disegnerà su di essa il modello b' i' l' m' d' c' b'. Allora si potranno spianare le due facce d'intradosso e di estradosso, non che le facce di giuntura b' c' d', i' l' m', e sugli spigoli di queste facce riportare i punti n, w . . . . in cui vengono taglioli dal piano s t. A partire da questi punti si riporteranno sui respettivi spigoli le lunghezze n d_1, n d, w b_2, w c, w b . . . . , e le rette congiungenti i punti in tal modo determinati saranno gli spigoli di fronte tanto sul paramento verticale, che su quello a scarpa del muro. Non resterà allora a fare altra cosa che tagliare la pietra secondo queste ultime linee; le due fronti del cuneo resulteranno convenientemente determinate; e coi respettivi modelli che sappiamo costruire, ne verificheremo la esattezza.

Problema III. *Costruire una piattabanda in un muro retto a paramenti circolari* (*Fig.* 195).

558. Per la intelligenza della questione basta considerare una parte della volta di cui si tratta; e noi ne tracceremo solo la metà, siccome abbiamo fatto nel Problema precedente.

Apparecchio. Ritenuto che il coordinato orizzontale passi per lo intradosso della volta, e che il coordinato verticale sia perpendicolare al suo asse (z z'', z'), possiamo supporre che le due curve g d, g_1 d_1 sieno le tracce orizzontali dei paramenti del muro, e P' la proiezione verticale del piedritto sinistro della piattabanda. Data la semiapertura a' z' della piattabanda, e la sua altezza z' z'', costruiremo sul coordinato verticale la figura a' b' c' d' e' h' g' a' che assumeremo per sezione retta della metà della piattabanda, e ne tracceremo quindi l'apparecchio simile a quello delle piattabande rette nei muri retti per ciò che riguarda la inclinazione delle facce di giuntura o dei letti dei cunei.

Ciò posto se dai diversi vertici a', b', c' . . . . . delle sezioni rette dei cunei si conducono altrettante perpendicolari ad a' z' si troveranno facilmente le proiezioni orizzontali dei corrispondenti spigoli delle facce dei cunei medesimi. Potrebbe però avvenire che una o ambedue le facce dei piedritti tagliassero sotto un angolo molto acuto i paramenti del muro: in questo caso ad impedire la facile rottura dell' angolo acuto si tagliano una o due faccette normali ai paramenti, le quali rimanendo nell' interno dell' opera non inducono modificazione alcuna nella parte visibile dell' apparecchio, e per l' ufficio loro non esigono nemmeno grande accuratezza nel taglio.

Forma dei cunei. Considereremo il cuneo di spalla a' f' e' d' c' b' come quello che è di forma più complicato degli altri, e che si compone di otto facce, delle quali sei sono piane e due sono cilindriche. Queste facce sono

1ª La faccia d' intradosso, avente per modello la figura a f f_1 a_1.

2ª La faccia (a b b_1 a_1, b' a') la quale ha per modello le figura b_2 a_2 a'_2 b'_2. Questo modello si trova abbattendo la faccia, il cui piano passa per la orizzontale del punto v, sul piano orizzontale z w. Allora il punto a' abbattendosi in p, il lato (a a_1, a') avrà per abbattimento la retta a_2 a'_2; il punto b' abbattendosi in o, il lato (b b_1, b') avrà per abbattimento la retta b_2 b'_2; e gli abbattimenti b_2 a_2, b'_2 a'_2 delle due curve secondo le quali il piano a' b' taglia i paramenti cilindrici si troveranno cercando quelli di alcuni dei loro punti intermedi, siccome la figura dimostra.

3ª La faccia piana c' b', avente per modello la figura b d d_1 b_1.

4ª Il rettangolo verticale avente per base d d_1 e per altezza c' d'.

5ª La faccia d' estradosso proiettata in d' e', ed avente per modello la figura a d d_1 a_1.

6ª La faccia di giuntura o letto (a f f_1 a_1, f' e'), il cui modello e_2 f_2 f'_2 e'_2 si trova mediante l' abbattimento operato come per la faccia proiettata in a' b'.

7ª e 8ª Le teste proiettate orizzontalmente sugli archi a b d, d_1 b_1 a_1 e delle quali è necessario costruire lo sviluppo per determinare i loro spigoli nel taglio della pietra.

Crediamo però inutile il dimostrare come si trovi questo sviluppo, che si vede in S eseguito per tutta la fronte convessa della semipiattabonda. Basta solo rammentarsi ciò che è stato detto in Geometria Descrittiva rispetto allo sviluppo delle superficie cilindriche, e alle trasformate delle loro sezioni piane.

Taglio dei cunei. Il cuneo di spalla $a' b' c' d' e' f'$ ci servirà anche in questo caso d'esempio. Scelto un blocco parallelepipedo $A B C D E F G H$ (*Fig.* 196), nai cui letti naturali di cavo $A B C D$, $E F G H$ sia inscrivibile il rettangolo $f c d_1 c_1$ e la cui altezza sia almeno eguale ad $f' f''$, spianeremo quello di questi letti che dee servire d'estradosso e vi tracceremo la figura $G g$ e f identica all'altra $a d d_1 a_1$ della *Fig.* 195 Prolungata la retta e g fino in h sul lato $G H$, e tracciate le rette $h A$, e D taglieremo il prisma $A H h$ e $E D$ ed otterremo la faccia inclinata $A h$ e D sulla quale deve essere stabilito il letto del cuneo.

Si traccerà su questa faccia col modello $e_2 f_1 f' e'_2$ (*Fig.* 195) il poligono mistilineo $g a D c$, e si eseguiranno a squadra colla faccia $G h$ e F le due superficie cilindriche $G g a B$, F e $D c$, sulle quali appoggeremo convenientemente lo sviluppo S delle fronti del cuneo per tracciarvi le figure $G b m n a g$, f e $D n_1 m_1 b_1$. Ciò fatto resteranno a tagliarsi le facce piane $m n n_1 m_1$, $b m m_1 b_1$ che non possono offrire alcuna difficoltà.

559. *Osservazione* — Intorno alla posa dei cunei delle piattabande crediamo utile aggiungere le seguenti avvertenze.

Costruiti i piedritti fino al livello dell'intradosso, e situati i pulvinari per modo che il letto destinato a sopportare la spinta abbia la conveniente direzione, si collocherà fra i piedritti stessi una tavola orizzontale solidamente sostenuta alle estremità, e il cui piano superiore disti dall'intradosso della volta di circa cinque centimetri, all'oggetto di porre fra questo piano e quello dell'intradosso della volta dei piccoli sostegni di legno i quali mentre serviranno d'appoggio ai cunei permetteranno anche i piccoli movimenti necessari per ben situarli. Fatto ciò si poseranno i primi due cunei, uno a destra e l'altro a sinistra, procurando che il loro intradosso resulti orizzontale e le loro fronti si trovino esattamente nei piani di fronte della volta. Si verificheranno le inclinazioni dei loro letti, e se qualche

imperfezione nel taglio di essi impedirà la loro giusta collocazione si correggeranno convenientemente. Al modo stesso si progredirà a porre i cunei contemporaneamente dall' una e dall' altra parte, ed eseguita la posa delle controchiavi si collocheranno fra queste degli sbadacchi o pezzi di legno capaci di sostenerle finchè la chiave sia collocata.

Giova inoltre avvertire che la posa di quest' ultimo cuneo, la quale non può aver luogo che dopo un certo numero di tentativi, si eseguisca battendolo a piccoli colpi sulla faccia d' estradosso con un mazzapicchio di legno, acciocchè entrando a forza fra le controchiavi stringa ed assicuri tutto il sistema.

In questa operazione può avvenire che le facce d' intradosso dei cunei non costituiscano un solo e medesimo piano orizzontale, come non si trovino esattamente in un medesimo piano o nella stessa superficie curva le loro fronti. Tali irregolarità che saranno sempre ben piccole si toglieranno coll' orzatura, allorquando saremo fatti certi che la malta interposta fra i letti sia bene asciutta.

CAPO VI.

Delle volte a intradosso cilindrico e storto.

560. Trattare tutte le quistioni a cui accenna il titolo di questo Capo ci porterebbe troppo al di fuori dei limiti che ci siamo imposti. Noi ci fermeremo alle più importanti, a quelle che ordinariamente si presentano nella pratica dell' Ingegnere Architetto, le quali, allorchè sieno ben comprese, possono fargli strada a risolvere le altre di un genere più complicato aventi con queste più o meno analogia. Intendiamo poi di tralasciare tutte le quistioni speciali a cui l' Arte delle costruzioni, quantunque in rarissimi casi, può far luogo, perchè siamo convinti che lo studio accurato della Geometria Descrittiva, i principi generali esposti e le loro applicazioni

ai casi contemplati a che ci siamo proposti di esaminare possono offrire mezzi sufficienti per risolverle convenientemente.

561. Da ciò che si è detto nel Cap. IV, rilevasi che il Problema generale dell'apparecchio d'una volta si compone di due parti cioè: 1ª dividerla in filari; 2ª dividere i filari in cunei. Ora, per operare queste divisioni bisogna dapprima tracciare sulla fronte della volta gli spigoli che determinano le forme dei cunei, e ad un tempo quelli longitudinali d'intradosso e d'estradosso; stabilire dipoi la lunghezza dei cunei: con che si vengono a determinare altri spigoli trasversali sull'intradosso e sull'estradosso, ai quali può darsi il nome di *spigoli di testa*.

Queste due serie di spigoli presentano una differenza rimarchevole. I primi, quelli che dividono la volta in filari, sono continui al modo stesso delle linee che sul paramento di un muro distinguono i diversi corsi. I secondi, perchè il principio del collegamento sia soddisfatto, non presentano sulla volta, come gli spigoli verticali di giuntura del paramento di un muro, che degli archi isolati, di cui ciascuno traversa l'intradosso d'un filare, e termina alle linee fra le quali lo intradosso medesimo è compreso.

562. Dicesi *retta* la volta se termina ad un piano verticale perpendicolare alla direzione del suo asse nella proiezione orizzontale. Allorchè sulla medesima proiezione la traccia del piano verticale suddetto è obliqua alla direzione dell'asse, la volta dicesi *a sbieco*. Infine, se il piano a cui termina la volta, fosse inclinato alla verticale, si le volte rette che quelle a sbieco prendono i nomi di *volte rette a scarpa*, e di *volte a sbieco e a scarpa*. Si da poi il nome di *obliqua* ad ogni volta della quale l'asse è obliquo alla traccia del piano della sua fronte sul piano di nascita.

563. Così possono sussistere cinque specie di volte a botte, cioè: la *botte retta* propriamente detta, della quale la fronte è verticale e perpendicolare all'asse della volta; la *botte retta a scarpa*, la fronte della quale senza riescire obliqua all'asse, è però inclinata alla verticale; la *botte a sbieco*, la cui fronte è verticale è obliqua sull'asse; la *botte a sbieco e a scarpa*, di cui la fronte trovasi al tempo stesso inclinata più o meno rapporto all'asse, e alla verticale; per ultimo la

volta a botte obliqua, di cui la fronte può esser verticale od a scarpa, ma di cui l'asse non è normale ai due paramenti del muro che la sostiene.

Ma di queste cinque specie noi non prenderemo in esame che la botte retta, la botte a sbieco e a scarpa, e la botte obliqua colle fronti verticali, potendo le altre facilmente dedursi da esse: e siccome ciascuna darebbe luogo anche alle sue varietà dipendenti dal sesto che stabilisce la forma dell'intradosso (N.° 539), non ci occuperemo che di quella di tutto sesto, perchè il tracciato è di più agevole esecuzione, e perchè sotto il rapporto dell'apparecchio e del taglio, qualunque sesto è buono alla esposizione della teoria.

PROBLEMA I. *Botte retta di tutto sesto.* (*Fig* 197).

564. Sia il coordinato orizzontale il piano stesso della nascita, ed $A\,B\,C\,D$, $E\,F\,G\,H$ sieno i piedritti che comprendono lo spazio da coprirsi. Supponiamo che una delle fronti della volta si trovi sul piano verticale $A\,F$, a cui si sceglierà parallelo il coordinato verticale, e sieno B', E' i punti nei quali gli spigoli di nascita $B\,C$, $E\,H$ incontrano questo ultimo. La semicirconferenza $B'\,b'\,c'\,E'$ descritta col centro in O' e col diametro $B'\,E'$ sarà la proiezione verticale dell'intradosso.

Apparecchio. Divideremo la curva $B'\,a'\,b'\,c'\,d'\,E'$, direttrice dell'intradosso, in un numero dispari di parti eguali, e pei punti di divisione a', b', c', d' tirate le rette (a', $a\,a_1$), (b', $b\,b_1$), (c', $c\,c_1$), (d', $d\,d_1$) perpendicolari alla linea di terra si avranno determinati gli spigoli d'intradosso. I raggi $O'\,a'$, $O'\,b'$, $O'\,c'$, $O'\,d'$ prolungati somministreranno gli spigoli di fronte. Se l'altezza in ciaschedun cuneo dovrà esser costante, siccome avviene nel caso in cui la fronte della volta si trovi nel paramento di un muro apparecchiato a corsi regolari di pietre, si condurranno per A' ed F' due verticali $A'\,A''$, $F'\,F''$ eguali a questa altezza, e la orizzontale $A''\,F''$ determinerà la lunghezza $a'\,\alpha'$, $d'\,\delta'$ delle giunture dei pulvinari; prese di poi sulle verticali dei punti α' e δ' le lunghezze $\alpha'\,\alpha''$, $\delta'\,\delta''$ eguali alle precedenti, e tirata la orizzontale $\alpha''\,\delta''$ rimarranno pure determinate le giunture $b'\,\beta'$, $c'\,\gamma'$ susseguenti. Questa

operazione continuata fino alla chiave somministrerà la lunghezza di tutti i rimanenti spigoli di fronte. Ciò fatto si tireranno le rette $(\alpha', \alpha\alpha_1)$, $(\beta', \beta\beta_1)$, $(\gamma', \gamma\gamma_1)$, $(\delta', \delta\delta_1)$ perpendicolari alla linea di terra, e si avranno gli spigoli d'estradosso.

Per tracciare gli spigoli di testa si stabilirà la lunghezza massima che potrà darsi ai cunei; e supposto che questa sia $F f$, si tirerà la $f f_1$ parallela ad $A F$: sopra $f f_1$ si troveranno allora proiettati gli spigoli di testa dei pulvinari, della chiave, e dei cunei che si trovano nei filari alternati fra quello della chiave e gli altri dei pulvinari. Una seconda retta $m m_1$ parallela ad $A F$ condotta alla metà di distanza fra F ed f conterrà le proiezioni degli spigoli di fronte per i cunei che si trovano immediatamente addossati ai pulvinari, e per quelli dei filari alternati fino alla chiave. Le proiezioni poi dei veri spigoli di testa dovendo terminare a quelle dei corrispondenti spigoli longitudinali d'intradosso e d'estradosso, saranno pei pulvinari $f e$, $f_1 e_1$ . . . ; per la chiave $h i$ . . . ; per i filari immediatamente sovrapposti ai pulvinari saranno $m n$, $m_1 n_1$ . . . . A partire dalle rette $m m_1$, $f f_1$ se ne tireranno altre parallele $\alpha_1 \delta_1$ . . . distanti fra loro della quantità $F f$, e si giungerà così a tracciare tutto l'apparecchio della volta.

Forma e taglio dei cunei. Ciaschedun cuneo ha la forma di prisma retto avente quattro facce piane rettangolari, ed una cilindrica retta. Il modello delle basi di questi prismi è dato dalla fronte che si trova tracciata sulla fronte della volta; le dimensioni dei rettangoli constituenti le facce piane sono date nella vera loro grandezza dagli spigoli di fronte, e dalle proiezioni orizzontali degli spigoli d'intradosso. Tutto questo è evidente per modo che crediamo superfluo di esaminare nelle sue parti uno qualunque di questi cunei.

Non crediamo nemmeno che sieno necessarie indicazioni speciali per dirigere il taglio dei cunei medesimi, essendo più che sufficiente quanto è stato in proposito accennato per la esecuzione dei cunei nei muri retti a paramento cilindrico

PROBLEMA II. *Botte a sbieco e a scarpa.* (*Fig.* 197).

565. Riteniamo per coordinate orizzontale quello di nascita; ed essendo $L P S T$, $N R Q M$ le proiezioni dei pie-

dritti, $O\ O_1$ quella dell'asse, suppongasi che la inclinata $L\ M$ su quest'ultimo sia la traccia orizzontale del piano che contiene la fronte della volta.

Apparecchio. Si immagini condotto un piano $P\ Q$ verticale e perpendicolare all'asse. La sezione ch'esso produrrà nella volta deve essere identica alla fronte che alla volta stessa competerebbe se fosse retta. Talchè scelto il coordinato verticale parallelo al piano $P\ Q$ noi tracceremo dapprima l'apparecchio dalla sezione al modo stesso che per la botte retta è stato prescritto (N.° 564); e condotte pei punti a', b', c', d' . . . ; altrettante perpendicolari alla linea di terra non rimarrà altro a farsi che trovare i punti in cui gli spigoli, da quelle perpendicolari rappresentati, incontrano il piano inclinato $L\ M$.

A questo effetto conducasi per un punto scelto ad arbitrio sul piano di nascita un piano $p\ q$ verticale e perpendicolare all'altro $L\ M$; questo sarà da quello tagliato secondo una retta che farà con $p\ q$ l'angolo che $L\ M$ fa col coordinato orizzontale. Tale angolo essendo dato possiamo supporre che si abbatta su questo coordinato e sia $p\ q\ r$. Tirata $p\ r$ perpendicolare a $p\ q$, e costruito il triangolo $p\ q_1\ r_1$ per modo che ai lati $p\ q_1$ e $p\ r_1$ resulti respettivamente parallelo e perpendicolare l'asse $O\ O_1$, e di più sia $p\ r_1$ eguale a $p\ r$, l'angolo $p\ q_1\ r_1$ sarà evidentemente quello che con $p\ q_1$ fa la intersezione del piano $L\ M$ con un altro piano verticale parallelo all'asse. Immaginiamo ricondotto il triangolo $r_1\ p\ q_1$ alla sua posizione verticale, e si vedrà facilmente che p è la proiezione orizzontale del punto r presso sul piano $L\ M$.

Dal che può dedursi che se riportasi sul coordinato verticale in $F'\ O'\ K'$ l'angolo $p\ q_1\ r_1$, quindi la distanza orizzontale $o'\ s'$ da O_1 in o, sarà o la proiezione orizzontale della sommità dell'arco $B'\ a'\ b'\ o'\ c'\ d'\ E'$. Ripetendo questa operazione per i punti a', b', c', d' si otterrà la proiezione orizzontale T o N della direttrice dell'intradosso, e quella della fronte intera della volta trovando col medesimo processo le proiezioni orizzontali dei punti α'_1, β'_1, O'', perchè gli spigoli orizzontali di questa fronte devono tutti resultare paralleli ad $L\ M$.

Le proiezioni degli spigoli trasversali di fronte si determinano poi secondo le norme dettate nel problema precedente, e siccome la figura dimostra.

Forma dei cunei. Immaginiamo ciascuno dei cunei della volta precedente tagliato da un piano inclinato come *L M* ai suoi spigoli d'intradosso e alla sua fronte, e si concepirà subito la forma dei cunei della volta che ci occupa. Deriva da ciò che le facce piane di questi cunei non sono più rettangolari, ma invece sono altrettanti trapezi di cui è utile conoscere la vera grandezza, quantunque non sia necessaria per dirigere il taglio.

A tale oggetto si riporti sopra una retta *p q* (*Fig.* 198), alla destra e alla sinistra d'uno dei suoi punti o, la metà della lunghezza assoluta della direttrice dell'intradosso, e si determinino su questa retta i punti B_2, a_2, b_2, c_2, d_2, E_2 corrispondenti ai punti di divisione della direttrice medesima. Posto ora che B_2 E_2 rappresenti la trasformata della sezione prodotta nell'intradosso dal piano verticale *P Q*, si tireranno per B_2, a_2 . . . E_2 altrettante perpendicolari alla *p q*, e le lunghezze B_2 B'_2, a_2 a'_2 . . . E_2 E'_2 prese su quelle respettivamente eguali alle rette *S T*, *a t*, . . . *R N* della *Fig.* 197, forniranno i punti B'_2, a'_2 . . . . . E'_2 e con essi la curva B'_2 a'_2 . . . . . E'_2 trasformata della direttrice d'intradosso sulla fronte a scarpa della volta.

Se vuolsi ora la faccia di giuntura proiettata in s_1 t t_1 s_2 (*Fig.* 197), basterà condurre la p_1 q_1 parallela a *p q* (*Fig.* 198) e distante da essa della quantità a'_2 a''_2 = *s* s_1; riportare la retta a' α' della *Fig.* 197 sulla a''_2 p_1 da a''_2 in s'_2 e tirare la perpendicolare s'_2 t_2: determinato poi su questa il punto t_2 per modo che sia s'_2 t_2 = s_2 t_1, si unirà t_2 con a'_2 e il trapezio a''_2 a'_2 t_2 s'_2 sarà la faccia di giuntura cercata.

La *Fig.* 198 dimostra le facce di giuntura di tutti gli altri cunei, e contiene ad un tempo lo sviluppo dell'intradosso dei cunei medesimi.

Taglio dei cunei. Vogliasi eseguire il cuneo che ha per proiezioni *u u*, *t* t_1, s_2 *u*, a' b' β' α'' α a' (*Fig.* 197). Si sceglierà un masso di forma parallelepipeda *A B C D E F G H* (*Fig.* 199) nella base del quale possa essere inscritto il poligono a' b' β' α'' α' a', e la cui lunghezza sia almeno uguale a *t* s_1. Spianata la faccia *A B C D* e su di essa tracciata la figura *a b B c d* identica ad a' b' β' α'' α', si spianeranno a squadra con essa le tre facce *B C H G*, *C D E H*, *A B G F*.

Si disegnerà sulla prima il trapezio $B\ B_1\ c_1\ c$ somministrato dal modello $v_1\ v\ s\ s_1$, sulla terza tracceremo il trapezio $a\ b\ b_1\ f$ coi lati $B_1\ B$, $B\ b$ precedentemente determinati e colla $b\ b_1$ parallela a $B\ B_1$ ed eguale ad $s_1\ t_1$. Dopo ciò si prolungheranno le rette $c\ c_1$ fino in h, $d\ e_1$ fino in e, $b\ b_1$ fino in g; e sulla faccia $E\ F\ G\ H$ tracciate le linee $h\ e$, $g\ f$ si toglieranno alla pietra i prismi triangolari $C\ c\ d\ e\ H\ h$, $A\ a\ b\ g\ F\ f$. In tal modo troveremo i piani delle facce di giuntura sui quali, profittando delle rette $b\ b_1$, $b\ a$ per l'una, e delle rette $c\ c_1$, $c\ d$ per l'altra, potremo tracciare le facce stesse coi modelli somministrati dalla *Fig.* 198; ed allora rimarranno determinati sulla superficie laterale del parallelepipedo tutti gli spigoli di fronte del cuneo. Taglieremo la pietra eccedente al di qua di tali spigoli e resulterà il piano $b_1\ B_1\ c_1\ e_1\ f$; eseguiremo infine la superficie cilindrica $d\ a\ f\ e_1$ a squadra con la faccia $a\ b\ B\ c\ d$, e la fronte non che l'intero cuneo resulteranno completamente determinati.

566. *Osservazione.* — In alcuni casi la lunghezza della botte contata nella direzione dell'asse è tale da permettere che ciascun filare di cunei sia composto di una sola pietra. La quistione allora è precisamente la stessa, e quindi le soluzioni precedenti sono ad essa interamente applicabili. L'opera solo cambia nome, e invece di volta chiamasi più propriamente *arco*.

PROBLEMA III. *Volta obliqua a intradosso cilindrico.*

567 Fra i paramenti $a\ a_1$, $b\ b_1$ di due piedritti P, P' (*Fig.* 200) tagliati obliquamente dai piani verticali $a\ b$, $a_1\ b_1$ sia compresa l'area che si vuol ricoprire con una volta a intradosso cilindrico. L'asse di questa volta si proietterà orizzontalmente sul piano di nascita $X\ Y$ secondo la $(o\ o_1,\ o')$ parallela alle rette $a\ a_1$, $b\ b_1$ e da esse equidistante; le generatrici dell'intradosso dovendo esser parallele ad $o\ o_1$ resulteranno inclinate ai piani di fronte $a\ b$, $a_1\ b_1$, e la volta sarà obliqua.

Apparecchio. La maniera più semplice che si presenti allo spirito per apparecchiare questa volta è quella delle giunture piane e parallele all'asse per i diversi filari dei cunei,

e delle facce di testa parimente piane e normali agli spigoli d'intradosso. Talchè scelto il coordinato verticale parallelo alla sezione retta, che si proietta orizzontalmente sopra una retta $m\ m_1$ perpendicolare ad $o\ o_1$, possiamo supporre che questa sezione abbia per proiezione verticale il semicircolo $a'\ o''\ b'$. Allora divisa questa direttrice dell'intradosso in un numero dispari di parti eguali si costruirà all'intorno di essa l'apparecchio della volta come nel caso in cui si trattasse di una botte retta, della quale la figura $G'\ F'\ H'$ fosse la fronte. Le perpendicolari ad $X\ Y$ condotte per i punti c', d' . . . . comprese fra le rette $a\ b$, $a_1\ b_1$ saranno le proiezioni degli spigoli longitudinali d'intradosso; mentre sulle perpendicolari $m\ m_1$ ad $o\ o_1$ alle convenienti distanze condotte si troveranno quelle degli spigoli di testa.

Forma dei cunei. Ciascuno dei cunei, come quello proiettato in C, del quale nessuna delle due teste fa parte della fronte della volta, ha la forma di quelli componenti la botte retta. Ciascuna testa ha per modello il poligono mistilineo che gli corrisponda sulla figura $G'\ F'\ H'$, le lunghezze degli spigoli di intradosso sono forniti dalle respettive loro proiezioni orizzontali, e lo sviluppo del suo intradosso che può servire a verificare l'esattezza del taglio di questa faccia è somministrato dal rettangolo C_1 compreso nella figura $a_1\ o_1\ o_1\ a_1$ che è lo sviluppo totale della semivolta proiettata in $a\ n\ o_1\ a_1$.

Gli altri cunei, come quello proiettato in D, dei quali una delle teste fa parte d'una delle fronti della volta, hanno la facce di giuntura di disegnale lunghezza; la testa proiettata nella sua vera forma sulla figura $G'\ F'\ H'$, la fronte somministrata pure in modello dalla figura $L\ M$ che insieme alle curve $a_1\ c_1$ costituisce l'abbattimento di una delle semifronti della volta.

Taglio dei cunei. Ciò che abbiamo detto rispetto alla forma dei cunei o al taglio di quelli componenti le botti rette e a sbieco è sufficiente per porre in grado il lettore di dirigere il taglio dei cunei appartenenti alla volta in quistione.

568. *Osservazione I.* — Le linee d'apparecchio che meglio convengono alla costruzione di una volta sono, senza dubbio, quelle di più grande e di più piccola curvatura del suo intradosso; 1° perchè queste linee si incontrano sempre,

come si sa, sotto angoli retti; 2° perchè le superficie normali aventi queste curve per direttrici sono necessariamente sviluppabili. (*Geom. Descritt.*)

Tali vantaggi però, comunque grandi possano essere, non compensano sempre gli inconvenienti che resultano dalle condizioni speciali a cui deve sodisfare la quistione proposta. Così nelle volte cilindriche per le quali le generatrici e le sezioni rette sono le linee di minima e massima curvatura, non conviene adoperare le seconde per determinare gli spigoli di testa dei cunei, allorchè le volte stesse presentano una certa obliquità. Poichè la semplice ispezione fatta sulla proiezione orizzontale a o o_1 a_1 della semivolta rappresentata nella *Fig.* 200 dimostra che tutti i cunei di fronte hanno degli angoli molto acuti, ed alcuni di essi, come x, possono trovarsi nel caso di non essere sostenuti al loro posto da altra forza che dalla aderenza della malta colla pietra.

Questo inconveniente può essere evitato abbandonando il sistema dei piani normali all'asse per la determinazione degli spigoli di testa, e scegliendo invece un sistema di piani paralleli a quelli a b, a_1 b_1 delle fronti della volta, siccome dimostra la figura medesima per la semivolta a destra. Ma anche in questo caso può riconoscersi dalla proiezione orizzontale della semivolta medesima, come dallo sviluppo b_2 o_2 o_2 b_2 che ciascuno dei quadrilateri (E, E_1) avrà sempre due angoli acuti, e tanto più acuti quanto più sarà grande la obliquità della volta.

Talchè l'apparecchio indicato al N.° 567 ed anche questo ultimo non sono da usarsi, ad eccezione del caso in cui trattisi di aperture di breve lunghezza a di poca obliquità.

569. *Osservazione II* — Le considerazioni teste fatte rispetto alla piccolezza degli angoli resultanti dai cunei delle volte oblique apparecchiate con uno dei due metodi esposti sono d'ordine secondario: altre e molto più importanti occorre di fare rispetto alla stabilità dell'opera.

Supponiamo la volta omogenea, ed immaginiamo condotti per un punto qualunque a_1 del suo piano di nascita diversi piani verticali. È chiaro che di tutte le sezioni da essi prodotte nell'intradosso della volta la più piccola è la sezione retta, quella cioè che deriva dal piano normale all'asse o o_1.

Ora è pure facile cosa a comprendersi che i movimenti i quali tendono a prodursi nella volta sono le conseguenze dello sforzo che ciascuna molecola esercita in virtù della gravità sulle molecole contigue situate nel piano immediatamente inferiore. Questo sforzo propagandosi in tutti i sensi tende a ridurre per contrazione lo sviluppo delle diverse sezioni verticali della volta, e le sezioni rette proveranno la più grande compressione. Esse devono dunque reagire con forza maggiore di tutte le altre sezioni verticali; ed infatti nel loro piano dirigesi lo sforzo principale, altrimenti detto *resultante* della spinta che tende a rovesciare i piedritti, e le parti più basse della volta. Questo sforzo è vinto nella pratica dalla coesione delle malte, dalla loro aderenza ai materiali da costruzione, infine dalla resistenza dei muri eretti a sostegno della volta.

Ma quando si tratta di una volta obliqua, come quella che ci occupa, basterà far passare per i punti b, g, g_1 e b_1 altrettanti piani verticali normali all'asse, per concludere dopo un breve esame sugli effetti della spinta che si esercita secondo l'arco di più gran contrazione; 1° che la zona centrale $f\ g\ f_1\ g_1$ è la sola nella quale le forze tendenti al rovesciamento della volta incontrano nei piedritti una resistenza capace di neutralizzare il loro effetto; 2° che gli sforzi i quali produconsi nelle parti $b\ g\ f$ e, $a_1\ g_1\ f_1$ e, tendono a rovesciare gli angoli acuti in g e g_1 che non possono opporre una valida resistenza; 3° infine che nelle porzioni di volta $a\ b\ d$, $a_1\ b_1\ d_1$ le spinte parallele ad $m\ m_1$ non possono essere vinte che da un solo lato dai piedritti, mentre dal lato opposto nessuna resistenza si oppone al loro effetto che è quello di rovesciare i cunei al di fuori della volta. Nelle porzioni predette esiste dunque una spinta a vuoto che non può essere interamente distrutta.

Tuttavia nella pratica le costruzioni non presentano il carattere d'omogeneità da noi supposto nella volta, e la coesione delle malte unita alla aderenza che esse hanno coi materiali possono cooperare in un modo tutto artificiale tanto alla resistenza al rovesciamento dei cunei, quanto ai diversi movimenti di reazione necessari per deviare la direzione degli sforzi dovuti alla spinta.

Difatti finchè le volte oblique non sono state impiegate che in Architettura, nella costruzione cioè delle sole fabbriche nelle quali dobbiamo dire che non si usavano che ben raramente e solo nei casi in cui le esigenze della distribuzione, o altre imperiose considerazioni ne prescrivevano lo impiego, non è stato mai usato altro sistema d'apparecchio diverso da uno dei due superiormente indicati. Che anzi il primo, vale a dire l'apparecchio retto del N.° 567 è stato anche felicemente impiegato nella costruzione di alcuni ponti dai 4 ai 10 metri di corda e di una obliquità dai 70 ai 63 gradi.

Ma nelle attuali grandi vie di comunicazione, come sono le strade di ferro, le condizioni di stabilità richieste dai ponti obliqui che la necessità obbliga a gettare attraverso ai grandi corsi di acqua, sono molto più imperiose; e si è dovuto pensare ad altri modi di apparecchio che valessero ad attenuare l'effetto della spinta a vuoto al segno da renderlo presso a poco nullo.

570. *Osservazione III.* — Anche prima della invenzione delle ferrovie i Geometri aveano studiata e risoluta la quistione del numero precedente per le volte cilindriche oblique. Noi dimostriamo questa soluzione nella *Fig.* 201, ove $a\ b\ b_1\ a_1$ è il passaggio obliquo ricoperto da una volta a botte, ed $a'\ c'\ b'$, $a'_1\ c'_1\ b'_1$ sono le proiezioni della curva di fronte fatta sopra un piano parallelo a quelli delle fronti della volta.

Pel centro o del parallelogrammo formato dalle linee di nascita e dalle proiezioni orizzontali delle fronti della volta si conduca una retta (z o z_1, z') perpendicolare ai piani di fronte. Per questa retta e pei punti di divisione presi in numero impari sopra una semicirconferenza $a'_1\ d'_1\ b'_1$ di raggio sufficientemente grande si fanno passare altrettanti piani le cui tracce verticali $z'\ c'\ d'$ . . . . determinano sulla curva di fronte i punti nei quali sono esse incontrate dagli spigoli d'intradosso. Gli spigoli di testa vengono formati da piani paralleli alle fronti medesime, e perpendicolari per conseguenza a quelli nei quali si trovano i letti dei cunei.

Con tale apparecchio rimane evidentemente sodisfatta la condizione principale del Problema, poichè le forze laterali che provengono dalla pressione dei cunei sui letti stessi si comporranno in un piano perpendicolare alla retta $z\ z_1$ e pa-

rallicio per conseguenza alla direzione secondo la quale è dai piedritti opposta la più grande resistenza.

Gli spigoli d'intradosso sono necessariamente ellittici, e quelli di testa circolari nell'attuale figura perchè abbiamo scelto delle semicirconferenze per curve di fronte. Le proiezioni orizzontali di questi ultimi si trovano sulle tracce orizzontali $h\ g$ . . . . dei piani da cui sono determinati; le proiezioni verticali sono somministrate nella vera loro grandezza dagli archi delle semicirconferenze $h'\ o'\ g'$ . . . . sulle quali si proiettano le sezioni prodotte nell'intradosso della volta dai piani $h\ g$.

Questi medesimi piani servono pure a determinare le proiezioni orizzontali degli spigoli d'intradosso. Poichè osservando che le proiezioni verticali di essi si riducono alle porzioni $e'\ f'$ delle tracce verticali dei piani $z\ z'\ d'$ comprese fra le due curve di fronte $a'\ c'\ d'\ b'$, $a'_1\ c'_1\ e'\ b'_1$, qualunque punto f delle cercate proiezioni orizzontali si otterrà in grazia di una perpendicolare condotta ad $X\ Y$ dal punto f' in cui la $e'\ d'$ è incontrata dalla semicirconferenza $h'\ o'\ f'\ g'$. Lo sviluppo delle facce d'intradosso di ciascheduno cuneo si può trovare costruendo quello dell'intradosso totale della volta. La figura $m\ n\ p\ q$ è lo sviluppo della semivolta $a\ p\ q\ a_1$; esso è stato facilmente costruito mercè la sezione retta $a_2\ c_2\ b$ coi semplici mezzi che dalla Geometria Descrittiva vengono indicati.

Non ci diffondiamo a descrivere la forma dei cunei; e quanto al taglio basterà conoscere la grandezza di ciascuno dei loro letti. Volendo per esempio conoscere il letto superiore del cuneo proiettato in $i'\ c'\ r'\ s'\ d'\ e'$ si farà abbattere il piano $z\ z'\ r'$ che lo contiene, sul coordinato orizzontale; allora ciascun punto i', f'_1, c', r' si abbatterà respettivamente in i_1, g, c_1, r_1, r_2 e il letto cercato avrà per modello la figura $i_1\ g\ c_1\ r_1\ r_2\ i_1$. Può agevolmente vedersi che questi soli modelli uniti a quelli di fronte che sono dati dalla proiezione verticale della volta sono necessari e sufficienti per la esecuzione dei cunei.

571. *Osservazione IV.* — Due difetti possono rimproverarsi alla soluzione attuale; il primo si ripete dalla curvatura ellittica degli spigoli d'intradosso sempre difficile a con-

servarsi nel taglio della pietra, e che pure bisogna colla massima diligenza eseguire se vuolsi mantenere all'intradosso la bellezza che dalla continuità dei suoi spigoli deriva; il secondo si scorge nella irregolarità d'apparecchio delle fronti, ove le teste dei cunei sono di grandezza e di forma molto diverse, ed alcune anco disgradevoli all'occhio. Non sempre però le fronti della volta debbono essere apparenti nell'opera, e in questo caso possiamo dispensarci dal taglio di tali facce e lasciarle grezze: ma allorchè dovessero quelle far paramento bisognerebbe ad ogni modo mascherare la notata irregolarità, lo che può conseguirsi eseguendo soltanto l'apparecchio dimostrato nella parte centrale della volta, e costruendone le fronti con due archi d'apparecchio retto, dei quali alcuni cunei partecipino anco della porzione centrale della volta.

PROBLEMA IV. *Volta obliqua ad intradosso storto.*

572. Colla soluzione di questo Problema si è cercato evitare l'inconveniente prodotto dal primo dei due difetti notati nel numero precedente, ma ci siamo pervenuti cambiando la natura dell'intradosso, che di cilindrico si è fatto storto. Le direttrici di questa superficie sono i due sesti di fronte ($a\ b$, $a'\ c'\ b'$), ($a_1\ b_1$, $a'_1\ c'_1\ b'_1$) e la retta ($z_1\ z$, z') condotta sul piano di nascita pel centro del parallelogrammo $a\ b\ b_1\ a_1$ perpendicolarmente ai piani di fronte.

Apparecchio. Descritta col centro in z' e con un raggio sufficientemente grande la semicirconferenza $m'\ n'\ p'$, si dividera questa, come al N.° 570, in un numero dispari di parti eguali, e i piani determinati da ciascuno dei punti di divisione e dalla retta ($z_1\ z$, z') saranno quelli dei letti dei cunei. Questi piani taglieranno l'intradosso secondo le sue generatrici rettilinee, le quali saranno perciò gli spigoli dell'intradosso medesimo. Le proiezioni verticali di tali spigoli saranno le porzioni delle tracce verticali di quei piani comprese fra le due curve $a'\ c'\ b'$, $a'_1\ c'_1\ b'_1$; le proiezioni orizzontali dei medesimi spigoli saranno le rette e d . . . . che si ottengono proiettando i punti e', d' . . . ., in cui le rette $z'\ d'$ taghano le curve suddette, sulle corrispondenti linee $a\ b$, $a_1\ b_1$.

Alcuni piani, come r o s, paralleli a quelli di fronte

serviranno a dividere i filari in cunei, e a determinare ad un tempo gli spigoli di testa di questi ultimi. Le proiezioni verticali di questi spigoli non saranno più circolari come le curve costituenti il sesto della volta, ma si troveranno nondimeno agevolmente costruendo la proiezione verticale delle sezioni prodotte nell'intradosso dai piani *r o s*; per il che basterà proiettare i diversi punti *t* nei quali la *r o s* incontra le proiezioni orizzontali degli spigoli longitudinali di quello, sopra le respettive proiezioni verticali z' t' di questi.

Forma e taglio dei cunei. Ad eccezione delle facce di intradosso, che nei cunei di questa volta sono storte, la forma di essi non differisce in altro da quella dei cunei della volta contemplata al N.° 570. Quanto poi al taglio, basta anche in questo caso conoscere le grandezze dei letti, ciascuno dei quali sarà un trapezio facile a costruirsi abbattendo ciascun piano z' d' sul coordinato orizzontale. Questi letti sono a squadra colle teste dei cunei come nella volta suddetta; talmentechè quando la pietra è spianata nella faccia di testa, e che su questa si è riportato il respettivo modello somministrato dalla proiezione verticale della volta, si eseguiranno a squadra colla testa le due facce che hanno a servire di letti; su queste si tracceranno mediante i modelli ottenuti coll'indicato abbattimento le figure di queste facce di commessura, ed allora si potrà eseguire la testa opposta del cuneo. Fatto ciò non rimarrà a tagliarsi che l'intradosso il quale potrà essere verificato con la riga appoggiata sopra punti di rapporto corrispondenti ad una medesima generatrice. Questi punti i', o'; u', v' si hanno immediatamente sul disegno conducendo per z' diverse rette z' i' u', z' o' v' etc.

573. *Osservazione I.* — La difficoltà del taglio degli spigoli d'intradosso già notata al N.° 571, è tolta affatto coll'attuale soluzione, perchè tali spigoli riescono qui rettilinei. Ma l'intradosso ha perduto la bellezza della forma che è propria della superficie cilindrica. Imperocchè se noi costruiamo la sezione prodotta nell'intradosso medesimo dal piano proiettante l'asse e o e, della volta, si ottiene la linea e_1 o_1 e_1 che presenta al mezzo un rigonfiamento d'effetto disgradevolissimo. La qual cosa conferma una verità già riconosciuta dagli abili costruttori, che nell'apparecchio di una

volta avviene spesso di evitare una irregolarità incontrandone un'altra; onde è forza contentarsi di scegliere in ciaschedun caso il partito che offre il minor numero di inconvenienti.

574. *Osservazione II.* — La soluzione del N.° 572, è con vantaggio impiegata in tutti quei casi nei quali una volta a botte retta come quella rappresentata dalla *Fig.* 203 in (a b c d, a' e' b') deve essere terminata da una strombatura, o sguancio come si vede proiettato in c d f g. Colla corda f' g' eguale ad f g e colla stessa saetta o' e' del sesto della botte si traccia allora un altro arco, circolare o ellittico, oppure una semiovale, e quindi si dà per intradosso alla porzione c d f g della volta una superficie storta generata da una retta obbligata a scorrere sulle due curve (c d, a' e' b'), (f g, f' e' g') e sull'asse (o, o, o') della botte.

Il Ponte di Neuilly, costruito e terminato nel 1774 dal celebre Perronet, è un classico esempio di questa applicazione. Il sesto degli archi di quel Ponte è una semiovale di 39 metri di corda, e la botte di ciascun arco si trova raccordata con gli speroni delle pile mediante una strombatura analoga alla precedente.

I costruttori francesi distinguono tali sguanci dei ponti col nome volgare di *corno di vacca*.

PROBLEMA V. *Porta circolare con intradosso storto.*

575. Noi poniamo qui la quistione attuale per dare un esempio di volte composte, e ad un tempo un'altra applicazione di superficie storte della famiglia stessa a cui appartiene quella usata nel Problema del N.° 572 in un caso che può essere molto comune nella pratica.

Suppongasi la porta costruita in un muro retto terminato dai due piani paralleli e verticali A B, E F, e la sua apertura abbia in proiezione orizzontale la forma A A_1 C C_1 E F D_1 D B_1 B composta di un rettangolo A A_1 B_1 B, di un altro piccolo rettangolo C C_1 D_1 D, e di un trapezio C_1 E F D_1. Il primo potrà esser coperto da un arco a botte, da un arco simile potrà pure esser coperto il secondo e corrisponderà a ciò che nelle piattabande abbiam chiamato controbattuta della porta (N.° 556); il terzo dovrà esserlo

da una superficie storta. I lati D_1 F, C_1 E del trapezio devono esser eguali almeno alla larghezza D_1 y_1 di ciascuna imposta perchè questa possa tutta appoggiarsi contro i piedritti allorchè il passaggio è aperto.

Preso il coordinato verticale perpendicolare all'asse Z y della porta, e la linea di terra X Y sul piano di nascita dell'intradosso dell'arco, si avranno le proiezioni verticali dell'arco a botte, e della controbattuta nelle due semicirconferenze A' C' B', C'_1 E', D'_1, e quelle degli spigoli esterni dei piedritti nelle verticali (E, E' E''), (F, F' F''). La battuta poi sarà verticalmente proiettata nello spazio compreso fra le due notate semicirconferenze. La linea a cui dovrà terminare la superficie storta sul piano verticale E F potrà essere circolare, ma conviene che tagli la verticale Z' Z'' ad una distanza E'_1 Z'' eguale almeno ai due terzi o alla metà della Z y_1: inoltre dovrà esser descritto con un raggio ω F'' abbastanza grande perchè i punti E'', F'' nei quali incontra gli spigoli esterni dei piedritti sieno più alti del punto E'_1. La superficie storta che ha per direttrici l'arco E'' Z'' F'', la semicirconferenza C'_1 E'_1 D'_1 e l'asse (Z y, Z') della porta potrà costituire l'intradosso della volta destinata a coprire lo spazio C_1 E F D_1. Così ogni piano Z Z' f' potrà somministrare una generatrice (e, f, e' f') di questa superficie la quale si otterrà facilmente proiettando i punti e', f' sulle respettive linee C_1 D_1, E F. Ma la direttrice E'' Z'' F'' terminando ai punti E'', F'' è chiaro che la superficie storta in quistione terminerà alle generatrici F'' g', E'' h' e per conseguenza non coprirà lo intero trapezio C_1 E F D_1; e quando anche, per ovviare a tale inconvaniente, s'intendesse prolungato l'arco E'' F'' al di là dei suoi estremi, resulterebbe la faccia verticale D_1 F del piedritto intersecata dalla superficie in quistione secondo una tal curva da non permettere alle due imposte di applicarsi liberamente sullo aguancio del piedritto. Per la qual cosa si è pensato di aggiungere alla curva E'' F'' un nuovo ramo F'' D'_1, che soddisfaccia alla condizione precedente, e sia tale che sostituito al prolungamento della direttrice E'' Z'' F'' dia luogo ad una porzione di superficie storta capace di accordarsi con la precedente lungo la generatrice comune Z' g' F''.

A tale effetto è necessario che le due superficie si accordino lungo la generatrice comune (F'' g' Z', F g Z_1), cioè abbiano in tre punti di essa un comune piano tangente (*Geom. Descritt.*). Ora è manifesto che a cagione delle direttrici (Z y, Z'), (C_1 D_1, C'_1 E'_1 D'_1) comuni ad ambedue le superficie di che si ragiona, al il piano tangente nel punto (Z_1, Z') come l'altro nel punto (g, g') alla prima superficie, sarà tangente anche alla seconda; onde rimane solo a far sì che lo stesso avvenga pel punto (F, F''). Il piano tangente in questo punto alla superficie storta avente per direttrice la curva E'' Z'' F'' taglia il piano verticale C_1 D_1 secondo la retta g' l parallela alla F'' T tangente in F'' alla curva suddetta. Il piano tangente alla seconda superficie storta è determinato dalla generatrice (F g, F'' g') e dalla tangente in (F, F'') al cercato ramo di curva F'' D'_1. Perchè questo ultimo piano tangente coincida col primo basterà evidentemente che la tangente anzidetta combaci con esso, o in breve che incontri il piano verticale C_1 D_1 in un punto della g' l; ma siccome la tangente in questione sta necessariamente sopra il piano verticale F D_1, così è forza che il punto cercato sulla g' l sia il punto l nel quale questa retta incontra la verticale del punto (D_1, D'_1).

Consegue da ciò che abbattendo il punto (F, F'') sul piano verticale F D_1 in (F_1, F''_1), l'abbattimento della tangente alla nuova direttrice F'' D'_1 sarà la retta l F''_1; e perciò quello di questa direttrice sarà una linea che dovrà esser tangente in D'_1 alla verticale D'_1 l, ed in F''_1 alla retta F''_1 l; ma dovrà sodisfare anche alla condizione di non tagliare il quadrante D'_1 I i che rappresenta l'abbattimento della parte circolare della mezza imposta, onde potrà essere composta di due archi di circolo, uno dei quali D'_1 I faccia parte del nominale quadrante, e l'altro I F''_1 sia determinato dalla condizione di aver per normali in F''_1 una perpendicolare ad F''_1 l, ed in I la I F'_1 prolungata. Però queste normali facendo un piccolissimo angolo fra loro, la curvatura dell'arco I F''_1 riesce piccolissima; quindi si può con vantaggio delle operazioni grafiche sostituire alla linea nel modo precedente costruita un'altra linea composta della retta F''_1 m determinata per modo che m l sia eguale ad l D'_1, e di un

Digitized by Google

arco circolare tangente in D'_1 alla verticale $D'_1\ l$, ed in m alla $l\ F''_1$.

Tracciato con uno degli indicati metodi l'abbattimento della nuova direttrice, si riporterà facilmente alla sua posizione uno qualunque dei suoi punti (n_1, n'_1). Poichè la proiezione orizzontale di questo punto si troverà sulla $D_1\ F$ in n ove la $D_1\ F$ è incontrata dall'arco orizzontale $(n_1\ n,\ n'_1\ n')$ descritto dal punto considerato, e la proiezione verticale si troverà in n'. Allo stesso modo determinate le proiezioni verticali di tutti gli altri punti si otterrà la linea $F''\ n'\ p'\ D'_1$ per proiezione verticale della nuova direttrice.

Apparecchio. Si apparecchia questa volta come le botti ordinarie, facendo passare i piani dei letti dei cunei per l'asse $(Z\ y,\ Z')$ e per i punti di divisione della curva di sesto $A'\ C'\ B'$ determinati al solito in numero dispari. Tutti i letti $d'\ M'$, $c'\ P'$ ... si fanno terminare ai letti orizzontali dei corsi di pietra coi quali supponesi qui costruito il muro. Gli spigoli d'intradosso resultano altrettante linee spezzate a cagione della discontinuità dell'intradosso della volta. Le proiezioni verticali di esse si riducono alle porzioni $c'\ f'$ . . . . . delle tracce $Z'\ P'$ dei piani di giacitura, le proiezioni orizzontali sono linee come $c\ c_1$ e $e_1\ f$ che si costruiscono facilmente proiettando c' in c_1 sulla $C\ D$, e' in e_1 sulla $C_1\ D_1$, f' in f sulla $E\ F$.

Se un solo cuneo non potrà avere le sue teste sulle fronti $E\ F$, $A\ B$ della volta, si dividerà la profondità $Z\ y$ della porta in due o più zone con altrettanti piani $s\ t$ paralleli a quelli di fronte, e questi serviranno a determinare le lunghezze dei cunei per ciascun filare nel modo però indicato per le botti ordinarie (N.° 564).

Quando fa mestieri ricorrere a questi piani è necessario anche conoscere gli spigoli di testa da essi determinati; al che è sufficiente costruire le sezioni che i piani stessi producono nell'intradosso sturto della volta. Così il piano $s\ t$ produce la sezione verticalmente proiettata in $s'\ r'\ s'_1\ t'$, della quale un punto qualunque s'_1 sugli spigoli di intradosso si determina proiettando s_1 sopra $c'\ f'$, ed il punto r' si trova dividendo la $E'_1\ Z''$ nello stesso rapporto nel quale è divisa dal punto r la $Z\ y_1$.

Forma dei cunei. Consideriamo il cuneo verticalmente

proiettato in $c' P' N' M' d'$, il quale fa parte della volta e del muro: esso componesi di otto facce piane, e di tre facce curve. Quelle piane sono:

1.ª La fronte avente per modello la stessa proiezione verticale $c' P' N' M' d'$: 2.ª L'estradosso verticalmente proiettato in $P' N'$, che è un rettangolo avente per dimensioni $P' N'$, $Z y$: 3.ª La faccia di giuntura verticale $N' M'$ che è pure un rettangolo avente per dimensioni $N' M'$, $Z y$: 4.ª L'altra fronte sul piano $E F$ che ha per proiezione verticale e per modello ad un tempo la figura $q' M' N' P' f' F'' q'$: 5.ª La piccola faccetta triangolare ($F p$, $q' p' F''$) che fa parte dello aguancio del piedritto, e della quale il modello si ha nel triangolo mistilineo $I n'$, F'', i: 6.ª Il letto superiore (c c_1 c_2 f, $c' c' f' P'$) il cui modello si trova abbattendo il piano $Z' P$ sul coordinato orizzontale, ed è la figura $B B_1 D D_1 f_1 P_1 P_2 B$: 7.ª il letto inferiore (d d_1 u u_1 $p F$, $d' u' M'$), il cui modello si trova abbattendo il piano $Z' M'$ sullo stesso coordinato, ed è la figura $B B_1 D D_1 p$, q, M, $M_2 B$: 8.ª La piccola zona circolare proiettata verticalmente nella sua grandezza in $c' e' u' d'$, che è la battuta del cuneo.

Le facce curve sono:

1.ª L'arco cilindrico (c c_1 d_1 d, $d' e'$); 2.ª L'altro arco pure cilindrico (e e_1 u_1 u, $e' u'$) costituente la controbattuta del cuneo; 3.ª Infine la faccia storta orizzontalmente proiettata nella figura e_1 $f F p$ u_1 e_1 e verticalmente nell'altra $e' f' F''$ $u' p' u' e'$.

Taglio dei cunei. Per tagliare il cuneo testè considerato bisogna prima spianare una faccia della pietra, quella che vogliamo impiegare per fronte, e dopo aver tracciato su di essa il poligono $A B C D E$ (*Fig.* 205) identico all'altro $c' P' N' M' d'$ della *Fig.* 204 si taglieranno a squadra colla faccia medesima e secondo i due lati $B C$, $C D$ due altre facce sulle quali tracceremo i rettangoli $B C F G$, $C D H F$ identici ai rettangoli proiettati in $P' N'$ ed $N' M'$. Allora secondo le rette $G F$, $F H$ taglieremo una quarta faccia che riescirà parallela alla prima $A B C D E$, e sulla quale tracceremo il modello $q' M' N' P' f' F'' q'$ somministrato dalla *Fig.* 204. In secondo luogo col soccorso delle due rette $A B$, $B G$ e delle altre due $E D$, $D H$ spianeremo le facce di cui cia-

senna di queste coppie di rette determina il piano, e sulla prima applicheremo il modello del letto superiore del cuneo, sulla seconda quello del letto inferiore, ambedue superiormente indicati. Allora colle rette $p\ h$ ed $h\ i$ spianeremo la faccetta triangolare $p\ h\ i$, verificandone la esattezza mercè il modello dato dal triangolo mistilineo $I\ n'_1\ F''_1\ i$ della *Fig.* 204. In terzo luogo finalmente eseguiremo la piccola faccetta cilindrica $b\ c\ m\ f$, la zona circolare piana $a\ b\ f\ e$, l'intradosso cilindrico $A\ a\ e\ E$, e non rimarrà da tagliarsi che l'intradosso storto $e\ m\ p\ i\ g$. Per questo si costruiranno prima sul disegno dell'apparecchio alcune generatrici di tale intradosso, si segneranno sopra gli archi $c\ m$, $g\ i$, $p\ i$ i punti nei quali le generatrici medesime tagliano i corrispondenti archi sulla proiezione verticale, e con questi punti di rapporto e colla riga sarà facile giungere a tagliare l'intradosso in quistione.

576. *Osservazione I.* — Potrebbe avvenire che la retta $F''_1\ I$ tagliasse il quadrante $D'_1\ I\ i$. La soluzione allora non sarebbe ammissibile, perchè la mezza imposta non potrebbe esattamente applicarsi contro lo sguancio del piedritto. In questo caso bisognerebbe elevare maggiormente la sommità Z'' della linea $E''\ Z''\ F''$, od aumentare il raggio $Z''\ \omega$, lo che farebbe rialzare i punti I ed F''_1.

577. *Osservazione II.* — Non basta che la mezza imposta si applichi bene contro lo sguancio del piedritto, ma è necessario ancora che essa rnolando attorno allo spigolo verticale del punto (D_1, D'_1) non incontri ostacoli al movimento per parte di tutto l'intradosso compreso fra la generatrice più alta $E'_1\ Z''$ e ciascuna delle due curve $E''\ s'\ C'_1$, $F''\ p'\ D'_1$.

Per non aver dubbio sulla esistenza di un tale inconveniente, che sarebbe gravissimo, si costruiscono le sezioni che un piano orizzontale qualunque $v'\ x'\ w'$ produce nella superficie di rivoluzione generata dal semicerchio $C'_1\ w'\ E'_1$ attorno alla verticale del punto (C_1, C'_1), e nella superficie storta. La prima di queste sezioni ha evidentemente per proiezione orizzontale il circolo descritto col centro in C_1 e col raggio $C_1\ w$; la proiezione orizzontale $w\ x\ v$ dalla seconda si ottiene per punti ricorrendo ad un certo numero di generatrici della superficie, siccome dalla figura è con sufficiente

chiarezza dimostrato. Ora se le mentovate due curve non hanno alcun punto a comune situato a destra della faccia verticale $C_1 E_1$ sarà questa una prova che nel suo corso la mezza imposta non incontrerà l'intradosso almeno all'altezza del piano $v' x' w'$. La medesima prova dovrà ripetersi per altre sezioni orizzontali; e se avverrà che per qualcuno di questi piani le due sezioni s'incontrino prima di giungere al piano verticale $C_1 E_1$ bisognerà cangiare i dati precedentemente stabiliti per la superficie d'intradosso, inalzando di più questa superficie o coll'aumentare l'altezza $Z'_1 Z''$, o coll'accrescere il raggio $Z'' \omega$.

CAPO VII.

Dell'apparecchio elicoidale impiegato nella costruzione dei Ponti obliqui.

578. Gli apparecchi indicati al N. 568 e 570, indipendentemente dall'acutezza degli angoli sotto i quali le superficie di giacitura dei letti incontrano l'intradosso e gli archi di fronte della volta, presentano un'inconveniente pel quale sono dai pratici rigettati nella costruzione delle grandi volte dei Ponti. Tale inconveniente consiste nel difetto di parallelismo delle indicate superficie di giacitura, difetto che esclude lo impiego dei piccoli materiali laterizi di forma parallelepipeda, che generalmente si usano in questo genere di costruzioni nell'interesse della economia. Agli ingegneri inglesi, di cui le costruzioni sono quasi esclusivamente composte di mattoni, è dovuta la introduzione nell'Arte dell'apparecchio che forma il soggetto del presente capitolo. La mercè di questo possono eseguirsi in pietra da taglio i due archi di testa e i filari di nascita, mentre tutto il resto della volta può costruirsi di opera laterizia o di materiali di piccole dimensioni. Ciò però non esclude la esecuzione intera della volta in pietra

da taglio, quando considerazioni imperiose di economia non obbligano l'Ingegnere ad impiegare un materiale diverso; e questo è la ragione per cui fra i diversi apparecchi proposti per i ponti obliqui noi abbiamo creduto utile d'esporre quello elicoidale.

579. Riterremo come note al lettore, per le cognizioni acquistate in Geometria Descrittiva, le proprietà dell'elica, quelle del conoide retto avente questa curva per direttrice, e tutto ciò che ha relazione alla rappresentazione grafica dell'una e dell'altro, cosicchè passeremo immediatamente ad esporre le operazioni necessarie al soggetto di cui ci occupiamo, le quali possono riassumersi nelle tre principali seguenti: cioè 1° determinare le linee d'apparecchio; 2° determinare le superficie di giacitura pei letti dei cunei; 3° tracciare e tagliare questi cunei.

Linee d'apparecchio.

580. *Spigoli longitudinali d'intradosso.* Questo primo studio si fa ordinariamente sullo sviluppo della superficie d'intradosso. Sia perciò n b b_1 a_1 il parallelogrammo formato dalle linee di nascita e dalle proiezioni delle fronti della volta fatte sul piano di quelle linee; il semicircolo d, β' d sia la sezione retta del cilindro di cui la superficie vuolsi assumere a intradosso della volta destinata a ricoprire l'area n b b_1 n$_1$, e la retta β' c c_1 sia l'asse. Preso il coordinato verticale X Y parallelo alle fronti della volta, si costruiranno facilmente col ministero di alcune generatrici, che si vedono tracciate sulla figura, le due ellissi a' c' b', a'_1 c'_1 b'_1 che saranno le proiezioni verticali e ad un tempo gli archi di sesto delle due fronti.

Ciò fatto, si prenda sul prolungamento della d_1 c d la parte d e eguale alla lunghezza assoluta della sezione retta d_1 β' d rettificata e la si divida in tante parti eguali in quante abbiamo supposto quest'ultima divisa dalle generatrici considerate; le rette f f_1, h h_1 . . . . condotte pei punti di divisione perpendicolarmente alla d e rappresenteranno (*Geom. Descritt.*) le posizioni delle generatrici stesse sullo sviluppo dell'intradosso: onde se a partire dalla c d e, e dalla sua corrispon-

dente c_1 d_1 e_1 si prenderanno le distanze $f g = f_1 g_1 = m m_1$, $h l = h_1 l_1 = n n_1 \ldots$ i punti $g, l \ldots, g_1, l_1 \ldots$, così determinati apparterranno alle trasformate delle linee di fronte della volta; per la qualcosa lo sviluppo totale dell'intradosso sarà la figura $b g l \ldots p p_1 \ldots l_1 g_1 b_1$.

Si tirino ora le corde $b p$, $b_1 p_1$ e si dividano nel medesimo numero impari di parti eguali, quanti sono i cunei di cui vogliansi comporre le due fronti. Per un punto qualunque di divisione p_1 conducasi una perpendicolare alla respettiva corda $b_1 p_1$; e se questa non passerà per un punto di divisione della corda opposta $b p$, si unirà il punto p_1 con quello q_1 di questa ultima che è più vicino alla perpendicolare medesima. Per tutti gli altri punti di divisione della $b_1 p_1$ si condurranno poi altrettante rette parallele a $p_1 q_1$, o queste che non sono altra cosa che trasformate di eliche tracciate sull'intradosso della volta (*Geom. Descritt.*), passeranno per i punti di divisione della corda opposta $b p$, e determineranno le larghezze dei cunei sugli archi di fronte. Sono queste eliche che si assumono a spigoli longitudinali dell'intradosso; quindi il nome che è stato dato all'apparecchio in quistione.

Le corde di due archi qualunque $q r$, $q s$, determinati sulle trasformate delle curve di fronte dalle trasformate delle eliche, non essendo egualmente inclinate su queste ultime rette che sono equidistanti fra loro, ne consegue che gli archi stessi non possono essere eguali, e che tali non saranno neppure le larghezze dei cunei di fronte. A cagione però del gran numero di questi cunei che in generale compongono le fronti delle grandi volte, e per il quale resultano necessariamente piccole le larghezze dei cunei medesimi, la differenza fra queste larghezze riesce inapprezzabile, e per conseguenza insensibile anche la irregolarità che ne resulta.

581. *Spigoli trasversali, o di testa.* Se per determinare questi spigoli prendessimo dei piani paralleli alle fronti, le trasformate delle sezioni fatte da questi piani nell'intradosso sarebbero altrettante curve parallele a $b l r p$, $b_1 l_1 r_1 p_1$. Ma queste curve tagliando obliquamente gli spigoli longitudinali d'intradosso, i quali sono perpendicolari o quasi perpendicolari alle corde $b p$, $b_1 p_1$ ne conseguirebbero, oltre quelli che si scorgono nelle teste dei cunei di fronte, molti altri angoli acuti

specialmente in prossimità delle generatrici $b\ b_1$, $u\ u_1$, $p\ p_1$. Non potendo evitare i primi si è cercato di eliminare almeno i secondi, e ci siamo giunti determinando sullo sviluppo la testa dei cunei intermedi di ciascun filare con linee rette $x\ y$, $x_1\ y_1$ perpendicolari alle trasformate degli spigoli longitudinali. Gli spigoli $x\ y$, $x_1\ y_1$ si convertiranno come i precedenti in archi d'elica, allorchè lo sviluppo dell'intradosso tornerà a prendere la sua curvatura cilindrica, e la faccia d'intradosso di ciascun cuneo sarà un quadrilatero rettangolo.

Ciò posto il tracciato degli spigoli di testa sullo sviluppo $b\ p\ p_1\ b_1$ potrà eseguirsi nel modo seguente. Si determineranno prima le teste dei cunei di una delle fronti $b\ l\ u\ s\ p$ per modo che fra essi e i rimanenti abbia luogo un buon legame; la medesima operazione si eseguirà poi sui cunei della fronte opposta $b_1\ l_1\ u_1\ s_1\ p_1$ dando a questi la medesima lunghezza di quelli che occupano nell'altra fronte una posizione simmetrica rapporto all'asse. Allora i filari compresi fra i cunei direttamente opposti come C e C_1 resulteranno di eguale lunghezza, e potranno tutti esser composti di pietre presso a poco eguali. Al più potranno occorrere alcune pietre di riempimento, come D, D_1 . . . il che non cambia il sistema generale delle linee d'apparecchio adottato. Anche le pietre costituenti i filari di nascita dovranno esser tagliate ad angolo retto, acciocchè i cunei della volta non vadano ad incontrare sotto angoli troppo acuti il piano della nascita stessa. Ciò dà luogo ad una serie di angoli alternativamente salienti e rientranti, come si vedono in E, E_1, E_2 . . . . F, F_1 . . . .

Nella *Fig.* 206 noi abbiamo mostrato al di quà dello spigolo longitudinale che passa pel centro o dello sviluppo d'intradosso, l'apparecchio della volta in pietra da taglio, al di là del medesimo spigolo e verso la generatrice $b\ b_1$ abbiamo inteso di rappresentare l'apparecchio in materiale laterizio.

582. *Proiezioni delle linee d'apparecchio.* Sulla *Fig.* 206 abbiamo costruite solamente le proiezioni degli spigoli longitudinali d'intradosso e quelle dei cunei di fronte per non complicarla di troppo. Sono state trovate le prime riportando sulle proiezioni delle generatrici i punti nei quali sono esse incontrate dalle trasformate delle eliche sullo svi-

luppo $b\ p\ p_1\ b_1$; sono state trovate le seconde col medesimo processo.

Osservando però che le eliche proiezioni degli spigoli longitudinali sono tutte identiche possiamo costruirne col metodo indicato una sola $k\ r\ r_1\ k_1$; quindi dopo aver tagliato un foglio sottile di cartone o di zinco secondo la curvatura di questa linea lo si può muovere sul piano di proiezione facendo percorrere a ciascun punto della linea stessa la generatrice corrispondente del cilindro, di guisa che il punto k, per esempio, scorra sempre sulla generatrice K o c_1, che il punto k_1 non abbandoni la generatrice $k_1\ a_1\ a$, e così degli altri punti. E la linea $k\ r\ r_1\ k_1$ occupera le posizioni delle proiezioni cercate allorchè passerà per le proiezioni dei punti nei quali la generatrici dell'intradosso sono tagliate dalla trasformate della eliche sul suo sviluppo; dei quali punti almeno uno dovrà essere determinato su ciascuna generatrice prima di far muovere la linea $k\ r\ r_1\ k_1$. Un mezzo analogo al precedente può praticarsi per determinare le proiezioni verticali delle medesime eliche dopo avere con esattezza costruita la linea $k'\ r'\ r'_1\ k'_1$ proiezione verticale dell'altra $k\ r\ r_1\ k_1$.

I punti (r, r'), (r_1, r'_1) . . . . che vengono per tal modo a determinarsi sulle curve di fronte $(a\ c\ b,\ a'\ c'\ b')$, $(a_1\ c_1\ b_1,\ a'_1\ c'_1\ b'_1)$ saranno quelli in cui queste medesime curve sono incontrate dagli spigoli d'intradosso. È necessario assicurarsi che questi punti sieno determinati con la massima esattezza, e perciò non bisogna trascurare alcuno dei mezzi di verificazione che il disegno offre ad esuberanza.

Superficie di giacitura pei letti dei cunei.

583. Abbiamo detto altrove N.° 543, che le superficie comprendenti fra loro i diversi filari composti dai cunei d'una volta devono esser normali all'intradosso della volta stessa. La direttrici di tali superficie essendo nel caso nostro altrettante eliche tracciate sull'intradosso, che è un cilindro a base circolare, ne segue che le loro generatrici incontreranno tutte l'asse del cilindro sotto un angolo di 90 gradi, onde

queste superficie saranno altrettanti conoidi retti e segnatamente altrettante elicoidi storte a piano direttore. Della medesima famiglia sono pure le superficie dividenti i cunei di uno stesso filare, poichè le rette $x\ y$, $x_1\ y_1$ (*Fig.* 206) che ne rappresentano le direttrici sullo sviluppo d'intradosso pel cuneo $x\ y\ y_1\ x_1$ si convertono in eliche riportate che sieno sull'intradosso della volta.

Abbiamo già dichiarato (N.° 579) di ritenere come dimostrate le proprietà dell'elicoide storta a piano direttore; noi quindi le rammenteremo soltanto mano a mano che se ne presenta la occasione nelle operazioni occorrenti alla completa soluzione del problema.

584. Primieramente osserveremo che la superficie di giacitura dividenti i filari dei cunei non sono tagliate dai piani di fronte $a\ b$, $a_1\ b_1$ della volta secondo linee rette, ma secondo certe linee la di cui curvatura non è insensibile che nei punti di una gran corda. E quantunque sappiasi (*Geom. Descritt.*) costruire la sezione prodotta nell'elicoide a piano direttore da un piano obliquo al suo asse, tuttavia gioverà costruire almeno la fronte di un cuneo di testa per rammentare al lettore la forma di tali sezioni, e perchè importa di dimostrare una proprietà singolare di cui godono le tangenti ad esse condotte nei punti in cui incontrano la curva direttrice dell'intradosso.

Sieno pertanto i quadranti $b'\ o''$, $a'\ o'''$ (*Fig.* 207) le sezioni rette prodotte in una semivolta cilindrica obliqua orizzontalmente proiettata nel trapezio $o'\ a'\ a\ o$ da un piano $o\ s_1$ perpendicolare al suo asse $o\ o'$, e di cui la grossezza uniforme è indicata dalla retta $o''\ o'''$. Sul piano verticale $a\ n'$ abbattuto alla sinistra di questa retta si costruiscano, mediante alcune generatrici che in proiezione verticale sono indicate dai punti 1, 2, 3, 4; 1', 2', 3', 4' le trasformate a_1; 4 . . . . 1. t_1; a. 4' . . . . 1'. s_1 dei due quadranti $b'\ o''$, $a'\ o'''$, e si tirino le corde $a_1\ t_1$, $a\ s_1$, che dovranno resultare parallele perchè tali sono le superficie dei due cilindri d'intradosso e d'estradosso. Supposta la volta divisa in sette filari di cunei, divideremo corrispondentemente la corda $a_1\ t_1$ a pari punti di divisione condurremo altrettante perpendicolari ad essa, che potranno essere considerate come le trasformate delle eli-

che spigoli longitudinali dell' intradosso (N° 580). Assumendo ora ciascuna di queste eliche a direttrice di una superficie avente le generatrici normali al cilindro d' intradosso, sappiamo (*Geom. Descritt.*) che il cilindro d' estradosso sarà da quelle superficie tagliato secondo altrettante eliche aventi lo stesso passo delle prime. Queste ultime eliche si trasformeranno sullo sviluppo del corrispondente cilindro secondo rette parallele fra loro ma non perpendicolari nel nostro caso alla corda $a\ s_1$; poichè considerando, per esempio, l' elica del cilindro d' intradosso la quale avrebbe per trasformata la retta $t_1\ S$ perpendicolare ad $a_1\ t_1$, si vedrà che il punto S è non solo la posizione che prende sullo sviluppo il punto nel quale l' elica stessa incontra la linea di nascita $b\ b'$, ma è pure la estremità della normale corrispondente, dalla quale ha principio l' elica secondo cui il cilindro d' estradosso è tagliato dalla elicoide avente per direttrice la $t_1\ S$. Ora siccome la normale nel punto o'', che sullo sviluppo del cilindro d' intradosso ha la posizione t_1 termina in o''' a cui sullo sviluppo del cilindro d' estradosso corrisponde il punto S, è manifesto che la trasformata dell' elica la quale su quest' ultimo sviluppo ha principio in S dovrà terminare in s_1 e sarà la retta $s_1\ S$. Consegue da ciò che le trasformate degli spigoli longitudinali d' estradosso saranno le rette $a_2\ d_2$, $n_2\ c_2$ . . . . . tutte parallele ad $s_1\ S$.

Profittando ora delle stesse generatrici che han servito a costruire gli sviluppi dei due cilindri si riporteranno sulle loro proiezioni orizzontali i punti nei quali sugli sviluppi stessi sono le loro posizioni incontrate dalle trasformate $a_1\ c_1$, $n_2\ c_2$; $n_3\ d_1$, $n_3\ d_2$ delle eliche direttrici delle superficie normali di giacitura di un medesimo filare, e si troveranno per proiezioni orizzontali delle due eliche d' intradosso le curve $b_2.\ 4.\ c$, $b_2.\ 4.\ 3.\ 2.\ d$; per quelle delle due eliche corrispondenti d' estradosso, le curve $n_2.\ 4'_1\ 3'_1\ e$, $a_2.\ 4'.\ 3'.\ 2'.\ f$. Le rette $n_3\ b_2$, $4'.\ 4$, $3'.\ 3$ . . . . . saranno generatrici dell' elicoide costituente la superficie destra di giacitura del filare, le altre $n_2\ b_2$, $4'_1\ 4_1$ . . . . saranno generatrici dell' elicoide costituenti la superficie di giacitura opposta. Le proiezioni verticali si trovano distese sui raggi $o'\ 4'$, $o'\ 3$ . . . . . della sezione retta.

Il piano di testa P o della volta taglierà dunque le due elicoidi secondo due linee aventi per proiezioni orizzontali le rette $f\ d$, e c. Le proiezioni verticali sono respettivamente $f'\ d'\ i'\ o'$, $e'\ c'\ r'\ o'$ delle quali un punto qualunque i' od r' si trova costruendo il punto d'incontro con lo stesso piano P o delle generatrici $2'.\ 2,\ 4'_1.\ 4_1$.

585. *Tangenti agli spigoli di testa.* Le tangenti agli spigoli di testa nei punti c', d' . . . . nei quali la direttrice dell'intradosso è da essi incontrata concorrono in un medesimo punto dell'asse verticale $o'\ o'''$ di questa direttrice.

Supponiamo che il coordinato verticale sia il piano stesso o s_1 della sezione retta, e proponiamoci di costruire la tangente in $(d,\ d')$ allo spigolo $f'\ d'\ o'$. È noto che la tangente richiesta e la intersezione del piano P o col piano tangente all'elicoide storta avente per direttrice la curva $b_2.\ 4.\ 3.\ 2.\ d$. È noto pure (*Geom. Descritt.*) che la traccia di questo secondo piano sul coordinato o s_1 deve essere parallela alla proiezione $o'\ d'$ della generatrice dell'elicoide corrispondente al punto di contatto, onde sarà sufficiente trovare un punto solo di questa traccia. Ora se riflettiamo che la posizione presa nello sviluppo dalla tangente in $(d,\ d')$ all'elica $(b_2.\ 4.\ d,\ b'\ d'\ o'')$ coincide con la trasformata dell'elica stessa si vedrà che questa posizione è data dalla $d,\ a_2$; che la porzione $d,\ h_1$ di questa retta determinata dalla o s_1 esprime la lunghezza della tangente compresa fra il punto di contatto e il piano della sezione retta; e che $l,\ h_1$ cateto del triangolo rettangolo $d,\ h_1\ l_1$ è la lunghezza della proiezione di quella parte di tangente sul piano della sezione medesima. Talchè se al disopra della $d'\ h'$ tangente in d' al quadrante $b'\ d'\ o''$ prendesi $d'\ l'$ eguale ad $h_1\ l_1$, il punto l' sarà la traccia della tangente alla linea considerata sul prescelto piano coordinato, e quindi $l'\ v'$ parallela ad $o'\ d'$ sarà la cercata traccia del piano tangente. Ma la $o'\ o'''$ è pure traccia del piano P o sul medesimo coordinato, dunque il punto v sarà quello in cui quest'ultimo è incontrato dalla tangente che si cerca, la quale sarà perciò la retta $v'\ d'$.

Ciò posto, conducasi la $o'\ q'$ perpendicolare sopra $v'\ l'$, e faccisi l'angolo $d'\ o'\ d'' = v'\ o'\ q' = x$, il raggio $o'\ d' = r$, l'angolo d o $u = \alpha$, e s'indichi con p il passo delle eliche

che sono spigoli d'intradosso. Osservando che $o' q' = d' l'$ si avrà dal triangolo $o' v' q'$

$$o' v' = \frac{l' d'}{\cos. x}$$

per la generazione dell'elica (*Geom. Descritt.*)

$$\frac{l' d'}{d u} = \frac{2 \pi r}{p}$$

infine dai triangoli rettangoli $o d u$, $o' d' d''$ nei quali $o u = d'' o'$

$$d u = r \cos. x \text{ tang. } \alpha$$

Moltiplicando membro a membro queste tre eguaglianze, e sopprimendo i fattori comuni si trova:

$$o' v' = \frac{2 \pi r^2 \text{ tang } \alpha}{p}$$

espressione indipendente dall'angolo variabile x, e composta di quantità tutte costanti. Onde è manifesto che le tangenti a tutti i punti d' degli spigoli di testa incontreranno l'asse verticale della curva direttrice dell'intradosso in un medesimo punto v'. Si potrà dunque trovare il punto v' profittando del punto di nascita (b, b') che sullo sviluppo ha la proiezione a_1. La tangente su quest'ultimo sarà la retta $n_1 t$ parallela alle trasformate delle eliche, e la $s t$ sarà la lunghezza della proiezione di questa tangente sul piano $o s_1$ della sezione retta. Talchè riportando la $s t$ sulla $b' b$ da b' in t', e tirando da t' una parallela ad $o' b'$ avremo immediatamente determinato il punto v'.

La proprietà testè dimostrata per le tangenti agli spigoli di testa nei punti in cui questi incontrano la curva direttrice dell'intradosso è comune anche alle tangenti dei medesimi spigoli condotte ai punti in cui essi incontrano la curva direttrice dell'estradosso. Onde se per la nascita n conducesi la $n t_2$ parallela alla trasformata $n_2 c_2$ delle eliche spigoli d'estradosso, e se riportasi la $s t_2$ da o' in w' sarà w' il punto di concorso di queste ultime tangenti.

La *Fig.* 208 è la proiezione della fronte della semivolta fatta sopra un piano $x y$ parallelo al piano $o P$. Si sono ottenuti gli archi $A' E' G'''$, $B' D' O''$ proiettando sopra $x y$ i punti nei quali il piano $o P$ è incontrato dalle generatrici

dei due cilindri, e al disopra di queste proiezioni riportando le altezze delle generatrici medesime contate dal coordinato orizzontale; le quali altezze vengono evidentemente somministrate dalle perpendicolari ad o' n' comprese fra questa retta e i quadranti n' e' o''', b' d' o''. Al modo stesso sono stati determinati i punti C', D', E', F'', I', H' che han servito alla costruzione degli spigoli di testa E' C' H' O', F' D' I' O'. Le lunghezze o' v', o' w' riportate sul prolungamento della verticale O''' O'' han fatto poi conoscere i punti V', W' nei quali concorrono le tangenti a quelli spigoli.

586. *Apparecchio delle fronti.* Nei grandi ponti la curvatura degli spigoli di testa è così poco sensibile che essi quasi confondonsi colle tangenti ai punti in cui tagliano la curva di fronte. Onde è che i costruttori preferiscono di fare rettilinei questi spigoli, e solo hanno l'avvertenza di dirigerli per modo che concorrano tutti nel punto al quale concorrerebbero le loro tangenti. Tale è l'apparecchio delineato sulla fronte della volta obliqua disegnata nella *Fig.* 206. Dopo avere determinati con tutta la possibile esattezza i diversi punti r' nei quali gli spigoli longitudinali d'intradosso tagliano la curva di fronte, si è trovato il punto di concorso S tirando sul piano dello sviluppo la p s_2 parallela alla trasformata r r_1 e prendendo s' S eguale ad e s_2. Congiungendo allora con S i punti di divisione dell'arco a' c' b' sono stati ottenuti tutti gli spigoli in quistione, e quindi han potuto essere tracciate le teste di tutti i cunei di fronte.

Taglio dei cunei.

587 *Forma dei cunei.* Consideriamo il cuneo di fronte la cui superficie d'intradosso ha per sviluppo il quadrilatero a_2 x_1 d_1 c_1 (*Fig.* 207), e che riposa sulla pietra di nascita o cuscinetto C_1. La retta n_2 x_1 perpendicolare ad n_1 c_1 sarà la trasformata dell'elica che è spigolo di testa del cuneo sull'intradosso della volta. Noi possiamo costruire la proiezione orizzontale di questa elica servendosi di alcune generatrici dell'intradosso stesso, e si troverà la curva b_2 x; tirando x_1 x perpendicolare all'asse o o', avremo la normale del punto x, e nel tempo stesso la proiezione orizzontale x

del punto in cui essa incontra il cilindro d'estradosso; prolungando $x\ x_1$ fino ad incontrare la $d_2\ a_2$ in z_1, sarà z_1 la posizione del punto z sullo sviluppo dell'estradosso, e quindi $a_2\ z_1$ rappresenterà su questo sviluppo l'elica secondo la quale l'estradosso stesso è tagliato dalla Elicoide avente per direttrice l'arco $b_2\ x$ e per generatrice la $x\ z$: la proiezione orizzontale di questa elica è $a_2\ z$, e quindi il quadrilatero $a_2\ z\ x\ b_2$ sarà la faccia o testa del cuneo che appoggia sul ensemetto C_1. Segue da ciò che i quadrilateri $x\ z\ f\ d$, $a_2\ b_2\ c$ e rappresenteranno i due letti del cuneo, gli altri due $a_2\ z\ f\ e$, $b_2\ x\ d\ c$ esprimeranno respettivamente le sue facce d'estradosso e d'intradosso, infine il quadrilatero $C'\ D'\ F'\ E'$ (*Fig.* 208) sarà il modello della sua fronte.

588. *Taglio.* Il mezzo più semplice e che ad un tempo offre garanzia di maggiore esattezza è quello di costruire un parallelepipedo che inviluppi completamente il cuneo da eseguirsi, e di tagliare in esso le due superficie cilindriche d'intradosso e d'estradosso.

A tale oggetto osserveremo che la proiezione del cuneo considerato sul piano della sezione retta è compresa fra la retta $a'\ b'$ e la curva $f'\ d'$, e che quella orizzontale lo è fra i piani verticali $P_1\ P_1$, $P_2\ P_2$ paralleli ad $s_1\ o$. Il parallelepipedo inviluppo dovrà dunque aver almeno per base il rettangolo $A\ B\ D\ E$, e per altezza la distanza fra i due piani $P_1\ P_1$, $P_2\ P_2$.

Sia $a\ b\ d\ f\ f'\ d'\ b'$ questo parallelepipedo (*Fig.* 209). Sulla faccia $a\ b\ d\ f$, e sulla sua opposta tracceremo il modello $a'\ b'\ c'\ d'\ f'\ e'\ a'$ tratto dalla proiezione del cuneo sul piano della sezione retta della volta (*Fig.* 207); e quindi taglieremo le due superficie cilindriche aventi per direttrici gli archi $a_1\ e_1\ f_1$, $b_1\ 3.\ d_1$ profittando dei punti di rapporto 4, 3, 2. Si tracceranno sulla superficie d'intradosso le due generatrici $b_1\ b_2$, $d_1\ d_2$, e su quelle d'estradosso le altre corrispondenti ai punti a, ed f. Prendendo di poi sulla generatrice $d_1\ d_2$ una lunghezza $d_1\ e$ eguale alla distanza che separa il punto $(d,\ D')$, (*Fig.* 207 e 208), dal piano della sezione retta, ed analogamente determinando sulla generatrice $b_1\ b_2$ il punto c, noi potremo applicare il modello $a_2\ e_1\ d_1\ x$, (*Fig.* 207) sul cilindro d'intradosso in modo che il punto a_2

coincida con c_1 e l'altro d_1 con c. Allora i lati a_1 c_1, x_1 d_1 si disporranno sulla superficie medesima secondo le eliche e i_1 o i_1, la curva c_1 d_1 dello stesso modello secondo l'arco di ellisse c i_1, che volendo potrà essere prolungato anche fino al punto m della curva b_1 3. d_1, infine la retta a_1 x_1 secondo l'arco d'elica c_1 1. Se i punti i ed i_1 sulla *Fig.* 209 si determinassero col medesimo processo impiegato per gli altri due c e c_1 le eliche i_1 c_1, i c potrebbero tracciarsi anche indipendentemente dal modello indicato col mezzo di una riga flessibile a s_1 come la figura dimostra.

Ripetasi questa medesima operazione sulla superficie di estradosso; l'arco d'ellisse n o che troveremo mediante l'applicazione del modello a_2 c_2 d_2 x_1 dello sviluppo, servirà insieme con l'altro o i_1 a dirigere il taglio del piano su cui trovasi la fronte del cuneo.

Si può raggiungere la massima esattezza nella determinazione di questo piano trovando, come si è fatto pei punti c e c_1 sulla costola d h del parallelepipedo corrispondente al punto D della *Fig.* 207, il punto r in cui essa è tagliata dal piano s_1 o della sezione retta.

Eseguita una volta questa faccia piana vi applicheremo il modello C' D' F' E' della *Fig.* 208 e tracceremo gli spigoli di fronte n i_1, o c. A questo punto non rimane altra cosa a farsi che eseguire le facce elicoidali costituenti i letti del cuneo, e la faccia pure elicoidale che è la sua testa opposta alla fronte.

La *Fig.* 210 rappresenta il cuneo tagliato, e dalla posizione delle righe s, s_1 può desumersi il metodo da seguirsi per la esecuzione dei letti. La *Fig.* 211 rappresenta il cuneo medesimo posato colla sua testa sopra la faccia corrispondente del cuscinetto C.

589. *Osservazione I.* — Il metodo precedentemente insegnato per tagliare i cunei d'un ponte obliquo ad apparecchio elicoidale induce necessariamente la perdita di non piccola quantità di pietra, come la *Fig.* 209 dimostra ad evidenza. Per questa come anche per l'altra ragione che quasi mai vi ha bisogno di eseguire l'estradosso, i costruttori rigettano questo metodo per sostituirvene altri che se hanno su questo il vantaggio di una perdita minore di pietra, sono però di più difficile applica-

zione, e privi affatto di quelle garanzie di esattezza che deve essere la prima e principale cura dell'Ingegnere incaricato di simili opere. D'altronde non essendo necessario che le dimensioni del parallelepipedo inviluppo siano quelle appunto da noi assegnate sarà sempre possibile rendere minore la perdita della pietra cercando il minore parallelepipedo che possa essere circoscritto al cuneo in quistione; ossivvero traendo da una medesima pietra due cunei accoppiati siccome vedesi nella *Fig* 212, oppure anche tagliandone in un medesimo parallelepipedo due o tre separatamente nel modo indicato dalla *Fig.* 213.

590 *Osservazione II.* — Noi abbiamo già avuto occasione di notare (N.° 569) la esistenza di una spinta al vuoto nelle volte oblique, ed abbiamo nei numeri successivi accennati i metodi di apparecchio proposti e cuo successo applicati nelle piccole volte per eliminare o rendere quasi nullo l'effetto di una tale spinta.

L'apparecchio elicoidale lascia anch'esso intatta la quistione, ma a differenza degli altri offre esso il vantaggio di aver sottoposti agli effetti temibili della spinta al vuoto soltanto i cunei delle parti più basse della volta. Onde i costruttori, invece di conservare alle fronti il sesto intero elittico, come la *Fig.* 206 dimostra, sogliono elevare i piedritti fino ad un certo punto x', corrispondente a quella generatrice dell'intradosso, al disotto della quale tutti i cunei tendono a strisciare verso le fronti stesse.

Senza entrare nei particolari del calcolo col quale potrebbe determinarsi la posizione di un tal punto, lo che ci porterebbe fuori dei limiti imposti dal presente lavoro, noi considereremo i cunei di un certo filare, per esempio di quello che insiste sulla superficie di giacitura avente per direttrice l'elica $b\ b_1\ \beta_1$ come animati dal solo loro peso. Allora astrazione facendo dall'aderenza delle malte come dal legame scambievole che influisce a ritenerli in sito è chiaro che i cunei tenderanno a discendere lungo i letti respettivi secondo le linee di massima pendenza degli elementi superficiali costituenti la faccia di giacitura $b\ b_1\ \beta\ \alpha_1\ \alpha$ considerata. Supponiamo che la pressione esercitata dai cunei sugli elementi di questa faccia abbia luogo sui diversi punti della elica $\gamma\ \gamma_1\ \beta$

che divide la faccia stessa in due parti eguali. Se costruiamo il piano tangente corrispondente a ciascun punto di questa ultima, e quindi la retta perpendicolare sulla sua traccia orizzontale che rappresenterebbe la linea respettiva della sua più grande pendenza, si vedrebbe che queste rette dall'essere convergenti verso la traccia orizzontale a b del piano di fronte della volta si dispongono poco a poco a divenire parallele alla traccia stessa, e che al di là di quella di queste linee che le è parallela tutte le altre mantengono presso a poco quest'ultima direzione. Dal che può inferirsi che per tutti i punti dell'elica γ γ_1 β situati al di sotto di quello pel quale il piano tangente ha la propria linea di massima pendenza parallela ad a b, i cunei tendono a scorrere verso la fronte della volta e spingono per conseguenza al vuoto, mentre per tutti gli altri situati al disopra i cunei spingono contro i piedritti. Il piano tangente al punto in questione è dunque perpendicolare al piano a b; onde alla costruzione di un tal piano rivolgeremo ora le nostre operazioni.

Prendiamo per coordinato verticale un piano parallelo alla sezione retta, per linea di terra la X_1 Y_1 condotta perpendicolarmente alla c c_1, e i due semicerchi di raggi c d, c d' siano le proiezioni verticali dei semicilindri d'intradosso e d'estradosso: il quadrante γ' z'' β'' sarà la proiezione verticale dell'elica γ γ_1 β. Ciò posto, costruiamo il piano tangente alla faccia di giacitura b b_1 β α, α nel punto (β, β'') dell'elica bisettrice: questo piano contiene la generatrice $(\beta, \beta'$ $k)$ della faccia medesima, e la tangente $(\beta''$ T', β $T)$ dell'elica γ γ_1 β; dunque resulta verticale ed ha per traccia orizzontale la stessa retta β T; onde l'angolo b T β misurerà la sua inclinazione sul piano della sezione retta della volta. Ora è noto (*Geom. Descritt.*) che tutti i piani tangenti nei diversi punti della medesima elica γ γ_1 β sono egualmente inclinati su quel piano; quindi saranno anche paralleli ai diversi piani tangenti della superficie conica retta che ha il vertice nel punto (β, β'') e per traccia verticale il circolo di raggio β'' T'. Conduciamo per (β, β'') una retta $(\beta$ U, β'' $U')$ perpendicolare al piano verticale a b; se per la sua traccia verticale U' tiriamo U' V' tangente al circolo β'' T', questa retta sarà la traccia verticale d'un piano tangente alla su-

perficie conica sunnominata o perpendicolare al piano $a\ b$. Dunque la $c''\ z'\ z''$ parallela ad $U'\ V'$ (*Geom. Descritt.*) farà conoscere la proiezione verticale $z'\ z''\ z'''$ della generatrice per la quale passa il piano tangente alla faccia di giacitura perpendicolare alla fronte della volta; generatrice che somministrerà il punto di contatto x'' sull'elica bisettrice, e in fine il punto x' proiezione verticale della generatrice d'intradosso limite di quella infima parte della volta di cui i cunei tendono a muoversi verso il vuoto. Questa generatrice sarà dunque $x_1\ z_2$

Esiste un altro piano tangente al cono $T'\ V'$ egualmente perpendicolare al piano $a\ b$, alla cui traccia orizzontale è parallela la generatrice $c\ x'$ che fa con $c\ \beta'$ un angolo eguale a $\beta'\ c\ x'$; e quindi si trova l'altra generatrice $x_1\ x_2$ fornita dalla stessa proprietà che la precedente rispetto all'altra infima parte della volta. Proiettando i punti x_1, z_1 sugli archi di fronte $a'\ c'\ b'$, $a'_1\ c'_1\ b'_1$ si determinano immediatamente i due sesti $x'_1\ c'\ z'_1$, $x'_2\ c'_1\ z'_2$ che dovrà avere la volta disegnata sulla *Fig.* 206, talchè i suoi piedritti dovranno essere elevati fino all'altezza della retta $x'_1\ z'_2$.

591. *Osservazione III.* — La ipotesi superiormente ammessa che i cunei possano strisciare sui loro letti per effetto del proprio peso non ha luogo nella pratica. Poichè i cunei di un medesimo filare portano quelli del filare sovrapposto, e il peso di questi, anche indipendentemente dal carico che la volta è destinata a sopportare, si converte in una pressione contro i primi il cui effetto si è di ritenerli in sito. Ma da tali pressioni nascono nuove forze che danno luogo a ciò che in Meccanica chiamasi coppia, e questa tende a far prendere ai cunei un movimento di rotazione attorno alla verticale del centro della volta. Per la qual cosa se i piedritti resistono convenientemente, lo insieme di tutte le pressioni sui cunei si risolve in un affetto di torsione analogo a quello che il vento produce sulle paraboloidi iperboliche inclinate in contraria direzione, che formano le due ali opposte di un molino.

Queste medesime considerazioni si applicano agli sforzi agenti sulle teste dei cunei, le quali si trovano sopra delle superficie elicoidali che tagliano, come sappiamo, ad angolo retto le altre costituite dai letti dei cunei stessi. È vero che

l'azione resultante di questi sforzi ha luogo in direzione contraria a quella che sussiste sulla superficie dei letti; ma l'una non potrà quasi mai distruggere completamente l'altra; onde la volta si troverà sempre sottoposta ad una resultante e ad una coppia resultante della quale la direzione e la energia dipenderanno dal taglio più o meno perfetto dei cunei, dalla qualità delle malte impiegate, dalla cura usata nella posa, dagli attriti, dalla curvatura più o meno grande della superficie di giacitura e della testa, infine dal grado di collegamento che hanno fra di loro le diverse parti della costruzione.

592. *Osservazione IV.* — Riesce quasi impossibile il determinare la resultante e la coppia resultante delle pressioni agenti sui cunei di una volta obliqua, tante essendo e così svariate le cause che possono modificarne la intensità e stabilirne la direzione. Onde gli Ingegneri han tentato piuttosto di distruggere separatamente gli sforzi parziali e di raggiungere per tal modo il maggior grado di stabilità.

Intanto la elevazione delle pile fino ai punti (x_1, x'_1), (z_1, z'_1) (*Fig.* 206) determinati col processo indicato al N.° 590 offre il mezzo di sopprimere tutti i cunei che tendono a strisciare verso il vuoto. Allora all'arco ellittico $x'_1\ c'\ z'_1$ può sostituirsi senza timore un arco di cerchio. Conviene qui osservare che il punto (x_1, x'_1) il quale dipende dalla direzione delle sliche spigoli longitudinali d'intradosso, e per conseguenza dalla corda $b\ p$ della trasformata del sesto della volta, potrebbe resultare tanto alto da diminuire considerabilmente la distanza fra le pile del Ponte. In tal caso è permesso abbassarne un poco la posizione senza grave inconveniente. Quanto alle pressioni che agiscono sulla superficie di giacitura può osservarsi non essere indispensabile di ricondurle ad agire in direzione parallela alla fronti della volta, poichè ogni filare di cunei si trova disposto in un modo simmetrico rapporto all'asse con quello collocato alla medesima altezza; onde consegue che le spinte agenti in direzione contraria su questa superficie si distruggono in parte.

Le forze però che agiscono sulle teste dei cunei in una direzione non possono essere distrutte da quelle che agiscono in direzione contraria. Ma i piani tangenti alla superficie su cui si trovano le teste medesime resultando quasi verticali

è possibile rendere quasi nullo l'effetto della coppia resultante di quelle forze, sostituendo a tali superficie dei piani verticali paralleli alla fronti della volta. Lo che non diminuisce la solidità rimanendo i cunei sufficientemente sostenuti sui loro letti dalla pressioni dei filari adiacenti. Con tal mezzo la torsione prodotta dal peso dei cunei sulle superficie delle loro teste viene completamente distrutta.

593. *Osservazione F.* — Quando le fronti della volta si fanno in pietra da taglio e il rimanente si costruisce in mattoni, non solo le teste dei cunei di fronte, ma le facce eziandio di giacitura si tagliano secondo superficie piana. Gli spigoli di fronte resultano in tal caso normali al sesto della volta, e ciascuno di essi insieme alla corda dell'elica che sarebbe spigolo d'intradosso determina la faccia di giacitura del cuneo corrispondente. Una irregolarità si manifesterà senza dubbio negli spigoli d'intradosso al seguito di tale modificazione del loro apparecchio, ma essa riescirà quasi insensibile, e con gran vantaggio verrà compensata dalla semplicità e dall'esattezza che può raggiungersi nella esecuzione dei cunei.

Supponiamo pertanto la semivolta a destra della $c\ c_1$ (*Fig.* 206) apparecchiata nel modo anzidetto; e consideriamo il cuneo proiettato in $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1$, del quale la fronte è C'. Supponiamo inoltre che gli spigoli di fronte $\alpha'_1\ \alpha''_1$, $\delta'_1\ \delta''$ sieno normali alla curva $a'\ c'\ b'$, e proponiamoci di determinare la sua proiezione verticale.

La testa del cuneo $\beta_1\ \gamma_1$ essendo piana e parallela al piano della fronte, costruiremo prima l'Ellisse $(c_1\ e_1,\ c'_1\ e'_1)$ sezione fatta nell'intradosso dal piano $c_1\ e_1$, e proiettati su di essa i punti β_1, γ_1 avremo determinato l'arco $\alpha''_1\ \delta''_1$ che sarà proiezione verticale dello spigolo trasversale del cuneo. Gli archi $\alpha'_1\ \alpha''_1$, $\delta'_1\ \delta''_1$ pure elittici che sono proiezioni verticali degli spigoli longitudinali d'intradosso si troveranno costruendo la sezione del piano $c_1\ e_1$ ed altre sezioni parallele se occorrono. Ciò posto conducansi per α''_1 una parallela ad $\alpha'_1\ \alpha''_1$, per δ''_1 una parallela a $\delta'_1\ \delta''$, ed i quadrilateri mistilinei $\alpha'_1\ \alpha''_1\ \alpha''_2\ \alpha''$, $\delta'_1\ \delta''_1\ \delta''_3\ \delta''$ saranno proiezioni verticali delle facce di giacitura del cuneo; l'altro poligono $\alpha''_1\ \delta''_1\ \delta''_3\ \gamma''\ \alpha''_2$ sarà il modello della sua testa.

L'operazione fatta pel cuneo (C, C') ripetasi per ciascuno

degli altri, e si otterrà la proiezione verticale dell'arco di fronte apparecchiato in pietra da taglio.

Ordinariamente si fa piano l'estradosso di ciascheduno cuneo. Il modello di queste facce per i cunei (C_1, C'_1), (C, C'), (C_2, C'_2) è rappresentato dalla *Fig.* 214 nei quadrilateri C'_0, C_0, C''_0. Per ottenere questi quadrilateri abbiamo condotte le tre rette parallele A, A', A'' distanti fra loro quanto lo sono i tre piani verticali $a\ b$, $e_2\ e_1$, $c_2\ e_2$ della *Fig.* 206; di poi a partire da una verticale $k'_1\ k''_1$, rappresentata sulla *Fig.* 214 da una perpendicolare comune $K\ K'$, abbiamo prese le distanze $k''_1\ \alpha''_1$, $k''_1\ \alpha''_2$ e le abbiamo riportate in $K\ a$ ed in $K\ b$ sulla retta A; le distanze $k''_1\ \alpha''_2$, $k''_1\ \gamma''$ in $K'\ a'$, e in $K'\ b'$ sulla retta A'': allora ne è resultata la figura $a\ b\ b'\ a'$ per la faccia d'estradosso del cuneo (C, C'). Nello stesso modo sono state costruite la facce C'_0, C''_0 dei cunei fra i quali il precedente e compreso, e potrebbero essere a disegnate quelle di tutti gli altri.

Le *Fig.* 215 e 216 mostrano le costruzioni necessarie per ottenere i modelli delle facce di giacitura. In questa sono C e C' le proiezioni del cuneo che nella *Fig.* 206 è pure rappresentato da (C, C'); se non che ne abbiamo aumentate le dimensioni a maggior chiarezza delle costruzioni, ed abbiamo poi adoperate le stesse lettere per facilitarne il confronto. Le costole d'estradosso verticalmente proiettate in $\alpha''\ \alpha''_2$, $\delta''\ \delta''_2$ (*Fig.* 215) hanno per proiezioni orizzontali sulla *Fig.* 216 le rette $a\ b$, $d\ e$. Le rette P e P_2 rappresentano i piani della testa del cuneo, le altre P_1 e P_3 sono tracce di piani ausiliari paralleli ad essi.

Prendiamo (*Fig.* 215 e 216) per asse di abbattimento la costola d'estradosso $(d\ e,\ \delta''\ \delta''_2)$ e facciamo abbattere il letto $(\delta_2\ \gamma_2\ e\ d,\ \delta'_2\ \delta''_2\ \delta''_2\ \delta'')$ sul piano orizzontale P_4; il punto (γ_2, δ''_2) descriverà un arco di cerchio orizzontalmente proiettato sopra $e\ \gamma_2$ perpendicolare a $e\ d$: ma la costola $(\gamma_2\ e,\ \delta''_2\ \delta''_2)$ ha per lunghezza assoluta la $\delta''_2\ \delta''_2$, quindi facendo centro in e e con un raggio eguale a $\delta''_2\ \delta''_2$ descritto un piccolo arco che tagli la $\gamma_2\ e$, sarà e l'abbattimento del punto (γ_2, δ''_2) e e e quello dello spigolo di testa. Nello stesso modo si trova l'abbattimento $d\ f$ dello spigolo di fronte $(\delta_2\ d,\ \delta'_2\ \delta'')$. L'abbattimento $a\ f$ della sezione prodotta nell'intradosso dal

piano $\delta_2\ \gamma_2$ si trova per mezzo dei piani ausiliari P_1 e P_2. Questi tagliano le facce di giacitura secondo le rette ($m\ n$, $m'\ n'$), ($m_1\ n_1$, $m'_1\ n'_1$) parallele fra loro e agli spigoli di fronte e di testa, onde gli abbattimenti loro riusciranno pure paralleli a quelli degli spigoli stessi; per conseguenza tirando $n\ p$, $n_1\ p_1$ parallele ad e c, e prendendo $n\ p = m'\ n'$, $n_1\ p_1 = m'_1\ n'_1$, i punti p e p_1 apparterranno all'abbattimento cercato, che sarà la curva $e\ p\ p_1\ f$. Quindi il modello del letto in quistione sarà la figura $c\ d\ f\ e$. Le stesse costruzioni han somministrato la figura $a\ b\ e_1\ f_1$ per modello del letto opposto abbattuto sul piano orizzontale P_3.

Talvolta può riescire più comodo di trovare gli abbattimenti dei letti sul piano verticale di testa P_3 o su quello di fronte P. I due quadrilateri H' ed H'' della *Fig.* 215 sono i modelli di questi letti abbattuti sul piano P_3. Pel primo è stato asse d'abbattimento la retta (γ_2 c, $\delta''_2\ \delta''_3$), pel secondo la retta ($\beta_2\ b$, $\alpha''_2\ \alpha''_3$).

Il taglio dei cunei riesce d'una estrema facilità Scelto il parallelepipedo capace del cuneo (C, C') (*Fig.* 206), si spianerà la faccia d'estradosso e col modello C_3 (*Fig.* 214) disegneremo su di essa la figura di questa faccia. A squadra con questa eseguiremo i due piani di fronte e di testa, e vi applicheremo i relativi modelli somministrati dalla *Fig.* 206 in $\alpha'_2\ \alpha''\ \alpha''_1\ \delta''\ \delta'_2$, $\alpha''_2\ \alpha''_3\ \gamma''\ \delta''_4\ \delta''_2$. Taglieremo di poi la faccetta verticale e rettangolare rappresentata da $\gamma''\ \delta''_3$, ed in seguito i piani dei letti sui quali potremo applicare convenientemente i modelli H', H'' della *Fig.* 215, o gli altri somministrati dalla *Fig.* 216; e così giungeremo ad ottenere il solido S della *Fig.* 217, del quale non rimarrà ad eseguirsi che l'intradosso $a\ b\ c\ d$. Le generatrici che han servito allo sviluppo dell'intradosso della volta, ed altre anche se occorrono somministreranno dei punti di rapporto tanto sugli spigoli di fronte e di testa $b\ c$, $a\ d$, quanto sugli spigoli d'intradosso $a\ b$, $c\ d$. Questi punti segnati sulle linee corrispondenti del solido S serviranno a dirigere la riga $r\ s$ per modo da ottenere con sufficiente esattezza il taglio dell'intradosso del cuneo.

594. *Osservazione VI.* — Nei due punti a_1 e b (*Fig.* 206) l'intradosso della volta taglia sotto angoli molto acuti le fronti dei cunei. Questi angoli vanno aumentando avvicinandosi alla

sommità della volta, ma i canti loro si trovano sempre in pericolo di esser guastati sì nella posa, come dopo la costruzione per cause accidentali. Alcuni costruttori han cercato di eliminare questo inconveniente smussando i canti di tali angoli a corno di vacca (N.° 574), di cui le direttrici curve sieno l'arco di fronte $a'\ c'\ b'$, e la ellisse concentrica che si ottiene dalla sezione di un piano $\varepsilon\ \tau$ ad esso parallelo. La retta $\varepsilon\ \varepsilon_1$ perpendicolare ad $a_1\ b_1$ dimostra il modo con cui in tal caso si toglie l'acutezza dell'angolo del piedritto della volta, e la $\tau\ \tau_1$ condotta per guisa che sia $b_1\ \tau_1 = a_1\ \varepsilon_1$ dimostra il taglio che si fa lungo il canto del piedritto opposto. Le due rette $\varepsilon\ \varepsilon_1$, $\tau\ \tau_1$ rappresentano le proiezioni delle due linee di nascita del corno di vacca, il cui intradosso può essere anche una superficie cilindrica o conica, ovvero un conoide come quello citato al N.° 574.

595 *Osservazione VII.* — Si è ritenuto per lungo tempo sulla fede degli Ingegneri Inglesi, che l'intradosso a direttrice circolare per le volte oblique, quello cioè che ha formato soggetto del presente Capo, fosse il solo adottabile tanto in ordine alla stabilità come alla semplicità di costruzione, e per conseguenza alla economia. Ma il Sig. Praly nella sua bella memoria intitolata: « *Etudes theoriques et pratiques de la construction des Voutes biaises.* » ha posto in evidenza l'erroneità di quella opinione, ed ha mostrato che anche l'intradosso ellittico, che è quello avente per sezione retta una Ellisse e per arco di testa una semicirconferenza, è suscettibile di tutta la stabilità tanto commendata nel primo e non riesce a questo inferiore nè per semplicità nè per eleganza.

LIBRO QUINTO.

TAGLIO DEL LEGNAME

CAPO I.

Nozioni generali.

596. Sotto la denominazione di Taglio del Legname non vogliamo comprendere la serie delle operazioni in grazia delle quali un albero qualunque dal trovarsi in piedi nella foresta viene atterrato, squadrato, e ridotto in pezzi di varie dimensioni per servire ai bisogni dell' arte di edificare. È noto che salvo rare eccezioni questi pezzi hanno la forma prismatica o parallelepipeda e vengono conservati in apposti magazzini per asciugarsi ed acquistare col tempo quella proprietà di resistenza e durevolezza della quali si mostrerebbero troppo scarsi allorchè fossero posti in opera appena l' albero è atterrato e squadrato.

Per taglio del legname vuolsi bensì intendere ogni operazione ulteriore diretta a modificare la notata forma data a questo materiale all' oggetto di riunirne più pezzi in un solo che serva all' uso cui si destina, e sia dotato della necessaria resistenza contro gli sforzi agenti sopra di esso.

597. I solai, i cavalletti o armature destinate a sostegno dei coperti delle Fabbriche, le centine o armature dei Ponti e di ogni genere di volte, i palchi di servizio eretti provvi-

soriamente durante la costruzione murale d'un edifizio, ed altri innumerevoli lavori di legname reclamati dall'Architettura sono tutte opere formate di varii pezzi tagliati e disposti in un modo particolare perchè la loro unione riesca salda e bastantemente forte a resistere lungamente o permanentemente alle cause tendenti a distruggerlo.

598. La natura elementare di questo corso ci impedisce di passare in rassegna una ad una le indicate opere di Legname. Noi limiteremo lo studio a quelle che sono fondamentali, tanto più che in vista della scarsità del materiale che di giorno in giorno aumenta, si fa oggi ogni sforzo per economizzarlo nelle costruzioni o impiegando esclusivamente il ferro invece del legno, o combinando questo con quello per modo da ridurne l'ufficio più che secondario.

599. Molte delle nozioni già date e delle regole stabilite intorno al taglio delle pietre sono applicabili anche al taglio del legname: ci dispensiamo quindi dal ripeterle. Una avvertenza però di non poco rilievo è da farsi rispetto a questo ultimo materiale, di cui la struttura e le proprietà fisiche sono assai differenti da quelle della pietra. Per poco che si rifletta alle opere in pietra da taglio da noi discorse nel precedente Libro, si vedrà facilmente come nello stabilirne lo apparecchio siasi costantemente avuto in mira la resistenza di cui la pietra gode in massimo grado alla compressione. Quindi la piccola differenza fra le tre dimensioni di ciascuna pietra impiegata. Ma nelle opere di legname questa differenza è notabilissima nella lunghezza, la quale specialmente nei pezzi principali è molto maggiore delle altre due dimensioni; onde non è la sola resistenza alla compressione posta a cimento in queste opere, sì bene anco quella alla flessione che sviluppasi per l'azione di forze agenti non tanto in direzione normale alla lunghezza dei pezzi, quanto nella direzione della lunghezza medesima.

Oltre a ciò avviene pure che alcuni dei membri componenti un'opera di legname si trovino sottoposti a forze che tendano ad allungarli o distenderli sì nella direzione delle loro fibre, sì in direzione a quelle perpendicolare. Nel primo caso è grandissima la resistenza che si sviluppa, ma nel secondo è piccola e vi ha pericolo che si trovi superata dallo sforzo

diretto a rompere il legame naturale per cui le fibre aderiscono fra loro

600. I tagli o intaccature alle quali si assoggettano i diversi pezzi di legname per ottenere un più stabile collegamento ne indeboliscono ordinariamente la forza, ed è perciò che nella determinazione di questi tagli sì per le profondità come per la forma deesi procurare di non alterare la necessaria resistenza di ciascun membro a pregiudizio della stabilità dell' opera.

601 La natura della resistenza di un pezzo dipende dalla posizione e dall' ufficio ad'esso particolare. La Statica da le basi del calcolo relativo a ciascun genere di resistenza, trova le relazioni che debbono per l'equilibrio sussistere fra le dimensioni e le forze agenti sul pezzo; da queste può il costruttore desumere nei casi particolari una qualunque delle dimensioni, conoscendo le altre due.

L' arte ha stabilite le forme fondamentali convenienti a ciascun' opera di legname, forme oramai sancite dall' esperienza Ogni opera è suscettibile di esser modificata in qualcuna delle sue parti secondarie, l' uso speciale cui è destinata permettendolo, nella forma primitiva non mai Di qui gli esempi senza numero che di ciascuna opera si hanno nei diversi trattati di costruzione, ma che però sono tutti emanazioni d' un unico tipo, di quello cioè relativo all' ufficio dell' opera considerata

602. Noi pertanto in ciò che andiamo ad esporre non ci occuperemo delle ricerche che concernono le dimensioni dei membri componenti le opere di legname, nè porremo in discussione le diverse loro forme; ma accetteremo ciò che fin qui è stato fatto e riconosciuto costantemente buono, contentandoci di dare una conoscenza elementare di tutto quello che può interessare il giovane ingegnere in questa materia, seguendo per quanto ci sarà possibile lo stesso metodo adottato nel Libro precedente.

CAPO II.

Delle Intaccature.

603. Le intaccature sono piccoli tagli prodotti nei legni, varie di forma e di dimensioni, ma aventi tutte per oggetto la connessione di due pezzi che mal si otterrebbe o troppo debole riuscirebbe impiegando mezzi diversi.

604. La varietà delle forme e delle dimensioni adottate per le intaccature dipende dalla posizione relativa dei due pezzi dopo la connessione, dalla natura della resistenza che ciascuno dee fare, infine dalle dimensioni di ciascun pezzo.

Quanto ai rapporti di queste ultime con quelle delle intaccature noi li diremo; ma avvisiamo una volta per sempre il Lettore che ad ogni occorrenza può consultare con fiducia i disegni proposti, perchè sono tutti eseguiti in una scala proporzionale.

Quanto alle forme si possono le intaccature classare in tre categorie secondo il loro ufficio, cioè: intaccature per la connessione di due pezzi a squadra, intaccature per la connessione di due pezzi facenti fra loro un angolo qualunque, intaccature per la connessione di due pezzi situati sul prolungamento l'uno dell'altro.

I pratici hanno voluto assegnare a ciascuna intaccatura un nome particolare, ma sarà facile lo scorgere come tutte sieno applicazioni più o meno dirette dell'unico tipo conosciuto col nome di connessione o incastro a *dente e mortisa*.

Connessioni di due pezzi a squadra.

605. Ogni qualvolta le linee principali d'un opera formano degli angoli retti vi ha connessione di pezzi a squadra. La posa di queste connessioni può essere tanto orizzontale che verticale, e sì nell'uno come nell'altro uso possono darsi tre casi, cioè: che la estremità d'uno dei pezzi si connetta col-

l'altro in un punto qualunque della sua lunghezza, che i due pezzi s'incrocino senza che alcuno di essi termini all'altro, infine che la connessione abbia luogo in una delle estremità di ciascun pezzo. In tutti questi casi può esser necessario che certe facce si trovino in un medesimo piano, come può darsi che questa condizione non sia reclamata.

Certo è che tali circostanze e il diverso ufficio di resistenza dei pezzi connessi sono la causa di quelle variazioni di forma di cui vedremo essere suscettibili le connessioni in quistione.

606. *Intaccatura a dente e mortisa.* Questa connessione, che è ad un tempo il tipo del quale abbiamo sopra parlato, è rappresentata dalla *Fig.* 218.

I due pezzi (A, A'), (B, B') hanno la medesima grossezza, e debbono essere fra loro uniti per modo che le facce $(A, a' b')$, $(B, b' b'')$; $(A, a'_1 b'_1)$, $(B, b'_1 b''_1)$ si trovino in un medesimo piano.

S'introduce a tale oggetto la estremità (d, d') del pezzo (A, A') nella grossezza dell'altro per tutta la metà della sua larghezza, dopo averla modificata col taglio nel modo indicato dalla figura (d, d'). Il rilievo d_1 di questa figura che si vede nel pezzo A_1 chiamasi il *dente* dell'incastro: la grossezza sua è il terzo della grossezza de' due pezzi. Nel pezzo (B, B') e perpendicolarmente alla faccia proiettata in $b' b'_1$ deve farsi un incavo delle precise dimensioni del dente: tale incavo che porta il nome di *mortisa* è reso visibile in m nel pezzo B_1.

607. *Osservazione I.* — Pria di andar più lungi vogliamo qui render conto del metodo costantemente impiegato nel disegno prospettico dei pezzi costituenti le connessioni, il quale ha il doppio vantaggio di esprimere in un modo semplice e chiaro la forma delle intaccature, e di somministrare agli operai tutte le dimensioni occorrenti per la esecuzione del taglio.

E questo il fondamento di quel genere di rappresentazione grafica che i Francesi chiamano *Perspective cavalière*, e consiste: 1° nel prendere il piano del quadro (N.° 127) parallelo ad una delle facce del pezzo, come sarebbe $x\ y$ (*Fig.* 248) od anche obliquo, come vedremo in seguito; 2° disegnare su questo piano abbattuto quella delle proiezioni del pezzo che

crediamo più conveniente; 3° dirigere poi obliquamente ai lati di questa proiezione ma parallelamente fra loro le costole del solido che sono ad essi perpendicolari; 4° prendere su queste oblique delle lunghezze aventi con quelle costole un rapporto determinato.

Così pel solido A_1 abbiamo riportata la proiezione verticale a' b'_1 d' in a_1 b_1 d_1, ed obliquando nella direzione a_1 a_2 abbiamo tirato parallelamente a questa le costole visibili del pezzo, facendo la loro lunghezza eguale alla metà della larghezza somministrata dalla proiezione orizzontale. Pel solido B_1 abbiamo scelta la proiezione orizzontale del pezzo B, e data alle linee oblique tal direzione da render visibile la faccia in cui è tagliata la mortisa. Lo stesso rapporto è stato mantenuto fra le lunghezze delle oblique e l'altezza di questa faccia somministrata dalla retta b'_1 b'.

Si chiamano linee *fuggenti* le oblique al piano del quadro parallele fra loro; la loro direzione è arbitraria, ma deve scegliersi sempre per modo da render visibili quelle parti del solido la cui forma importa di far ben comprendere.

608. *Osservazione II.* — È inutile il dire come debba disegnarsi sul pezzo e tagliarsi questa intaccatura così semplice; diremo piuttosto delle modificazioni che subisce secondo la posa del pezzo A e il relativo ufficio di resistenza.

Se il pezzo A è orizzontale, gli sforzi agenti su di esso sono ordinariamente diretti normalmente alle sue fibre; allora il dente (d, d') può aver la forma disegnata in d_1 se la resultante di questi sforzi non è molto grande di fronte alle dimensioni del pezzo; in caso contrario conviene rinforzare il dente, tagliandolo obliquamente nella parte inferiore dopo aver lasciato una piccola faccetta parallela alle superiori nella sua estremità.

Se il pezzo A posa verticalmente, la resultante degli sforzi si trova ordinariamente diretta secondo le sue fibre; in questo caso potrebbe il dente lasciarsi come è disegnato in d_1; ma per evitare la facilità con cui per qualche causa accidentale potrebbe farsi deviare il pezzo dalla sua posizione, si fa minore la larghezza del dente, onde nessuna delle sue facce venga a trovarsi sul prolungamento di quelle del pezzo medesimo.

609. *Intaccatura* o *mezza grossezza*, o *a metà legno*. È questa rappresentata dalla *Fig* 219. La proiezione orizzontale della connessione o data dal sistema dei due pezzi A A_1 e B. Hanno entrambi la stessa grossezza, ed in opera le facce superiori di essi debbono trovarsi in un medesimo piano. La proiezione verticale A' A' del primo pezzo ha servito per il disegno prospettico di esso; il piccolo rettangolo proiezione verticale del dente da tagliarsi nel pezzo B ha servito pel disegno analogo B' di quest'ultimo. Le linee fuggenti dell'intaccatura sono la metà di quelle che rappresentano.

610. *Osservazione*. — I membri di questa connessione non possono fare ufficio di resistenza salvo il caso in cui la posa di ambedue sia orizzontale. Potrà uno di essi B esser verticale nelle opere in cui funzioni semplicemente da membro completivo N.° 623). Dee notarsi ancora che questa medesima intaccatura può impiegarsi per l'incrociamento a squadra di due pezzi di lunghezza qualunque; in tal caso non si avrebbe più dente, e il pezzo B dovrebbe contenere una intaccatura identica a quella disegnata nel pezzo (A A_1, A' A') nel luogo corrispondente alla connessione.

611. *Intaccatura a coda di rondine*. (*Fig.* 220). Si eseguisce questa a metà legno come la precedente, dalla quale solo differisce per la forma del dente rappresentato in a b c d. La testa a b dicesi *estremità* della coda, c d chiamasi *collo*. La prima deve essere eguale alla larghezza del pezzo in cui è tagliata, la seconda suole esserne i due terzi.

612. *Osservazione*. — In questa connessione la posa dei pezzi è orizzontale: la coda di rondine serve a renderla più stabile quando sul pezzo B agissero forze tendenti ad allontanarlo dal pezzo A.

Non sempre si dà alla coda una lunghezza eguale alla larghezza del pezzo nel quale s'incastra; la si fa talvolta minore, ed allora si suole dividere la larghezza del pezzo in sei parti eguali, assegnando cinque di queste parti alla lunghezza della coda, quattro alla sua estremità, e due al collo. Può praticarsi questa regola quando la larghezza del pezzo B è eguale o minore di quella del pezzo A; e se in questo secondo caso riescisse il collo troppo debole, lo si munisce di un rinforzo a guisa di collare, che diminuisce la

lunghezza della coda aumentando la sezione di contatto dei due pezzi

613 *Intaccatura a mezza coda di rondine nascosta* Allorchè non è necessario che le facce superiori e inferiori dei due pezzi si trovino in un medesimo piano, ma preme solo che l'estremità di uno sia stabilmente connessa a squadra coll'altro, si impiega questa intaccatura rappresentata nella *Fig* 221. Il pezzo destinato a ricevere l'estremità dell'altro è rappresentato da (A, A'), l'altro da (B, B'). Queste due proiezioni indicano con sufficiente chiarezza la connessione.

Per eseguire il dente a coda di rondine nel pezzo (B, B') si disegna sulla sua testa il modello B', e sulla faccia che in opera rimane al disotto tracciasi il modello B; così troviamo sul pezzo B_1 le figure n c d, c e f g Per i vertici e, g si tirano sulle facce perpendicolari alla c e f g le perpendicolari e i, g i alle respettive costole e e_1, g f prendendole di una lunghezza eguale ad e' i', e dai punti i ed i_1 le parallele a queste costole. Queste linee bastano a dirigere il taglio richiesto.

La mortisa, rappresentata nel solido A_1, può tracciarsi ed eseguirsi con la stessa facilità.

614. *Intaccatura angolare a dente e mortisa.* Lungo la costola (n b, a') di un pezzo parallelepipedo A (*Fig.* 222) è praticato un incavo rettangolare (e f g h, e' f' g' h') nella direzione della diagonale n' c'_1 destinato a ricevere la estremità d'un altro pezzo B della medesima sezione. Disegnata sulla faccia m n p q e in direzione della diagonale m p la figura i r s t del dente, pei vertici di essa rappresentata per maggior chiarezza in prospettiva da i_1 r_1 s_1 t_1 nel pezzo B', si tireranno sulle facce adiacenti delle parallele alle costole t_1 u, s_1 v . . . . in lunghezza eguali ad e f; ed allora congiunti i vertici m_1, p_1 . . . . con u, v . . . . si troveranno tracciate su queste facce le rette secondo cui debbono essere tagliate le facce del dente richiesto La prospettiva A' rappresenta la mortisa corrispondente.

Questa intaccatura è ordinariamente usata nelle barriere per incastrare la estremità dei pezzi verticali con le traverse orizzontali.

615. *Intaccatura marginale a doppia coda di rondine*

Questa connessione comunissima è rappresentata dalla *Fig.* 223. Il pezzo (A, A') è tagliato nella sua estremità secondo due denti d', d'' a coda di rondine prospetticamente disegnati nel pezzo A_1; la estremità dell'altro pezzo (B, B') porta gli incavi corrispondenti, siccome dimostra il pezzo B_1.

Le linee fuggenti nelle due figure A_1 e B_1 sono i due terzi delle vere dimensioni che rappresentano il tracciamento delle linee occorrenti pel taglio dell' intaccatura e di una estrema facilità.

616. *Intaccatura marginale a doppia coda di rondine nascosta.* È questa più pregevole della precedente sì per la bellezza della connessione che non lascia traccia apparente della sua forma, sì per la stabilità maggiore di cui è capace. Il disegno in proiezione, e in prospettiva è indicato dalla *Fig.* 224. Il taglio ne è più difficile, ma il tracciato delle linee occorrenti per ben dirigerlo non offre difficoltà, e basta un po' d'attenzione per concepirlo.

Connessione di due pezzi facenti fra loro un angolo qualunque.

617. In poche occasioni si trovano queste connessioni in un piano orizzontale come quelle che precedono per l'oggetto indicato al N.° 605. Ordinariamente il loro piano di posa è verticale, essendo uno dei pezzi orizzontale e qualche volta anche verticale. Il pezzo obliquo allora esercita contro l'altro uno sforzo nella direzione della propria lunghezza, il quale si risolve pel secondo in due forze una delle quali tende a distenderlo secondo la lunghezza delle fibre, e l'altra a fletterlo in direzione normale. La connessione deve quindi provvedere a che il pezzo obliquo non scorra sull'altro pezzo, e l'intaccatura eseguita su quest'ultimo non ne deve indebolire la resistenza di tanto da porre in pericolo la stabilità del sistema. Quando la intaccatura ha luogo presso l'estremità del pezzo vi è a temere che la forza agente nella direzione delle fibre non vinca quella per cui le fibre stesse aderiscono fra loro, onde conviene tenerla tanto distante da quella estremità che un tale inconveniente si trovi remosso.

618. *Intaccatura a mezza grossezza e con dente nascosto*

È questa rappresentata dalla *Fig.* 225 in proiezione orizzontale, e quindi secondo la posizione dei due pezzi dal sistema *A* e *B*, in proiezione verticale da *A'* e *B'*. Le vedute prospettiche A_1 e B_1 danno chiara ragione della forma e delle dimensioni della intaccatura e del dente.

619. *Osservazione.* — Questa connessione può farsi senza dente, siccome quella indicata al N.° 610, può eseguirsi anche a coda di rondine allorchè i due pezzi non si incrociano, *ma* è la sola estremità del pezzo *B* che deve unirsi al pezzo *A*.

620. *Intaccatura marginale a semplice dente cuneiforme.* (*Fig.* 226). Il piano di posa di questa e della due connessioni seguenti è verticale. Dei due pezzi quello rappresentato in (*A*, *A'*) è orizzontale. Dalla *Fig.* 226 (*a*), che mostra la prospettiva del sistema, desumesi facilmente la forma non che il modo di tracciare le linee di questa intaccatura semplicissima.

621. *Osservazione.* — Non sempre si taglia a squadra colla faccia superiore del pezzo (*A*, *A'*) la faccetta *a' b'* della intaccatura (*Fig.* 226), talvolta, a ciò a seconda della inclinazione che deve avere il pezzo obliquo (*B*, *B'*) si taglia essa a squadra colla faccia superiore di quest' ultimo pezzo.

622. *Intaccatura marginale a semplice dente cuneiforme nascosto.* (*Fig.* 227). Le proiezioni *A B*, *A' B'* della connessione mostrano la posizione ordinaria del pezzo (*A*, *A'*) che è la verticale. Il dente nascosto elimina il pericolo che il pezzo (*B*, *B'*) venga per accidentalità remosso dal piano verticale di posa, e si oppone più validamente alle forze agenti in quel piano che potrebbero far ruotare lo stesso pezzo intorno alla estremità superiore dell' intaccatura.

Le *Fig.* 227 (*a*) e 227 (*b*) fan comprendere facilmente coi disegni A_1 e B_1 il taglio necessario per la connessione.

623. *Intaccatura marginale con dente cuneiforme e doppio dente in squadro nascosti.* (*Fig.* 228). L' oggetto di questa intaccatura è quello stesso della precedente; se non che il doppio dente in squadro rappresentato sulla proiezione verticale da *a' c' d' e' f'*, e reso visibile in B_1, serve di rinforzo al dente cuneiforme. La mortisa della connessione si vede in A_1.

Connessioni di due pezzi situati sul prolungamento l'uno dell'altro.

624. Nell'ordinario assortimento del legname avviene non di rado che alcuni pezzi si trovino forniti di sufficienti dimensioni in larghezza e grossezza per l'ufficio di resistenza cui sono destinati in una data opera, ma non abbiano la lunghezza richiesta dalla posizione ad essi assegnata nell'opera medesima. Per un principio savissimo d'economia ci si astiene allora dal ricercare questa lunghezza nei grandi tronchi degli antichi alberi, il cui legname può essere molto più utilmente impiegato, e si provvede all'enunciato difetto attestando fra loro due pezzi della medesima squadratura con apposite intaccature, le quali oltre a sodisfare all'oggetto principale suindicato debbono secondo la posa del pezzo opporsi ancora alle cause che tendono a indebolire o distruggere la connessione.

625. *Intaccatura a doppia coda di rondine.* (*Fig* 229) Può adoprarsi nel solo caso in cui la posa della connessione è orizzontale, o anche inclinata se il pezzo resultante non è di grandi dimensioni. Si dice a doppia coda di rondine perchè ciascuno dei pezzi (A, A'), (B, B') porta un dente ed una mortisa di quella forma, e di altezza eguale alla metà della grossezza dei pezzi siccome ad evidenza lo mostrano i solidi rappresentati in A_1 e B_1. I due pezzi debbono avere la stessa sezione; le dimensioni del dente e della mortisa sono indentiche e stabilite colle regole esposte al N.° 612. L'uno poi è separato dall'altra per una faccia di contatto $a\ i\ c\ o$ che è un quadrato, onde nella estremità di ciascun pezzo la intaccatura si estende per sedici sesti della larghezza: ciò basta per comprendere il disegno delle due proiezioni $A\ B$, $A'\ B'$.

Per eseguire il taglio nel pezzo (B, B') si riporterà sopra le sue facce superiore ed inferiore a partire dalla estremità e e, il modello $d\ d_1$, e tirata nelle altre due facce contigue la retta $e'\ h'$ che ne divida l'altezza in due parti eguali, si taglierà il parallelepipedo $e'\ i''\ i'$. Allora potremo scavare sulla faccia superiore la mortisa che vedesi in B_1, e quindi tagliare il dente nella estremità servendosi del disegno il precedentemente riportato sulla faccia inferiore.

In un modo analogo si taglierà il pezzo (A, A').

626. *Intaccatura a zigzag dritto con maschio sciolto* Questa intaccatura rappresentata nella *Fig.* 230, suole impiegarsi nei casi in cui la grossezza dei pezzi in opera è eguale alla larghezza o maggiore Il pezzo (A, A') è tagliato nella sua estremità secondo una mortisa della forma a' c' d' e', alla quale succede un dente della stessa forma d' e' f' o'; il pezzo (B, B') è tagliato nel modo istesso ma i due denti essendo più corti delle corrispondenti mortise, resulta un vuoto di forma parallelepipeda m' n' d' e' nel quale si introduce a forza un maschio che serve a stringere i due pezzi.

Tutta la lunghezza della intaccatura suole avere in proiezione una lunghezza tripla della grossezza dei pezzi; i lati c' d', f' n' delle due mortise resultano paralleli, e i loro prolungamenti passano per le linee respettivamente proiettate in o' ed a'.

Il pezzo A, è la prospettiva di (A, A'), e da esso può facilmente dedursi il modo di dirigere convenientemente le linee del taglio.

627. *Intaccatura a zigzag cuneiforme con maschio sciolto, e dente nascosto.* La proiezione verticale A' B' di questa connessione (*Fig.* 231) è simile a quella della precedente, ad eccezione dei denti nascosti che si vedono punteggiati in n' e b'. Per questi soli ne differisce come per le estremità m' ed n' che sono tagliate a freccia come resulta dalla proiezione orizzontale A B, piuttosto che a squadra colle faccie contigue ad A B.

Il solido A, prospettiva del pezzo (A, A') rende chiara ragione della forma e delle operazioni occorrenti pel taglio di questa intaccatura.

628. *Osservazione.* — Le intaccature a zigzag si impiegano tanto nelle pose orizzontali che in quelle inclinate siccome in qualche caso la intaccatura a doppia coda di rondine Ma questa è suscettibile di piccola resistenza nella direzione normale alla lunghezza al confronto di quella di cui sono capaci le altre; onde e che ogni qualvolta la connessione appartenga ad uno dei membri di forza dell'opera converrà adoperare i zigzag, e solo per i membri completivi potrà essere utile l'uso della doppia coda di rondine

Digitized by Google

629. *Intaccatura capriolata.* Il quadrato *a b c d* (*Fig.* 232) è proiezione orizzontale e sezione ad un tempo de' due pezzi da connettersi, i quali sono verticalmente proiettati in A' e B'. La figura e m *n r o* i, di cui i lati *m n*, *r o* ed m *e*, *i o* sono respettivamente perpendicolari alle facce *a b*, *a d* rappresenta la intaccatura che in sostanza componesi d'un dente tagliato nella estremità del pezzo B', e di una corrispondente mortisa nella estremità del pezzo A. La ispezione delle figure B_1 ed A_1 basta a render conto della forma dell'uno e dell'altra. La lunghezza del dente si fa sempre eguale o maggiore del più gran lato della sezione del pezzo.

630 *Intaccatura cruciforme.* Immaginando prolungata la parte m *n r* o del dente capriolato (*Fig* 232) fino alla faccia opposta e *d*, e l'altra m e i o fino alla faccia c *b* si avrà l'idea del dente cruciforme che fa parte della intaccatura in quistione rappresentata dalla *Fig.* 233. Il quadrato *a b c d* è la sezione di ciascuno dei due pezzi disegnati in proiezione verticale in A' e B', dei quali il primo contiene la mortisa ed il secondo il dente. Anche in questo caso la lunghezza del dente si fa maggiore o almeno eguale al più gran lato della sezione del pezzo Le figure A_1 e B_1 sono la prospettive delle due parti della intaccatura.

631. *Osservazione I.* — La posa delle due precedenti connessioni è costantemente verticale. In altra posizione potrebbe il pezzo esser soggetto a qualche forza che non tende a comprimerlo nella direzione della sua lunghezza, ed allora la connessione non avrebbe la resistenza necessaria per rimanere inalterata. Si vede inoltre che la intaccatura cruciforme è egualmente resistente per ogni parte, mentre la capriolata è più debole nell'angolo i *a r* che nell'angolo opposto.

632. *Osservazione II.* — Il metodo usato per eseguire il disegno prospettico dei due pezzi A_1 e B_1 nelle figure 232 e 233 è quello stesso del N° 607, costantemente impiegato pei disegni analoghi di tutte le intaccatnre precedenti, quantunque sembri a prima vista diverso.

Il piano del quadro è anche qui il coordinato verticale *X Y* (*Fig* 232), ma le facce dei pezzi resultando oblique rispetto ad esso, abbiam dovuto prendere sulle linee fuggenti della

parti aliquote delle distanze d u, e v . . . . dal piano medesimo. Così dopo aver disegnato la figura d_1 b_1 n_1 e_1 eguale alla proiezione verticale d' b' n' e' si è fatto

$$d_1 u_1 = \frac{d u}{2}, \; e_1 n_1 = n_1 n_2 = \frac{e v}{2} \; . \; . \; . \; .$$

Al modo istesso abbiam potuto eseguire il disegno del pezzo A_1 a quelli della intaccatura rappresentata dalla figura 233.

CAPO III.

Principii generali per la composizione delle Opere di Legname.

633. A seconda dei diversi uffici cui sono destinati, i membri componenti una qualunque costruzione di legname distinguonsi in tre classi.

Diconsi *membri di resistenza* quelli che sopportano qualche carico o qualche spinta per cui sviluppasi in essi uno dei notati generi di resistenza alla distensione, o alla compressione o alla flessione (N.° 599); membri *principali* o *ausiliari* secondo che lo sforzo cui sono sottoposti agisce direttamente o indirettamente sopra di essi.

Chiamansi *membri di concatenazione* quelli che hanno il solo ufficio di tener collegati e fermi nelle stabilite posizioni i membri di resistenza.

Per ultimo si dà il nome di *membri completivi* a tutti i pezzi concorrenti esclusivamente a dare al sistema la configurazione e la struttura convenienti al fine cui esso è destinato.

634. La stabilità del sistema è assicurata quando ai diversi membri di resistenza si assegnino le corrispondenti dimensioni che si deducono per le teorie meccaniche e per la esperienza, e quando la collocazione di essi e quella dei membri di concatenazione sia tale da impedire qualunque

Digitized by Google

movimento che possa col tempo cangiarne sensibilmente la forma.

635. Il collocamento migliore per un membro di resistenza è quello in grazia del quale la resultante di tutte le forze agisce nella direzione della sua lunghezza e per modo da distenderne le fibre. Ma vi hanno poche combinazioni che facciano luogo ad un tal resultato, e quasi sempre avviene che l'azione della resultante diretta secondo la lunghezza del pezzo si trovi rivolta a comprimerne le fibre. Però in questi due casi essendo la resistenza proporzionale all'area della sezione, riesce indifferente collocare il pezzo nell'uno o nell'altro modo, e soltanto bisogna prendere tutte le precauzioni perchè non si fletta; lo che c'da temersi tutte le volte che la sua lunghezza eccede certi limiti determinati dall'esperienza. È allora che occorre l'impiego dei membri ausiliari di resistenza che in tal caso prendono il nome di *gambe* di *forza*, *razze*, *saettoni* ec.

Tutte le volte però che l'azione della resultante si trova per intero o in parte diretta normalmente alla lunghezza dei pezzi non è indifferente il loro collocamento salvo il caso in cui la sezione trasversale di essi è circolare. Poichè la resistenza alla flessione in allora sviluppata è proporzionale al quadrato di quella dimensione del pezzo che è parallela alla direzione della forza; onde se la sezione trasversale è un rettangolo dovrà collocarsi il pezzo per modo che resulti perpendicolare alla forza il lato più piccolo di essa, e se la sezione medesima è un quadrato converrà che si trovino gli strati legnosi del pezzo, per quanto è possibile, paralleli alla direzione della forza.

Non è a supporsi che si adoprino come membri di resistenza dei pezzi cariati e difettosi per nodi, e tarli; ma se qualche circostanza imponesse lo impiego di alcuno di essi che avesse uno di questi difetti, bisognerebbe collocarlo in maniera tale che la faccia a cui è più aderente il difetto sia rivolta verso la forza agente sul pezzo, avendo cura per altro di scarnire prima il legno per quanto quello si interna, e di riempire lo incavo fatto con un tassello di altro legno forte e sano tagliato ed incastrato a sigillo.

Per il collocamento dei membri di concatenzione e com-

pletivi non si possono dare regole speciali; esso dipende in ciascun caso dalla forma, dalla struttura, e dalle condizioni dell'opera relativamente al fine cui è destinata.

636 Importa finalmente notare che se la stabilità dell'opera è bastantemente assicurata in grazia delle dimensioni e del savio collocamento dei suoi membri, non ha però poca parte alla sua conservazione anche la saldezza delle connessioni. Poichè se le intaccature da noi discorse nel Capo precedente non sono scelte per modo da adattarsi all'ufficio dei pezzi connessi, se il taglio di esse non è fatto con tutta la possibile esattezza, resultano inevitabili certi movimenti che da prima piccoli e quasi insensibili possono poi indurre col tempo tali alterazioni di posizione nelle diverse parti del sistema da rompere le condizioni dell'equilibrio, e cimentarne la stabilità. Di fronte alla possibilità di tali sconcerti l'Ingegnere non deve contentarsi di curare scrupolosamente l'esecuzione delle intaccature dopo averne stabilita la loro più idonea forma, ma conviene che adotti lo impiego di lastre di piombo poste a contrasto fra le facce più ampie di quelle per assicurarne maggiormente il contatto, e non faccia economia di caviglie o chiavarde di ferro attraversanti i pezzi congiunti nella loro intaccatura, e di allacciature e fasciature pure di ferro invece di caviglie secondo che l'arte insegna coi più riputati modelli di opere esistenti.

637. Ad impedire poi con la maggiore efficacia i movimenti cui può andar soggetta un'opera qualunque di legname per cause accidentali, e talvolta anche per deficienza di dimensioni in alcuno dei suoi membri si impiegano utilmente i pezzi di concatenazione, e quelli ausiliari di forza. La figura 234 mostra come si possa senza indebolire il pezzo principale *A* serrarlo fra due altri *a*, *a* ovvero *b*, *b* i quali possono servire a mantenerlo nella posizione ad esso assegnata come anche ad impedire che si fletta se rispetto alle forze agenti contro di esso avesse debole squadratura e soverchia lunghezza.

I membri di concatenazione a_1 *a*; b_1 *b* adoperati a coppia come nella citata figura prendono il nome di *ascialoni*; e si connettono con intaccatura semplice secondo la indicazione data al N.° 640 fatta tanto negli ascialoni *a*, *a* che nel pezzo *A*, ovvero nei soli ascialoni b_1, *b*.

Digitized by Google

Qualche volta ci si contenta di stringere semplicemente mediante una caviglia di ferro il pezzo contro gli ascialoni senza uso d'intaccatura alcuna, come si veda pel pezzo *B* nella *Fig.* 234 e pel pezzo *A* nella *Fig* 235.

638. I membri ausiliari di forza, oltre ad accrescere la resistenza dei pezzi principali, concorrono a mantenere l'equilibrio fra le diverse parti del sistema mediante la decomposizione delle figure quadrangolari in triangoli. È questo un principio che applicato con discernimento può giovare all'economia del materiale ad un tempo e alla stabilità.

Supponiamo che le quattro travi *A B*, *B C*, *C D*, *D A* costituenti il rettangolo *A B C D* (*Fig* 236) abbiano tali dimensioni da non poter flettersi non che spezzarsi sotto l'azione delle forze agenti permanentemente sulle sue parti. L'equilibrio non potrà essere disturbato finchè sussisteranno i rapporti di queste forze in intensità e direzione: ma la più leggera causa che li alteri può bastare a far variare gli angoli della figura, e quindi a deformarla. Da questo istante, le azioni delle forze agenti sul sistema conducono a resultati diversi da quelli previsti, la stabilità dell'opera si trova in grave pericolo, l'equilibrio fra le forze esterne e le resistenze stà per rompersi, la rovina dell'opera non tarda ad avvenire.

Tutti questi sconcerti avvengono non per difetto di forza nei pezzi costituenti il sistema, ma per virtù di movimenti contro i quali non valgono le dimensioni dei pezzi medesimi. Colleghiamo gli angoli *A* e *C* con un pezzo in diagonale *A C*, e la decomposizione del quadrilatero in due triangoli assicurerà immediatamente la stabilità, perchè vien resa impossibile qualunque variazione negli angoli. Con questo mezzo è dato raggiungere la necessaria resistenza impiegando anche per alcuni membri dei pezzi aventi dimensioni minori assai di quelle reclamate dalla relazione di equilibrio in grazia di pezzi ausiliari *a*, *b* posti fra il membro principale *D C* e la diagonale *A C*.

La inalterabilità degli angoli *A*, *B*, *C*, *D* può ottenersi ancora per mezzo di piccole gambe di forza incastrate fra i due lati di ciascun angolo. Queste mentre raggiungono lo scopo della diagonale *A C* fanno al tempo stesso l'ufficio dei pezzi *a* e *b*, e favoriscono indubitatamente l'economia del materiale.

639. Non v'è opera di legname in cui non si trovi più o meno esplicato il principio precedente. In alcune è il triangolo la forma principale, in altre la stabilità della forma è per quello assicurata.

640. Chiuderemo il capitolo con alcuni esempi di composizione di travi destinate a sostenere un carico uniformemente distribuito sopra di esse, mentre non hanno che un punto d'appoggio a ciascuna delle loro estremità.

La resistenza alla flessione è la sola sviluppata in questo caso; noi supponiamo che i pezzi di cui possiam disporre per le composizioni in quistione abbiano la necessaria lunghezza, ma difettino in una delle altre due dimensioni onde abbiasi ragion di temere che destinati di per se soli all'ufficio di travi possano flettersi sotto il carico e quindi rompersi.

641. *Trave formata di due pezzi sovrapposti.* L'oggetto di questa composizione è quello di raggiungere la necessaria lunghezza nel lato della sezione parallelo alla direzione del carico. Abbiamo già detto (N.° 635), che la resistenza alla flessione cresce col quadrato di questo lato, quindi ogni qualvolta vi sarà bisogno di aumentarlo dovremo aver riguardo a questa proprietà perchè nell'impiego dei pezzi scelti non rimanga sacrificata la economia del legname.

La *Fig.* 237 mostra in *A A A* la proiezione orizzontale della trave composta, in *A' A' A'*, *B' B' B'* la proiezione verticale dei due pezzi che la compongono. La unione loro è fatta per una serie di intaccature a denti analoghi a quello rappresentati nella connessione già chiamata intaccatura a zigzag dritto con maschio sciolto (N.° 626). Le inclinazioni di questi denti sono parallele in ciascheduna metà dei due pezzi e rivolte in senso contrario. La lunghezza dei denti estremi nel pezzo inferiore *A' A' A'* è minore dei corrispondenti nel pezzo *B' B' B'*, quella dei denti al centro nel primo è invece maggiore; pei denti intermedi è la stessa nell'uno e nell'altro pezzo; onde posti i solidi per modo che le loro estremità combacino rimane fra le faccette verticali dei denti un vacuo di forma parallelepipeda entro il quale si caccia a forza un maschio *c'* come nella succitata connessione, all'oggetto di stringere maggiormente i due pezzi fra loro, e vantaggiarne la congiunzione.

I disegni di questi pezzi che si vedono in A_1 A_1 $A_{1,}$ e in B_1 B_1 B_1 mostrano le due facce tagliate secondo la disposizione indicata, e danno anche facile ragione del metodo da seguirsi pel tracciamento delle linee del taglio.

642. *Osservazione.* — Per aumentare la resistenza della trave si usa porre un certo pezzo C' cui si dà il nome di *cuscino* a contatto colla faccia inferiore del pezzo A' A' A', e saldamente a questo congiunto per mezzo di due chiavarde di ferro munite di viti ad una estremità. Può rendersi poi anche più stabile la connessione dei due pezzi A' e B' mediante altre chiavarde di ferro verticali analoghe alle precedenti.

643. *Trave formata di tre pezzi adiacenti.* Questa composizione è applicabile tutte le volte che trovisi in difetto il solo lato della sezione perpendicolare alla direzione dello sforzo che si esercita sul sistema. In questo caso sono necessari tre pezzi *a* a, *b b*, *c c* (*Fig.* 238) per ottenere una connessione stabile. La larghezza del pezzo medio *b b* deve essere almeno eguale alla metà di quello della trave da comporsi, la larghezza dei due laterali può esserne il terzo. La connessione si fa per mezzo di incastri a denti obliqui con risalti convergenti dall'alto al basso siccome è reso palese dalla proiezione verticale A' A' del sistema. Dei maschi sciolti possono essere cacciati a forza entro i vacui (e *f*, *e' f'*) lasciati dai risalti all'oggetto di conseguire una maggior perfezione nel contatto.

Il disegno T_1 è la veduta prospettica della trave e del taglio operato in ciascuno dei pezzi a_1 $a_{1,}$ b_1 $b_{1,}$ c_1 $c_{1,}$ la esecuzione del quale non offre difficoltà.

644. *Trave formata di due pezzi laterali con puntoni nascosti.*

Il difetto dei due lati della sezione dei solidi impiegati nella composizione della trave può consigliare questo genere di armature.

I due pezzi *a a* a, *b b b* (*Fig.* 239) abbracciano due puntoni intermedi inclinati (*a d*, *c' d'*) i quali per una delle loro estremità (*d*, *d'*) sono a contatto con un pezzo (*e e*, *e' e' f' f'*) detto *chiave*, e con l'altra (*c*, *c'*) premono contro i traversi (*t*, *t'*) incastrati nei pezzi laterali. I puntoni sono poi chiodati coi laterali per mezzo delle caviglie di ferro *h'*, *h'* . . . . , e

le zeppe (z, z') cacciate in testa alla chiave serve a stringere il sistema. La inclinazione opposta data ai puntoni e gli stabili puntoni d'appoggio (t, t') impediscono quella flessione che pel difetto di grossezza nella trave avverrebbe indubitatamente sotto il carico. Si vede qui applicato in un modo semplicissimo il principio espresso al N.° 638, e ne resultano palesi i vantaggi tanto rispetto all'aumento di resistenza, quanto all'economia del materiale.

I vacui di forma prismatica triangolare che rimangono fra i pezzi laterali e i puntoni possono nascondersi, quando si voglia, con semplici assi che formino colle facce orizzontali dei pezzi laterali un medesimo piano. Il disegno prospettico A, B, dà ragione dei diversi pezzi costituenti il sistema.

645. *Osservazione.* — Molti altri mezzi di armare le travi sono stati impiegati e possono utilmente impiegarsi secondo le esigenze delle costruzioni. A noi sembrano questi i più semplici e i migliori anche perchè conservano alle travi la rigorosa forma parallelepipeda; chi desiderasse altri esempi consulti le grandi opere di architettura e particolarmente quelle che in modo speciale si occupano di costruzioni di legname.

CAPO IV.

Armature dei Solai e dei Tetti.

646. Chiamasi *Solaio* quella parte di costruzione nelle fabbriche che serve a dividere i diversi loro piani gli uni dagli altri. La posizione del Solaio è sempre orizzontale.

Dicesi *Tetto* la parte di una fabbrica che la ricuopre e ne difende dalle piogge e dalle altre intemperie i muri e gli ambienti. I tetti trovansi costituiti da uno, due e più piani sempre inclinati all'orizzonte.

Tanto i solai quanto i tetti sono formati di due specie

di materiali, di legname cioè e di laterizi. Il primo è impiegato a sostegno dei secondi, e quindi la struttura della parte che di esso componesi, deve esser tale per modo da presentare valida resistenza al carico non solo dei materiali sovrapposti, ma anche ad altri carichi addizionali permanenti o provvisoriamente impiegati a qualche uso speciale.

Col nome di *armatura* vogliamo quindi significare questa orditura o composizione di legname.

647. L'armatura di un solaio si compone di tanti travicelli di eguali dimensioni collocati ad eguale distanza fra loro e parallelamente a due delle pareti opposte dell'ambiente che è ordinariamente rettangolare, e sostenuti per le estremità dagli altri due muri o da due travi aderenti ai muri stessi.

Le dimensioni dei travicelli e la equidistanza loro vengono somministrate dai calcoli relativi alla resistenza di cui deve esser capace il solaio.

648. Talvolta le dimensioni dell'ambiente sono troppo grandi per permettere lo impiego di travicelli delle ordinarie riquadrature e lunghezze. Allungare in questo caso i travicelli lasciando loro la propria riquadratura sarebbe a danno della resistenza respettiva che potrebbe rimanere inferiore alla necessaria, adoperare pezzi di giuste e proporzionate dimensioni sarebbe un caricare soverchiamente i muri a cagione della piccola distanza a cui debbono i travicelli collocarsi, per ragioni indipendenti dalle loro dimensioni, ed un'aumentare senza necessità il dispendio della costruzione. Tali inconvenienti si evitano facilmente decomponendo per mezzo di grosse travi l'area del solaio in più rettangoli di lunghezza eguale alla più piccola dimensione dell'ambiente, e di larghezza eguale alla lunghezza dei travicelli disponibili. Il solaio allora viene a constare di tanti solai che si chiamano *passine* di struttura identica a quella sopra enunciata.

Le travi debbono avere la forza necessaria a sostenere il carico di ciascuna passina, e quando non si potesse disporre di materiale di sufficiente riquadratura, si potrebbe ricorrere ad uno dei mezzi indicati ai N.i 641, 643 e 644.

649. Le teste dei travicelli debbono essere innestate in queste travi e in quelle che talvolta si pongono aderenti ai muri, siccome abbiamo precedentemente accennato. Le intac-

cature da adoprarsi sono allora della forma rappresentata nelle *Fig.ª* 219, 220, 221. N.i 609, 611, 613.

650. L'orditura di legname su cui si dispongono i materiali componenti il coperto di un tetto è presso a poco analoga a quella dei solai, colla differenza costante che laddove questi sono orizzontali quelli per lo contrario hanno sempre una certa inclinazione all'orizzonte. Le aree ricoperte dai tetti possono essere di forma qualunque; e ad eccezione di alcune fabbriche di non comune importanza la superficie di essi è generalmente formata di facce piane, cui si da il nome di falde.

651. Per un'area rettangolare il tetto può avere una, due, tre e quattro falde.

Ha una sola falda allorchè uno dei due muri più lunghi è più alto dell'altro. In questo potrebbero disporsi tanti travicelli o correnti colle teste incastrate nella sommità dei due muri equidistanti fra loro, e su questa orditura del tutto identica a quella d'un solaio si porrebbero i laterizi destinati a formare il coperto.

Ha due falde allorchè i due muri più lunghi sono di eguale altezza. In tal caso gli altri due muri opposti si protraggono in forma di triangolo isoscele al disopra del piano orizzontale che passa per le sommità dei primi. Sui vertici di questi due triangoli si colloca una trave orizzontale che si chiama *colmareccio*, e su questa trave e sulla cresta di ciascun muro che gli è parallelo si pongono i correnti nel modo anzi detto.

Diconsi *muri di gronda* quelli sui quali si appoggiano i correnti: gli altri che sostengono il colmareccio si chiamano *muri di frontespizio*, e alla parte triangolare che li termina si da il nome di timpano.

Immaginiamo uno dei timpani o tutti e due inclinati all'orizzonte e costituiti non di opera murale, ma di un'orditura di legnome capace a sostenere la corrispondente porzione del coperto, ed avremo il tetto a tre o quattro falde, respettivamente denominato a *mezzo padiglione*, o *a padiglione*. Nel primo caso tre dei muri che circondano l'area occupata dalla fabbrica, e nel secondo tutti e quattro hanno le loro sommità nel medesimo piano orizzontale.

Google

Quando l'area rettangolare e quadrata, la copertura migliore è quella a padiglione, il colmareccio si annulla, e la superficie del tetto diviene quella di una piramide, come in tutti i casi in cui il poligono limite dell'area è di un numero maggiore di lati e regolare.

652. Parleremo più tardi della struttura dei tetti a padiglione; intanto osserveremo che costruendo l'armatura del tetto nel modo indicato per quelli ad una e due falde, una parte del peso del coperto si risolve in una spinta orizzontale che tende a rovesciare i muri di gronda, spinta da doversi ad ogni modo evitare.

Si raggiunge lo intento facendo portare direttamente da una particolare opera di legname il carico dei travicelli e del coperto. Questa opera cui è stato dato il nome di *Cavalletto*, è composta principalmente di tre pezzi *a b*, *a c*, *c d* disposti a triangolo (*Fig.* 240), per rendere invariabile la forma del sistema. Di essi il primo *a b* orizzontale è sostenuto dai muri di gronda *M'*, *M'*, avendo le sue estremità incastrate in due travi (*m n*, *m'*) distese sulla sommità dei muri medesimi; e gli altri due *a c*, *c b* incastrati con uno degli estremi in *a b* per mezzo di un'intaccatura a semplice o doppio dente cuneiforme (N. 620 a 623, *Fig.* 226 e 228), e con l'altro estremo in un pezzo verticale *c d* sostengono una porzione del tetto.

Si chiamano: *catena* il trave orizzontale *a b*, *puntoni* le due minori travi inclinate *a c*, *c b*, *monaco* il piccolo trave verticale *c d*; *dormienti* le travi (*m n*, *m'*).

Il carico che è una forza verticale agente su ciascuno dei puntoni si risolve allora in due forze, una perpendicolare al puntone che serve a determinare la resistenza della quale deve essere quello capace, l'altra parallela al puntone medesimo. Questa che puossi considerare applicata all'estremo incastrato nella catena risolvesi pure in due altre, delle quali uno verticale ed agente contro la resistenza della catena e del muro alla compressione che è sufficiente a distruggerla, l'altra orizzontale che rappresenta il valore della spinta tendente a rovesciare il muro, ma di cui l'effetto riducesi a distendere la catena secondo la sua lunghezza a cagione delle intaccature che impediscono il movimento orizzontale degli estremi *a* e *b* dei puntoni.

653. Ecco quale è in fine la composizione dell'armatura d'un coperto a due falde. Supponiamo che (M, M'), (M, M') sieno i due muri di gronda (*Fig.* 240) a convenevoli distanze si collocano tanti cavalletti (a, b, a e b), (a, b, a e b) . . . . quanti occorrono secondo la lunghezza del coperto e la distanza dei muri di frontespizio Il colmereccio (c c, c') incastrato nei vertici dei timpani, e fissato su quelli dei cavalletti assicurerà la posizione verticale di questi ultimi. Allora sui puntoni si appoggiano delle travi orizzontali, dette *arcarecci*, equidistanti fra loro come vedesi in (t t, t'), (t t, t') . . . . le quali si ritengono in sito per mezzo di piccoli pezzi di legno i, i, i, ... chiodati o incastrati sui puntoni, cui si dà il nome di *gattelli*: per ultimo sugli arcarecci e sul colmereccio si fissano con chiodi i travicelli, chiamati anche *piane* o *correnti* (p p, c' p'), (p p, c' p') . . . pure equidistanti fra loro e paralleli ai puntoni, sui quali si dispongono i materiali destinati alla copertura del tetto.

La *Fig.* 241 è la proiezione dell'armatura sopra il piano verticale X' Y' parallelo ai muri di gronda

654. Per tutti i coperti pei quali la distanza dei muri di gronda non supera i metri 6, 50 può farsi a meno del monaco e d (*Fig.* 240); ed allora i puntoni a e, b e si appoggiano in e colle loro estremità secondo un piano verticale, e vien reso stabile il loro contatto per mezzo di due spranghe di ferro orizzontali incavigliate fra loro o colla inserzione di un maschio di legno pure incavigliato.

655. Per una distanza fra i muri di gronda maggiore di metri 6, 50 e fino a 13 metri, vi può essere pericolo che la catena a b si fletta? sotto il proprio peso, e lo stesso avvenga per ciascun puntone sotto il carico che sopporta. Non conviene adoperare pezzi di forte riquadratura per ovviare a tale inconveniente, perchè indipendentemente dal danno che ne soffrirebbe l'economia sotto ogni rapporto, si caricherebbero soverchiamente i muri della fabbrica senza necessità. Ed è in questi casi miglior consiglio ricorrere all'impiego di pezzi ausiliari che aumentino la forza dei puntoni, e impediscano la flessione della catena, vantaggiando così la economia del materiale ed assicurando la stabilità del sistema, siccome è stato accennato al N° 638.

Questi pezzi ausiliari possono essere 1° il monaco *c d* (*Fig.* 240) incastrato colla estremità superiore a dente e mortisa (N. 606 e *Fig.* 248) nel colmareccio, e che stretto presso questa estremità dai due puntoni, le cui sommità possono in esso incastrarsi a dente semplice cuneiforme (N.° 620 e *Fig.* 326) serve a sostenere per lo suo mezzo la catena mediante una staffa di ferro della forma *S* (*Fig.* 242), la quale cinge la catena medesima e si trova per mezzo di caviglie fissata nel monaco: 2° le due razze o gambe di forza *r, r* incastrate a dente e mortisa nel monaco e nei puntoni.

656. Per una distanza fra i muri di gronda maggiore di metri 13, la struttura dei cavalletti, è contenuta nel sistema rappresentato dalla *Fig.* 244. Distinguonsi in questo, come membri ausiliari, i due *mensoloni c, c* incastrati nei muri *M, M* a sostegno delle estremità della catena ed allacciati con questa e coi puntoni per mezzo di grosse staffe poste in direzione normale a quella dei puntoni medesimi; i *sottopuntoni p, p* destinati a sostegno dei puntoni fino alla metà o ai due terzi della lunghezza di questi ultimi; *la controcatena*, o *catena morta a b* collocata fra le sommità dei sottopuntoni; il monaco principale *m m* che sostiene la controcatena; i due monaci secondari *n n* incastrati a dente e mortisa nella sommità dei puntoni, e destinati a sostenere le estremità della controcatena e dei sottopuntoni, e ad un tempo la catena *c c* in punti equidistanti dai muri di un quarto o di un terzo della sua lunghezza; infine le razze *r, r* di cui ciascuna offre un punto d'appoggio alla controcatena, e le altre *r', r'* destinate ad impedire il movimento che le prime potrebbero imprimere alle estremità dei monaci secondari per deviarli dalla verticale. La catena può comporsi di tre pezzi, e i puntoni di due se occorre. In tal caso le connessioni si fanno con intaccatura a zigzag dritto o cuneiforme (N. 626 e 627, *Fig.* 230 e 231), nei punti di sospensione *n*, *n* per la catena, e poco al disotto del punto d'appoggio del monaco per il puntone.

657. Si possono quando non lo si creda pregiudicevole alla stabilità del sistema, sopprimere anche tutte le razze, come è stato praticato nei cavalletti del coperto del Teatro di Torre Argentina a Roma di cui la larghezza è metri 23, 70. In questi i monaci *n n* sono connessi coi puntoni nel loro

punto di mezzo; la parte della catena compresa fra i monaci medesimi resultando di metri 11, 85 è sostenuta da due staffoni di ferro raccomandati alla parte di mezzo della controcatena; e i sottopuntoni *p*, *p* invece di esser in contatto coi puntoni, sono tenuti un poco discosti dalle estremità inferiori di essi; lo che contribuisce a non indebolire di troppo la estremità della catena ove sono incastrati, serve a lasciare un giuoco libero all' aria fra i diversi membri del sistema, e avvantaggia in parte la resistenza alla compressione, colla quale debbono i sottopuntoni unitamente alla controcatena impedire lo incurvamento dei puntoni.

658. In alcuni casi il monaco principale *m* m, invece di terminare al colmareccio, nel quale si usa incastrarlo come abbiamo detto al N.° 655, oltrepassa colla sommità il colmareccio medesimo; e questo, o può comporsi di tanti pezzi incastrati fra monaco e monaco di due cavalletti consecutivi, o può esser formato da due correnti che a guisa di ascialoni stringano i monaci presso le loro estremità per mezzo d' intaccatura analoga a quella accennata al N.° 637 (*Fig.* 234).

La *Fig.* 244 rappresenta in *M* il monaco principale, in *C* il colmareccio col dente destinato ad unirlo al monaco, in t la intaccatura per la connessione dei puntoni. Talvolta si pratica di dare dei punti d' appoggio al colmareccio per mezzo di razze fissate nei monaci. La *Fig.* 245 ove *c c* è il colmareccio, ed m, m i monaci rappresenta questo sistema.

La staffa binata, o a forbice rappresentata in *T* dalla *Fig.* 242 si impiega utilmente per assicurare al monaco principale la sommità dei due puntoni.

659. I coperti ad una falda sono sostenuti da une serie di mezzi cavalletti della forma *c* e *b* (*Fig.* 240). Supposto che *c* e rappresenti il muro più alto, ed *M'* quello di gronda il semicavalletto componesi di una catena appoggiata sul muro *M'* ed incastrata nel muro opposto; di un puntone c *b* incastrato nella catena per un estremo col modo ordinario, e coll' altro estremo nel muro c e; finalmente di un saettone r incastrato nella catena a nel puntone, e qualche volta si aggiunge un sotto puntone come nella *Fig.* 243.

Gli arcarecci *t'*, *t'*, *t'* . . . e le piane *c' p'* sono poi disposte secondo il solito per ricevere i materiali del coperto.

660. Abbiamo detto chiamarsi a padiglione quel tetto a quattro falde (N° 651) che ricuopre un'area rettangolare cinta da muri aventi le loro sommità sopra il medesimo piano orizzontale.

La *Fig.* 246 rappresenta in questa specie di coperti la disposizione dei cavalletti che si determina nel modo seguente. Tirata la *e f* bisettrice dei lati più corti *a b*, *c d*, si prendono sopra di essa due punti *g*, *h* tali che le distanze *h f*, *g e* resultino eguali ad *h i* e *g l*; si conducono le *m g l*, *k h i* perpendicolari ai lati *a d*, *b c*, e sulla porzione di fabbrica *m l i k* si dispone la ordinaria orditura del coperto per i tetti a due falde, della quale *g h* rappresenta allora in direzione e lunghezza il colmereccio.

Le rette *a g* e *g b*, *d h* e *c h*, congiungenti gli estremi *g*, *h* del colmereccio coi punti *a*, *b* e coi punti *c*, *d* determinano i piani delle falde triangolari costituenti i mezzi padiglioni del tetto, falde che per la prescelta posizione dei punti *g* ed *h* hanno la medesima inclinazione delle altre *a d h g*, *b g h c*. Gli arcarecci e i correnti sono sui mezzi padiglioni sostenuti da semicavalletti i cui assi vengono rappresentati sulla *Fig.* 246 dalle rette stesse *g a*, *g b*, *d h*, *c h*, e dalle altre *g e*, *h f*, *n o*; un'altro semicavalletto *n p*, si pone pure, se occorre, in ciascuno degli spazi triangolari *a m g*, *b g l*, *c h i*, *d h k*.

661. Talvolta avviene che i muri più corti *a b*, *c d* taglino obliquamente i più lunghi e paralleli *a d*, *b c*, (*Fig.* 247). Gli estremi *g*, *h* del colmereccio si determinano allora come nel caso precedente, cioè per modo che le distanze *g e*, *h f*, di questi punti dai lati *a b*, *c d* resultino eguali alla semidistanza *h i* fra i lunghi muri di gronda *a d*, *b c*. Così le falde triangolari hanno anche in questo caso la stessa inclinazione all'orizzonte che le altre di forma trapezia.

Si dà il nome di *sbieco* a ciascuno dei mezzi padiglioni per distinguerli da quelli usati nell'area rettangolare, che si chiamano *retti*.

I semicavalletti *h f*, *g e* si collocano nel medesimo piano verticale che passa pel colmereccio, piuttosto che in piani normali ai muri *a b*, *d c* all'oggetto di evitare le spinte che nei monaci *g* ed *h* verrebbero a prodursi in direzione obliqua a quel piano.

662. Lo studio di questo genere di tetti a quattro falde, riducesi a quello del taglio dei diversi pezzi costituenti i semicavalletti da cui sono formati i mezzi padiglioni, come a quello delle intaccature più idonee a collegare questi pezzi fra loro e col cavalletto che ha con gli altri comune il monaco.

L'ordine delle operazioni essendo il medesimo sì per i padiglioni retti, che per quelli sbiechi, noi ci proporremo lo studio di uno di questi ultimi, contentandosi soltanto di rimarcare le piccole differenze che si incontrano negli altri.

CAPO V.

Padiglione sbieco.

663. Notammo al N.° 652 che le estremità delle catene dei cavalletti posavano su certe travi collocate orizzontalmente sulle sommità dei muri, alle quali si dava il nome di dormienti. Ora mentre in queste travi pei lunghi muri di gronda si trovano incastrate le estremità della catena di ciascun cavalletto, per la porzione di perimetro occupato dal padiglione sono invece le catene che ricevono ad incastro le estremità dei dormienti, a cagione della particolare disposizione che e forza dare alle catene medesime.

Da questa disposizione resulta un sistema cui si dà il nome di *piattaforma*, e che conviene di esporre per ben comprendere l'ufficio delle diverse parti costituenti il padiglione.

664. Sieno *M N*, *O P* (*Fig* 248) le proiezioni delle sommità dei due lunghi muri di gronda, *N O* quella di uno dei muri obliqui che terminano la fabbrica. Sia *E F* la proiezione dell'asse del colmereccio per le due falde che si appoggiano sui lunghi muri, ed *H* quella della estremità di esso a cui corrisponde il monaco del cavalletto comune alle falde medesime e al padiglione. Tirando per *H* la *K I* perpendicolare ad *E F*, e le rette *H N*, *H O* avremo le proiezioni degli

assi dei puntoni di quel cavalletto e dei semi-cavalletti che vanno agli angoli della fabbrica; la *H F* e la sua parallela *a b* rappresenteranno gli assi del semicavalletto che divide in due parti eguali il muro *N O*, e degli altri più piccoli intestati nei puntoni dai precedenti; le rette n e parallele a *K I* aranno proiezioni degli assi di altri due piccoli semicavalletti egualmente intestati nei puntoni suddetti.

Tutte queste proiezioni servono a stabilire quelle dei pezzi componenti la piattaforma rammentata nel numero precedente. Il pezzo *A A* rappresenta la catena del cavalletto normale ai due lunghi muri di gronda: nelle sue estremità si vedono delineate in tratto pieno le mortise atte a ricevere le estremità dei puntoni, e indicati con linee a piccoli punti i denti dei dormienti *B, B* posati sui muri stessi, non che quelli degli altri dormienti *C C, C C* che fanno parte del padiglione.

Il pezzo *G* rappresenta la catena del semicavalletto parallelo ai lunghi muri; nella estremità che posa sul muro *N O* è stato indicato al modo stesso la mortisa per la sua connessione col puntone, e i denti dei dormienti *D, D*. L'altra estremità è incastrata nel mezzo della catena *A A* con due denti separati fra loro da un vano attraverso al quale deve passare la staffa che fissata al monaco sostiene la catena *A A*. La spinta orizzontale esercitata dal puntone contro il pezzo *G* si può distruggere col mezzo di due staffoni orizzontali *i i, i i* che abbracciano la catena *A A* nei punti corrispondenti a ciascun dente del pezzo medesimo e sono in questo inchiavardati.

I due pezzi *L, L* orizzontali sono incastrati nelle catene *A A* e *G*, come la figura dimostra, in posizione parallela alle respettive diagonali *r s, r s*; sostengono mediante incastri a dente e mortisa le estremità di due piccole catene *Q, Q* che posano sugli angoli del padiglione, e ricevono quivi coi soliti incastri i corrispondenti puntoni e gli estremi dei dormienti *C* e *D*. Gli staffoni *h h, h h* a guisa degli altri *i i, i i* distruggono la spinta di questi puntoni.

Finalmente i quadrilateri *b, b*; *c, c* rappresentano le mortise praticate nei dormienti per la connessione di questi coi piccoli puntoni normali e paralleli ai lunghi muri di gronda di cui gli assi sono proiettati secondo le rette *a b*, n c.

665. Ciò posto, lo studio del padiglione verrà completato dalle proiezioni dei puntoni e delle combinazioni di essi colle respettive catene. Tali proiezioni non debbono farsi soltanto sui piani coordinati, ma anche su quelli paralleli alle due facce principali, o ai piani delle falde su cui giacciono per ottenere le facce stesse e le linee di taglio delle diverse intaccature nella loro vera grandezza.

Nella *Fig.* 249 e seguenti che comprendono le operazioni relative a questo studio, abbiamo esagerate le dimensioni di tutti i pezzi per ottenere una maggiore chiarezza. Onde è che esse non possono fornire misura per la costruzione delle diverse parti del soggetto rappresentato, ma servono soltanto ad indicare i processi grafici necessari per la soluzione del Problema che ci occupa.

666. La *Fig.* 249 mostra nel sistema $A\ B\ B_1\ A\ C$ la proiezione orizzontale dei dormienti $E\ E_1\ E_1\ E_1$, $F\ F_1$ del monaco C e dei puntoni del gran cavalletto o semicavalletti del padiglione; nel sistema triangolare $D'\ C'\ D'$ mostra la proiezione verticale $C'\ C'$ del monaco, $B'_1\ B'_1$ dei puntoni angolari B o B_1 e della catena $D'\ D'$ del gran cavalletto comune ai lunghi muri di gronda e al padiglione.

I quadrilateri m', m'' sono proiezioni verticali delle mortise praticate nei puntoni angolari per ricevere i piccoli puntoni G, G paralleli ai lunghi muri di gronda; gli altri e', e''; e', e''; n', n'' rappresentano le mortise praticate nella catena del gran cavalletto pei dormienti E_1, E_1; per le due traverse diagonali c e facenti parte della piattaforma (N. 664), per i due denti della catena corrispondente al semicavalletto principale H parallelo ai lunghi muri.

667. Per costruire la figura precedente bisogna.

1°. Sulla proiezione orizzontale dell'area da coprirsi determinare le tracce $a'\ a$ dei due piani $S\ a'\ a$, $S\ a'\ a$ contenenti le facce esteriori dei puntoni che appoggiano sui lunghi muri di gronda;

2°. Tirare $a\ a$ per aver la traccia del piano costituito dalla faccia triangolare esteriore del padiglione.

3°. Sovra $h'\ q'$ perpendicolare ad $a'\ S$ prendere la grossezza che vuol darsi ai puntoni dei cavallatti perpendicolari ai lunghi muri di gronda, e tirare $q''\ q'\ a'$ che sarà

la traccia verticale del piano su cui si trovano le facce inferiori dei puntoni di tutti i cavalletti indicati. La traccia orizzontale di questo piano sarà allora o' o perpendicolare ad $X F$ il suo incontro con la diagonale C o determinerà il punto o, e la o o parallela ad $a \cdot a$ sarà la traccia orizzontale della faccia triangolare inferiore del padiglione.

668. Data la grossezza $h' q'$, e determinati gli assi dei puntoni di tutti i cavalletti e semicavalletti principali nel modo indicato al N°. 664, non resta da fare altra cosa che stabilire la larghezza di ciascun pezzo.

Ai puntoni B, H, B_1 si darà quella larghezza che giudicheremo la più conveniente secondo la natura del progetto, e si farà in modo che i due spigoli verticali t, t_1 del monaco si trovino nei piani verticali determinati dalle costole salienti C a del padiglione. Il puntone del semicavalletto angolare è un prisma a base pentagona, di cui la sezione orizzontale è z n a u x. La faccia che contiene il lato a n è situata sul piano S a' a, quella che contiene il lato a u appartiene alla faccia triangolare esteriore a C a del padiglione. Le facce contenenti i lati n z, u x sono verticali, e le loro tracce orizzontali n v, u r determinano la larghezza del puntone. Infine la quinta faccia ha per traccia orizzontale la x z perpendicolare alle precedenti due facce verticali.

669. Ogniqualvolta la retta C a divide in due parti eguali l'angolo e a b, come ordinariamente avviene N°. 664, si riporta da ciascun lato della retta C a, e sopra una perpendicolare ad essa la metà della prescritta larghezza del puntone. Ma se per qualche circostanza particolare non può determinarsi la posizione del monaco per modo che la condizione precedente rimanga sodisfatta, la costola C a non può trovarsi al mezzo della spessezza del puntone, come nel caso supposto, senza andare incontro a due inconvenienti egualmente contrari alla stabilità dell'opera. Poichè le costole corrispondenti agli angoli n, u, x, z non si troverebbero nei piani formati dalle facce superiori o inferiori del tetto, dovendo la faccia inferiore x z riescire perpendicolare alle facce laterali del puntone; o se vuolsi evitare la irregolarità sopra indicata, non potrebbe la faccia x z sodisfare alla condizione suddetta, e quindi dovremmo ricorrere al mezzo di diminuire la spessezza del puntone.

Non può dunque nel caso che si contempla riuscire la costola $C\ a$ nel mezzo di questa spessezza, onde volendo che il puntone abbia la larghezza prestabilita si riporterà sopra una retta $a\ Z$ perpendicolare a $C\ a$ una lunghezza $a\ m$ eguale alla larghezza medesima, e si tirerà $m\ n$ parallela ad $a\ e$. Questa ultima retta somministrerà sulla $a\ b$ il punto n, da cui si otterrà la $n\ u$ con una parallela ad $a\ Z$, e quindi le $n\ s$ ed $u\ r$ che fanno conoscere la sezione orizzontale $n\ u\ x\ z$ del puntone.

670. Le facce verticali $n\ v$ e $s\ s$ del puntone del cavalletto angolare, e dell'altro appartenente al cavalletto perpendicolare al lungo muro di gronda s'incontrano secondo una verticale proiettata in v. Il punto v e l'asse C del monaco formano una faccetta secondo la quale il primo si appoggia contro l'altro puntone. Un'altra faccetta analoga esiste dal lato opposto del puntone angolare, secondo la quale questo si appoggia contro il puntone del semicavalletto del Padiglione. La medesima osservazione ricorre per l'altro puntone angolare B.

Ora mentre il puntone H, come quelli del cavalletto perpendicolare ai lunghi muri di gronda, può incastrarsi per mezzo di un dente nella semmità del monaco, lo stesso non può praticarsi per i due puntoni B, B_1 onde non indebolire di troppo il monaco stesso. E ci si contenta piuttosto di tagliare in t e t_1 due angoli rientranti di cui ciascuno combaci perfettamente con l'angolo saliente del monaco che gli corrisponde; essendo ciascun puntone a sufficienza sostenuto dai piccoli puntoni G, G_1.

671. Per riconoscere la forma delle diverse parti di questi pezzi, come per giungere a determinare la lunghezza effettiva delle linee che costituiscono le parti medesime, si ricorre al metodo degli abbattimenti o si costruiscono delle proiezioni ausiliarie sopra piani paralleli alle facce principali. Così le figure B''_1, G_2 (*Fig.* 249) sono gli abbattimenti del puntone $C\ b$ e del piccolo puntone G_1 fatti sui piani delle loro facce verticali. Il dente d e la faccetta f del primo, come il dente d' del secondo sono dedotti dalle proiezioni verticali B'_1 ed m''.

La *Fig.* 250 è la proiezione del monaco, del puntone angolare B_1 (*Fig.* 249) e della relativa catena Q (*Fig.* 248),

fatta sopra un piano verticale parallelo alla faccia v u. Le altezze dei diversi punti di questa proiezione sono contate dal piano della faccia orizzontale a' b' della catena Q' e prese sulla proiezione verticale del padiglione disegnata nella *Fig.* 249 a partire dalla linea α' β'.

Si vedono in B''' e in Q'' gli abbattimenti del puntone B'' e della catena Q'. Il primo è stato fatto sopra un piano parallelo alla sua faccia inferiore r x z v condotto per la costola t_1 a (*Fig.* 249); il secondo sul piano orizzontale che passa per a' b'. Il pentagono S è la sezione retta del puntone B'.

La proiezione ausiliaria dell' altro puntone angolare B e della corrispondente catena si trova in un modo analogo.

La *Fig.* 251 dimostra in Q''' la forma della estremità della catena. Le linee corrispondenti del taglio sono date di posizione e di lunghezza dalla *Fig.* 250.

La *Fig.* 252 contiene la proiezione del semicavalletto H (*Fig.* 249) del padiglione fatta sopra un piano verticale x' y' parallelo alla direzione del tetto.

La proiezione del puntone è H', e G' quella della catena G (*Fig.* 248) corrispondente. Per ottenere questa proiezione bisogna conoscere l' altezza dei diversi punti del puntone al disopra del piano x' y', per il che basta costruire una proiezione ausiliaria sopra un piano verticale O Z' (*Fig.* 249) perpendicolare alla traccia orizzontale della superficie esteriore del padiglione.

Questa traccia è evidentemente parallela ad O O_1: talmente che presa sulla C Z' perpendicolare ad O Z' l'altezza Z' C'' eguale a quella del punto C' sopra α' β', sarà O C'' la intersezione della superficie esterna del padiglione col piano verticale O Z'; e l'angolo Z' O C'' determinerà la inclinazione di quella superficie sul coordinato orizzontale. Ciò posto si potrà facilmente costruire la figura H'' deducendo le altezze di tutti i punti dalla proiezione n' C' a' del padiglione. La nascita del dente del puntone, cioè la linea i i_1 è determinata dal punto t'_1 nel quale la costola verticale t_1 del monaco è incontrata dalla retta (t_1 t_2, t'_1 t'_2) che sta nella faccia inferiore del puntone angolare.

Riportando ora le altezze di tutti i punti della proiezione H'' sopra le linee proiettanti i punti corrispondenti sul piano

x' y' della *Fig.* 252, tutte le parti della proiezione H' rimangono determinate.

La figura G_1 è la proiezione della catena sul piano orizzontale condotto per x' y'; la figura H_1 è quella del puntone sopra un piano parallelo alla superficie esterna del padiglione.

La *Fig.* 253 rappresenta in G_1 la proiezione del piccolo puntone G (*Fig.* 249) fatta sopra un piano verticale parallelo alla sua direzione. Essa è stata dedotta dalla proiezione H'' nello stesso modo da noi già indicato per costruire quella della *Fig.* 252.

672. Resta a farsi la proiezione di tutti i pezzi del padiglione sulla superficie esterna del tetto. Vedesi questa nella *Fig.* 254, la quale è costruita nella ipotesi che, fatta la proiezione in discorso, siasi sviluppata la superficie medesima sul piano del triangolo a C a (*Fig.* 249), e quindi tutto lo sviluppo siasi fatto abbattere sul piano orizzontale α' β', presa per asse d'abbattimento la retta O_1 O.

La retta O C'' essendo la traccia del piano del triangolo a C a, si proietteranno su quella retta tutti i punti della proiezione H''; di poi immaginando che il piano suddetto ruoti attorno ad O O_1, ciascun punto della *Fig.* 249 si muoverà sopra un piano verticale e perpendicolare alla retta O O_1 descrivendo un arco di cerchio che si proietta nella sua vera grandezza sul piano Z' O Z'' col centro in O. Talmente che pel punto (C, C''), per esempio, basta prendere la distanza O C'', riportarla sopra O Z'' in O c (*Fig.* 254), tirare da c una perpendicolare ad O Z'', e il punto B in cui incontra la C B perpendicolare ad O_1 O sarà l'abbattimento del punto (C, C'') della *Fig.* 249.

Ripetuta questa operazione per i punti a, a si trovano i loro abbattimenti in A_1, A e quindi il triangolo A A_1 B sarà l'abbattimento della superficie esterna del padiglione, sulla quale si vedono le proiezioni del puntone H e dei piccoli puntoni G, G ottenute nel medesimo modo.

L'abbattimento di ciascuna delle superficie esteriori del tetto che appoggia sui lunghi muri di gronda si ottiene facilmente costruendo su ciascuna delle rette O B, O_1 B come ipotenuse un triangolo rettangolo di cui uno abbia per ca-

teto $O\ D = O\ D_1$ e l'altro $O_1\ L = O_1\ L_1$. Trovati i punti D ed L, le parallele ad $O\ D$ condotte per A e per B, o le parallele ad $O_1\ L$ condotte per A_1 e per B determineranno evidentemente gli abbattimenti cercati, sui quali si potranno costruire cogli stessi processi le proiezioni dei pezzi appartenenti al padiglione.

673. Le indicate costruzioni grafiche servono a facilitare il tracciato del legname per la esecuzione del taglio, in quanto che somministrano le lunghezze di tutte le linee corrispondenti. Ma queste lunghezze non si possono riportare sui pezzi finchè non sono ridotti ad avere nella loro sezione retta le dimensioni resultanti da tutte le condizioni alle quali sono essi subordinati.

Abbiamo già indicato la sezione retta del puntone angolare B_1; quella dell'altro puntone B si otterrà colla stessa facilità. Le sezioni rette dei puntoni perpendicolari ai lunghi muri di gronda si desumono immediatamente dalle loro proiezioni orizzontali e verticali. Rimangono quindi a determinarsi soltanto quelle dei puntoni del padiglione che sono paralleli agli stessi muri.

Il quadrilatero H''' è la sezione retta del puntone H. Essa è stata costruita immaginando che il suo piano $i\ n$ (*Fig* 252) ruotando attorno alla orizzontale del punto i sia venuto in $i\ n_1$ e quindi siasi abbattuto sul piano orizzontale. In pari modo è stata trovata la sezione retta G''' del piccolo puntone G, per la quale abbiamo avuto ricorso alla proiezione di questo puntone che si vede nella *Fig.* 253.

Digitized by Google

CAPO VI.

Armature delle volte e particolarmente dei ponti di strutture murale.

674. L'armatura d'una volta è tal composizione di legname che deve servire di forma e di sostegno alla volta stessa durante la sua costruzione e per qualche tempo ancora dopo il suo compimento, finchè tutti i materiali che la compongono non abbiano preso l'assettamento conveniente e l'opera murale non sia consolidata per modo da esser certi che i soli piedritti bastano a sostenerla. Fino da questo momento l'armatura si toglie dal posto, e deve potersi remuovere in guisa da non guastarne le parti, onde all'occorrenza sia dato rinnuovarne l'uso o per volta di sesto eguale o per altri lavori provvisionali.

675. Tali essendo le due condizioni principali, a cui deve soddisfare ogni armatura di volta bene costituita, si desume immediatamente: che per la prima dovrà ogni armatura essere terminata superiormente da una superficie curva che coincida e si trovi in contatto con l'intradosso della volta medesima; per la seconda debbono i suoi membri essere di tale riquadratura o così ben combinati da resistere sufficientemente al carico della volta perchè l'armatura non venga alterata nella forma durante la costruzione dell'opera.

Di qui due parti distinte in qualunque di tali armature: la parte resistente, cui si da il nome di *centinatura*; la parte completiva che ne costituisce la superficie superiore e che si chiama *manto*.

676. Per le volte a botte, delle quali solo ci occuperemo, la centinatura è costituita da una serie di *centine* poste in piani verticali ad eguale distanza fra loro, come le incavallature d'un coperto, e destinate a sorreggere il manto. Il sesto, la corda della volta, la specie ancora della struttura di essa non che l'assortimento del legname, talvolta unicamente disponibile nell'interesse della economia, fanno variare più o

meno la forma delle centine quanto alla disposizione secondaria delle loro parti. In tutte però è forza disporre i membri principali di resistenza secondo la figura triangolare, che è la sola capace di assicurare la stabilità del sistema (N.° 638).

Può dirsi anzi, che da questa figura dipende essenzialmente, come nelle incavallature, la forma delle centine per le volte di qualunque specie; in quanto che non vi ha nelle costruzioni opera murale, nella quale si abbiano a temere più che in quelle gli effetti, sempre perniciosi, dei movimenti durante il lavoro.

677. Alla guisa istessa delle nominate incavallature, debbono le centine delle volte esser simmetriche attorno all'asse verticale del sesto della volta medesima. Imperocchè la costruzione di questa ultima procede egualmente da ambo i lati verso la chiave; e quindi conviene che le parti diverse delle centine si trovino egualmente premute ed alcune farsi ancora scambievole sostegno.

Tale disposizione non impedirà, per le volte in specie di una gran corda, certi movimenti quasi insensibili in quelle parti e che sono inevitabili a cagione delle intaccature e della elasticità propria del legname; ma verranno per essa evitati i movimenti maggiori capaci di alterare le condizioni dell'equilibrio e di porre col tempo in grave pericolo la stabilità della volta.

678. Le più semplici centine sono quelle formate di tavole sovrapposte, chiodate fra loro e segate esteriormente secondo la curva direttrice dell'intradosso. Collocate a piccola distanza di mezzo metro o un metro al più, ed assicurate nella loro posizione verticale per mezzo di piccoli correnti interposti, si distende sopra di esse il manto formandolo o di tavole o di cannicci, secondo la struttura particolare della volta.

Due correnti fissati nei piedritti lungo le linee di nascita dell'intradosso, possono servire ad appoggiarvi sopra le centine. Invece di correnti, possono impiegarsi anche mensole o candele verticali assicurate ai piedritti nei punti corrispondenti alle due estremità di ciascheduna centina.

Le volte soltanto di leggera struttura e di una corda discreta comportano questa specie di centine. Allorchè la lunghezza della loro corda dà ragionevole timore di alterazione

di forma nella centina, fa mestieri provvedere a tale inconveniente per mezzo di candele verticali che fissate colla estremità inferiore nell'area sottoposta vanno colla superiore a sostenere il vertice della centina, e nelle quali si infigge una della estremità di alcuni sbadacchi o razze di cui l'altra estremità serve pure di appoggio ad altri punti della centina medesima.

Se poi l'uso di tali candele fosse reso impossibile per la distanza che separa la volta dall'area sottoposta, bisogna prender norma dal sistema impiegato nelle centine delle volte di pesante struttura per trovar modo d'impedire le alterazioni temute.

679. Anche in queste ultime volte la lunghezza della corda è il principale elemento dal quale dipende la composizione della centina.

Se la corda è piccola, possono bastare due puntoni o cosciali *a b*, *c b* (*Fig.* 255) incastrati con intaccatura marginale a semplice dente cuneiforme, (N°. 620. *Fig.* 226), nella estremità di una catena *a c*, e congiunti a denta e mortisa nel loro punto di concorso *b*, con intaccatura analoga a quella descritta al N°. 616 e rappresentate nella *Fig.* 224.

Due dormienti orizzontali *d*, *d* collocati presso le linee di nascita dell'intradosso ed appoggiati sulle teste di due candele *e*, e sostengono la catena *a* quindi tutta la centina per la intera lunghezza della volta. Sulla faccia superiore di ciascun puntone si fissa la *forma* o *curva* tagliata in tavola, come le centine descritte nel numero precedente; e sulle forme si chiodano i tavoloni che hanno a formare il manto della volta. Qualche volta si preferisce invece di fissare i tavoloni sui cosciali per costruire quindi sulle due falde inclinate di questo manto due segmenti cilindrici *m* di muro, dando alla loro superficie esteriore la curvatura dell'intradosso della volta nel modo indicato nella figura a sinistra.

Allorchè poi non si crede sufficientemente resistente la forma di tavola e troppo pesante il muro *m* si può aggiungere su ciascun puntone *b c*, *b a* il sistema di altri due piccoli puntoni *b f*, *c f*, rispetto ai quali ciascun puntone principale eserciti l'ufficio di catena. In tal caso le forme *e f* riescono meglio proporzionate al carico e più stabilmente connesse colla centina.

680. Le volte di mediocre ampiezza esigono una centinatura più resistente.

Ciascuna centina può in questo caso esser costituita da quattro cosciali *a b*, *b c*, *c d*, *d e* (*Fig.* 256), i quali dividono il sesto della volta in quattro parti uguali, e di cui le estremità sono incastrate in una catena *a e*, ed in tre razze *b f*, *c g*, *d h* che alla loro volta s'infiggono nella catena stessa. Ad eccezione della estremità inferiore della razza *c g*, la quale è incastrata nel mezzo della catena a dente e mortisa (N.° 606. *Fig.* 248), tutti gli altri pezzi sono fra loro connessi per intaccature marginali a semplice dente cuneiforme (N.° 622. *Fig.* 227), rese più stabili col mezzo di caviglie di ferro, siccome la figura dimostra. La catena e quindi ciascuna centina è sostenuta anche in questo caso da due dormienti, che si appoggiano sulla testa di altrettante coppie di candele assicurate ai piedritti, quante sono le centine medesime.

Quando si abbia ragionevole timore che la catena possa flettersi sotto gli sforzi esercitati contro di essa dalle razze, si aggiungono due saettoni *s*, *s* infissi alla catena e alle candele con intaccature simili a quelle adoperate per la connessione delle razze coi cosciali.

681. Non è possibile esporre tutte le composizioni diverse di centine usate per le grandi volte in pietra da taglio o in mattoni, molto pesanti non tanto per la loro struttura quanto ancora per i carichi da essa permanentemente o provvisoriamente sostenuti. Le arcate dei ponti in specie hanno sempre formato il soggetto degli studi dei costruttori in quanto riguardava il genere di loro armatura. e siccome variabilissime sono le circostanze da cui può dipendere la determinazione dell'armatura di tali arcate (N.° 676), così il costruttore trovasi ordinariamente costretto a modificare più o meno le composizioni conosciute per trovar quella che al caso suo meglio si presta. Tutte queste composizioni possono raccogliersi in due sistemi: il primo delle *centine a catena*, il secondo delle *centine a poligoni*; a ciascuno di questi sistemi ha un tipo dal quale ogni particolare composizione può intendersi derivata. Noi quindi ci limiteremo ad esporre questi due tipi consacrati dalla esperienza non solo nelle costruzioni di

cui hanno fatto parte integrante senza alcuna modificazione, ma ben anco in tutte le altre opere per le quali sono stati le fonti da cui han potuto i costruttori ricavare le forme di centine la più idonee a sodisfare a tutte le condizioni di stabilità e di economia.

Centina a catena.

682. *Descrizione.* — Il tipo che presentiamo è conosciuto col nome di sistema di Pitot, che è stato il primo a darne una dotta illustrazione. Può questo considerarsi come composto di due parti distinte: la inferiore è costituita da una catena *a b* (*Fig.* 257) sostenuta da due saettoni *c d*, *e f* che ad essa servono di appoggio verso le estremità, e da altri due saettoni *g h*, *l i* più inclinati dei primi le cui estremità superiori si appoggiano contro un cuscino *g l* destinato a rinforzo della parte media della catena stessa; la parte superiore è costituita da un monaco *m n* nel quale sono infisse per uno estremo due coppie di puntoni o p, o_1 p_1, r s, r_1 s_1 connessi con l'altro estremo alla catena nei punti corrispondenti a quelli in cui è divisa dai puntoni della parte inferiore. Diverse razze x y, tutte normali alla curva direttrice dell'intradosso, servono a collegare i puntoni di ciascheduna parte fra loro; e due di esse singolarmente x_1 y_1 collegano i puntoni superiori o p, o_1 p_1 colla catena e coi puntoni inferiori g h, l i dell'una e dell'altra parte. Un'arcone composto di molti pezzi con accuratezza tagliati ed insieme stabilmente connessi si appoggia sulle teste di tutte le razze formando il contorno della centina secondo la curvatura del sesto della volta. Questo arcone è anche sostenuto in punti intermedi alle razze da altri pezzi a z che si appoggiano colle estremità inferiori sui puntoni c d, e f, e sugli altri o p, o_1 p_1.

Il manto della volta è formato da una serie di travi o correnti *t*, *t*, *t*.... cui si dà il nome di *dossali*, e che si appoggiano sull'arcone a determinate distanze fra loro, come nella figura, se la volta ha da esser costruita in pietra da taglio; ossivvero si collocano l'uno a contatto con l'altro se la struttura della volta è in mattoni. I dossali non si fanno

per ordinario appoggiare direttamente sull'arcone, poichè si suole interporre fra questo e quelli un cuscinetto che si taglie a lavoro compito; essi allora abbassandosi vengono in contatto coll'arcone, e resta così liberata la centina dalla pressione contro di essa esercitata dalla volta.

Una piattaforma *q q* sporgente dai piedritti, ed opportunamente sostenuta da due travi *A*, *A* serve a sorreggere ciascuna centina per mezzo della inserzione fatta in essa delle due estremità dell'arcone, e di quelle dei puntoni *c d*, *e f*, *g h*, *i l*. Le centine poi sono ritenute nei respettivi loro piani verticali dai correnti accoppiati *w w* che stringono fra le loro intaccature il monaco e due delle razze *x y*. A questi correnti si appoggiano anche altri pezzi inclinati fra una centina e l'altra per impedirne meglio la deviazione dal piano verticale.

683. *Forma e taglio dei pezzi.* — Ad eccezione dell'arcone, le cui parti hanno tutte la stessa sezione rettangolare e sono tagliate in arco di cerchio di raggio eguale a quello della direttrice dell'intradosso, tutti gli altri pezzi della centina sono di forma parallelepipeda con dimensioni proporzionate all'ampiezza della volta e agli sforzi che ne cimentano in ciascuno la corrispondente resistenza.

La *Fig.* 258 è la rappresentazione d'una parte della centina eseguita colle regole indicate al N.° 607 pel disegno prospettico delle intaccature; e mostra ad evidenza le connessioni dei principali membri di forza coi pezzi di collegamento. Le razze *X Y*, *X' Y'* sono accoppiate, e per mezzo di una semplice intaccatura tagliata in ciascuna di esse (N.° 637. *Fig.* 234) stringono le diverse parti dell'arcone e i puntoni, ai quali si conserva tutta la loro grossezza per non indebolirli.

La proiezione verticale della centina (*Fig* 257) somministra gli elementi necessari al taglio delle intaccature fatte nelle razze. Per tagliare quella, per esempio, della razza *X Y* (*Fig.* 258) corrispondente al punto *Y*, la quale vedesi disegnata nella *Fig.* 259, si tracceranno sulla faccia esterna *a b c* d'uno dei pezzi le due rette *m n*, *m, n*, parallele, aventi colla costola *a b* la inclinazione somministrata dalla indicata proiezione, e distanti fra loro e dalla costola *b c* delle quantità che la proiezione stessa determina.

Sulla faccia esterna *g h l* dell'altro pezzo si tireranno al

modo istesso altre due rette parallele, che serviranno a determinare sulla costola $g\,h$ i due punti p e p_1: quindi accoppiati esattamente i due pezzi si tracceranno sul piano delle facce superiori le rette $n\,p$, $n_1\,p_1$, e sul piano delle loro facce inferiori quelle corrispondenti ai punti m ed m_1. Allora con due linee $x\,y$, $x_1\,y_1$ parallele alla costola $g\,h$ e distanti fra loro della grossezza del puntone, sarà facile determinare l'ampiezza della intaccatura tanto sulle facce superiori che sulle inferiori dei due pezzi.

Le parti dell'arcone comprese fra due appoggi $V\,Z$, $V\,Z$ (*Fig.* 258) sono strette nel loro mezzo dai due ascialoni costituenti le razze $X\,V$, $X'\,V'$.... siccome viene indicato dalla *Fig.* 258 Le estremità di queste parti possono essere tagliate a dente per connettersi cogli appoggi $V\,Z$ nel modo che la *Fig* 260 dimostra. In questa medesima figura vedesi disegnato il dente tagliato nella estremità dell'appoggio $V\,Z$ destinato a connettere quest'ultimo col puntone $C\,D$ (*Fig.* 258)

I cuscinetti c, c sottoposti ai dossali e poco più lunghi della grossezza dell'arcone, sono formati di due parti poste a semplice contatto fra loro per mezzo d'una faccia inclinata alla loro testa. Le due parti insieme formano un parallelepipedo rettangolo, come può chiaramente dedursi dal loro disegno prospettico esibito nella *Fig* 261. La inclinazione data alle faccie di contatto facilita, a opera compita, la sottrazione dei cuscinetti, per la quale si ha l'abbassamento dei dossali sull'arcone. (N.° 682.)

Centina a poligoni

684. *Descrizione.* — Il celebre Perronet ha applicato con sì felice resultato queste centine nelle classiche sue costruzioni che tutti i costruttori ne denotano col di lui nome il sistema.

È questa centina costituita da una serie di poligoni, dei quali il primo è inscritto nella curva direttrice dell'intradosso, il secondo nel primo, il terzo nel secondo, e così di seguito. Delle staffe o razze normali alla curva e corrispondenti a punti equidistanti sopra di essa collegano i vertici e il mezzo dei lati di questi poligoni. La *Fig.* 262 è la proiezione verticale di una di

queste centine, costruita per una semiovale a tre centri. I pezzi *f, f, f*.... sono le curve per cui le centina viene ad avere il suo contorno identico al sesto della volta. I pezzi *a b*, a_1 b_1.. sono i lati del primo poligono; c *d*, c_1 d_1.... sono quelli del secondo co. infine *s a*, *s a*... sono le staffe, di cui le teste si trovano sulla superficie formata dalle facce superiori di tutti i dossali *t, t, t*... Gli estremi lati di tutti i poligoni sono incastrati a dente e mortisa in una piattaforma fissata nei piedritti ed opportunamente sostenuta.

685 *Forma* e *taglio dei pezzi*. Ad eccezione delle curve *f, f, f*... tutti gli altri pezzi della centina, hanno, come in quelle a catena, la forma parallelepipeda; e salvo le staffe *s s* e gli estremi lati dei poligoni, in nessuno degli altri lati è fatta veruna intaccatura, perchè le staffe sono sempre accoppiate e stringono contro le respettive mortise, come quelle *x y* delle centina a catena, i lati medesimi per mezzo di opportune chiavarde. La *Fig.* 263, che è il disegno prospettico d'una parte delle centina in questione, dimostra ad evidenza lo indicato collegamento.

Nella *Fig.* 264 si esibisce il disegno del due ascialoni costituenti una delle staffe. Le linee del taglio delle diverse intaccature si ottengono tracciando sulle due facce esteriori degli ascialoni quelle secondo cui le proiezioni verticali dei lati dei poligoni tagliano la proiezione verticale della staffa (*Fig.* 262), come vedesi nella faccia esteriore del pezzo *S S* (*Fig.* 264). Di poi si procede nel modo istesso stato già a sufficienza spiegato al N.° 683 pel taglio della intaccatura delle staffe *X Y* impiegato nelle centine a catena.

La *Fig.* 265 rappresenta la piattaforma con le sue mortise, e i denti degli estremi lati dei poligoni. Fa inoltre vedere che nei vertici dei poligoni sono questi lati tagliati secondo il piano che dividerebbe in due parti eguali la staffa secondo la sua lunghezza. Le facce così determinate stanno in semplice contatto, perchè viene a sufficienza assicurata la stabilità dei lati dalle tre staffe fra le quali sono chiusi.

Le curve *F F*... sono anche esse per tutta la loro grossezza strette fra i due pezzi di ciascheduna staffa, e le estremità loro stanno a semplice contatto nella mortisa corrispondente secondo lo indicato piano bisettore delle staffe medesime.

Solo nelle due infime curve è tagliato un dente in quella estremità che si connette colla piattaforma.

686. *Osservazione I.* Le centine a catena debbono avere la preferenza su quelle a poligoni tutte le volte in cui la lunghezza dei pezzi del legname disponibile è tale da permettere l'uso della catena e dei lunghi saettoni che la sorreggono. Imperocchè esse si trovano equilibrate a qualunque epoca della costruzione della volta se questa procede per eguali altezze da ambe le parti; mentre le centine a poligoni, per quanto saldo possano essere le connessioni dei loro pezzi, vanno soggette sempre a delle variazioni di forma dal momento che la volta comincia a premerle. Nondimeno, siccome il loro sistema concede l'uso di pezzi assai corti, esse possono essere molto vantaggiosamente impiegate nelle volte molto ampie, quando non si trascuri d'impedire i notati cambiamenti di forma con tutti i mezzi possibili.

687. *Osservazione II.* Allorchè però la distanza della volta dall'area sottoposta non è molto grande, ed altre circostanze locali non lo impediscano, si ha la maggiore stabilità e sicurezza come la maggiore economia possibile di legname, impiegando delle candele verticali a sostegno delle centine. Noi abbiamo tentato di dare una idea di questo sistema di centine nella *Fig.* 266, ove lo si vede applicato per l'armatura di un ponte di sesto acuto.

688. *Osservazione III.* La esecuzione accurata di qualunque opera di legname, ma particolarmente delle centine, esige un disegno delle sue proiezioni fatto alla grandezza naturale e colla maggior diligenza sopra una superficie bene spianata. In grazia di questo disegno sarà dato allora tracciare con tutta facilità le linee del taglio su ciascun pezzo, e verificarne volta per volta la esattezza. Così verrà fatto anche di evitare quelli errori che potrebbero avere per conseguenza una irreparabile perdita di alcuni pezzi di legname.

INDICE

DELLE

MATERIE CONTENUTE NELL'OPERA

LIBRO PRIMO.

OMBRE

CAPO I. Propagazione delle luce — Definizioni — Ombre pure e portate — Linee di separazione d'ombra e di luce — Linea d'ombra portata — Come si determinano le linee di separazione d'ombra e di luce — Principi relativi a queste linee — Come si determinano le linee d'ombra portata — Principi relativi a queste linee — Considerazioni generali intorno alla superficie sviluppabile formata dai raggi luminosi emanati da un corpo, o da un punto, o dal sole — *Tav. I. Fig.* 1 e 2 — *N.* 1 a 11 — *Pag.* 1 a 6.

CAPO II. Raggi luminosi paralleli — Metodi per costruire la linea di separazione d'ombra e di luce, e quella d'ombra portata — Osservazioni — *Ombre delle linee e delle figure piane* — Ombre di una retta sopra i piani coordinati, sopra un piano qualunque, sopra un piano ad essa perpendicolare e parallelo — Ombre di due o più rette parallele sopra un piano, e di una retta sopra due o più piani paralleli fra loro — Ombra di una retta sopra una superficie curva — Osservazioni — Ombra di una linea qualunque su qualsivoglia superficie — Osservazione — Ombre delle figure piane — *Tav. I Fig.* 3 a 5 — *N.* 12 a 23 — *Pag.* 6 a 10

CAPO III *Ombre di Poliedri* — Linea di separazione d'ombra e di luce sui poliedri — Mezzo per riconoscerla — *Problemi.* I. Ombre di un prisma retto sopra i piani coordinati — Casi particolari — Ombre di un punto sopra un poliedro — II. Ombre di una croce sopra un piano qualunque — Casi particolari — Seconda soluzione del problema — Osservazioni — III. Ombra di

una scala — IV Ombre di un fumaiolo sopra un tetto — Osservazione — *Tav. I, II. Fig.* 6 *a* 10 — *N.* 26 *a* 38 — *Pag.* 10 *a* 19

CAPO IV *Ombre dei cilindri e dei coni.* — Considerazioni intorno alla linea di separazione d'ombra e di luce — *Problemi.* I. Ombre di un cilindro circolare retto, e d'un cilindro qualunque — II. Ombre d'un cono circolare retto, e d'un cono qualunque — Ombre d'un punto sul cono — III. Ombre della superficie concava d'un cilindro — Osservazioni — IV Ombre della superficie concava d'un tronco di cono circolare retto — Osservazioni — V Ombre d'un solido composto dei cilindro e del cono *Tav. II* e *III. Fig* 11 *a* 16 — *N* 39 *a* 53 — *Pag* 19 *a* 30

CAPO V *Ombre della sfera* — Soluzione generale del Problema — *Problemi.* I. Ombre della superficie convessa della sfera — Ombra di un punto e d'una linea qualunque sulla sfera — II Ombre della calotta sferica — Osservazioni — III Ombre della mezza sferica — Osservazioni. — *Tav. III* e *IV. Fig.* 17 *a* 20 — *N* 54 *a* 62 — *Pag.* 30 *a* 38.

CAPO VI *Ombre delle superficie di rivoluzione* — Considerazioni sui processi grafici atti alla ricerca delle ombre — *Problema* Ombre del Toro — Osservazioni — *Tav. IV. Fig.* 21 — *N* 63 *a* 67 — *Pag.* 39 *a* 45

CAPO VII *Ombre delle superficie rigate* — Soluzione generale del Problema — Osservazioni — *Problema.* Ombre dell'Elicoide storta — *Tav. V. Fig* 22 — *N* 68 *a* 70 — *Pag* 46 *a* 51.

CAPO VIII *Considerazioni pratiche.* — Scelta della direzione dei raggi luminosi — Raggio luminoso avente le sue proiezioni inclinate di 45° sulle linea di terra — Utilità del suo impiego — Raggio luminoso inclinato di 45° sopra una delle proiezioni — Utilità del suo impiego — *Tav. V. Fig* 23 *a* 25 — *N* 71 *a* 76 — *Pag* 51 *a* 57.

CAPO IX *Esercizi pratici.* — Raggio luminoso prescelto — *Esercizi* I Ombre d'una cimasa — II Ombre della base del piedestro toscano — III Ombre del Frontespizio — IV Ombre d'una mensola — V. Ombre del cavetto — Osservazioni — VI Ombre del balaustro — VII Ombre della base attica — VIII Ombre del capitello dorico — Osservazioni — IX. Ombre del taglio verticale d'una cupola sferica aperta alla chiave — X Ombre d'una scanalatura di colonna — Osservazioni — XI. Ombre di arcate — XII Ombre della vite a verme triangolare — XIII. Ombre della vite a verme rettangolare — XIV Ombre della vite a verme rotondo — Osservazioni — XV. Ombre del taglio longitudinale d'una caldaia a vapore — Osservazione relativa all'ombra portata da una retta sopra un cilindro. *Tav. V, VI, VII, VIII Fig* 26 *a* 41 — *N.* 77 *a* 98 — *Pag* 57 *a* 81

CAPO X. *Raggi luminosi emanati da un punto* — Ricerca della linea di separazione d'ombra e di luce — Osservazioni — *Problema* Ombre di una sfera illuminata da un punto — *Tav. IX Fig* 42 — *N.* 99 *a* 101 — *Pag.* 81 *a* 85

CAPO XI. *Raggi luminosi emanati da uno o più corpi.* — Considerazioni generali — Processi grafici per determinare le ombre di un corpo opaco posto in presenza di un corpo luminoso — *Problema.* Ombre di una sfera illuminata da un triangolo — Uno o più corpi opachi in presenza di uno o più corpi luminosi — *Problema.* Ombre di una sfera illuminata da tre punti — *Tav. IX. Fig.* 48 — *N.* 102 *a* 107 — *Pag.* 86 *a* 92.

CAPO XII. *Teoria delle penombre.* — Definizioni — Penombre di un corpo cilindrico, di una sfera e d'un piano illuminati da una sfera — Osservazioni — Metodo generale per determinare i contorni delle penombre — Osservazioni — Penombre di più corpi opachi in presenza di più corpi luminosi — *Problema.* Penombre di una sfera illuminata da tre punti, o da un triangolo — Considerazioni generali sui mezzi che possono servire a produrre la immagine dei corpi — *Tav. IX. Fig.* 43 e 48 — *N.* 108 *a* 122 — *Pag.* 93 *a* 102.

LIBRO SECONDO.

PROSPETTIVA LINEARE.

CAPO I. *Definizioni e Principi generali.* — Come si spiega la visione dei corpi — Definizioni — Metodi generali per costruire la prospettiva lineare d'un oggetto, e quella delle sue ombre allorchè il quadro è qualunque, ovvero è piano — Prospettiva d'una curva e della sua tangente — Prospettiva d'una figura piana — Forme e posizione dei quadri piani — Prospettive particolari di alcune rette — *Problema.* Prospettiva d'una piramide — Osservazioni — Punto di concorso delle prospettive di più rette parallele — Linea d'orizzonte — Raggio principale — Punto principale — Osservazione. — *Tav. X. Fig.* 49 e 50 — *N.* 123 *a* 140 — *Pag.* 103 *a* 111.

CAPO II. *Metodo dei punti di concorso.* — Difficoltà che dà luogo l'uso del metodo generale per la costruzione della Prospettiva d'un oggetto complicato — Principio geometrico del Metodo dei punti di concorso — Utilità dello impiego delle rette inclinate di 45° al quadro — Punti di distanza — Prospettiva d'un punto qualunque dello spazio e d'una verticale — Osservazioni — Prospettiva d'una retta, d'un quadrilatero, d'un circolo e della sua tangente, allorchè si trovano sul piano orizzontale condotto per la base del quadro — Casi particolari — Prospettiva di una retta comunque inclinata al quadro e di una linea qualunque — Prospettiva della stessa piramide considerata nel Capo I — *Tav. X e XI. Fig.* 51 *a* 54 — *N.* 147 *a* 163 — *Pag.* 111 *a* 118.

CAPO III. *Delle Scale usate in prospettiva.* — Difficoltà pro-

prie dello impiego del metodo dei punti di concorso nella costruzione della prospettiva di oggetti complicati — Angolo ottico — Punto di fuga — Scala di fuga — Prospettiva di rette parallele o perpendicolari al quadro appartenenti alla proiezione orizzontale dell'oggetto — Scala di larghezza — Prospettiva di rette perpendicolari al quadro appartenenti alla proiezione verticale dell'oggetto — Scala d'altezza — Prospettiva dei piani coordinati a cui è riferito l'oggetto — Scale di questi piani — Prospettiva d'un punto qualunque dello spazio — Tutte le rette parallele alla base del quadro o ai bordi verticali di esso, comprese fra le prospettive di due rette orizzontali, sono prospettivamente eguali fra loro — Prospettiva della stessa Piramide considerata nei Capi I e II — Osservazioni — Inconvenienti che derivano dalla esecuzione di tutti i processi grafici entro i limiti del quadro — Mezzi di eliminare tali inconvenienti — *Tav. XI Fig.* 55 *a* 58 — *N.* 164 *a* 185 — *Pag.* 119 *a* 132.

CAPO IV. *Divisione delle linee e punti di concorso fuori del quadro* — Utilità dei Problemi particolari di Prospettiva per facilitare l'applicazione del metodo generale *Problemi.* I. Determinare sulla prospettiva d'una retta orizzontale, quelle di punti egualmente distanti fra loro — Applicazione — II. Determinare sulla prospettiva d'una retta orizzontale dei segmenti eguali ed equidistanti fra loro — Applicazione — III Data la prospettiva di una retta orizzontale il di cui punto di concorso non può trovarsi sul quadro, costruire la prospettiva d'una retta parallela ad essa che passi per la prospettiva data di un punto — IV. Data la prospettiva di una retta orizzontale il di cui punto di concorso non si trova sul quadro, costruire le prospettive di più rette parallele ad essa che passino per le prospettive date di altrettanti punti — Osservazione — V Data una retta comunque inclinata al quadro, trovare su questa il punto di concorso del sistema di rette parallele alla retta data — Osservazioni — VI. Data la prospettiva di una retta comunque inclinata al quadro, e di cui il punto di concorso non ha luogo su questo, trovare la prospettiva di una retta parallela ad essa che passi per la prospettiva data di un punto — Osservazioni — VII. Data la prospettiva d'un punto, costruire quella d'una retta inclinata di 45° al quadro condotta pel punto dato — Casi particolari ed Applicazioni di questo problema — *Tav. XII* e *XIII. Fig.* 59 *a* 70 — *N.* 186 *a* 208 — *Pag.* 132 *a* 144.

CAPO V. *Uso del quadrato avente i lati paralleli e perpendicolari al quadro.* — Casi nei quali può impiegarsi utilmente questo quadrato — *Problemi.* I. Data la prospettiva di un punto costruire quella d'una orizzontale che passa pel punto dato e fa un angolo qualunque col quadro — Casi particolari — II. Data la prospettiva d'una retta orizzontale, costruire quella d'una seconda orizzontale che incontra la prima facendo con essa un angolo qualunque — Casi particolari — III Data la prospettiva d'una retta orizzontale comunque inclinata al quadro, costruire sopra di essa quella d'un quadrato — IV Prospettiva dell'esagono regolare — Casi particolari — V. Prospettiva dell'ottagono regolare — Osservazioni — Applicazioni — VI Prospettiva del circolo — Os-

servazioni — VII. Prospettiva d'un circolo inscritto in un quadrato con avente i lati paralleli e perpendicolari al quadro — Osservazioni — Applicazioni — *Tav. XIII e XIV. Fig.* 71 a 81 — *N.* 200. *a* 234 — *Pag.* 145 *a* 157.

CAPO VI. *Prospettive di fronte e Prospettive oblique.* — Definizioni — Scala per le prospettive di fronte — Suo impiego e confronto del metodo che ne deriva con quello generale — *Problemi.* I. Prospettiva di fronte d'una porta rettangolare praticata in un muro verticale — Osservazioni — Casi particolari — II. Prospettiva obliqua della medesima porta — III e IV. Prospettiva di fronte di due scale, di cui l'una ha i gradini paralleli e l'altra li ha perpendicolari al quadro — V. Prospettiva obliqua di una scala — Casi particolari — VI. Prospettiva di fronte di un arco praticato in un muro verticale — Osservazioni e casi particolari — VII. Prospettiva obliqua di una o più arcate aperte in un muro verticale — Osservazioni e casi particolari — VIII. Prospettiva di una serie di arcate circolari parallele ed aventi il loro centro sopra una medesima retta perpendicolare al quadro — Casi particolari — IX. Prospettiva di una volta a crociera — Osservazioni e casi particolari — X. Prospettiva di una volta a schifo — Osservazioni e casi particolari — XI. Prospettiva di una lunetta circolare aperta in una volta a botte — Osservazioni e casi particolari — Considerazioni relative alle volte di specie diversa da quelle contemplate — XII. Prospettiva di fronte delle cornici — Osservazioni — XIII. Prospettiva obliqua d'un frontespizio — Osservazioni e casi particolari — XIV. Prospettiva delle superficie di rivoluzione — Osservazione — XV, XVI, XVII. Prospettive dei capitelli toscano, ionico e corintio — XVIII. Prospettiva della sfera — *Tav. XV, XVI, XVII. Fig.* 82 *a* 99 — *N.* 232 *a* 280 — *Pag.* 158 *a* 200

CAPO VII. *Prospettiva dei monumenti.* — Delle cause che modificano i resultati dei Disegni prospettici — La posizione del punto di vista è una delle più influenti — Relazione fra la distanza del punto di vista dall'oggetto, l'altezza e l'estensione orizzontale di quest'ultimo — Posizione del punto di vista rispetto all'oggetto, e sua altezza sul piano di esso — Posizione del quadro fra il punto di vista e l'oggetto, e sua inclinazione sul piano verticale che divide in due parti eguali l'oggetto medesimo, o su quello diretto dal punto di vista al punto più rimarchevole di esso — Prospettive curiose — Cautele da aversi nella scelta della definitiva posizione del quadro — Applicazione delle regole precedenti alla costruzione della Prospettiva della Metropolitana di Firenze — Osservazioni — *Tav. XVIII, XIX, XX. Fig.* 100 *a* 106 — *N.* 290 *a* 308 — *Pag.* 200 *a* 214.

CAPO VIII. *Prospettiva degli oggetti molto lontani dal punto di vista.* — Relazione fra l'altezza prospettica d'una figura orizzontale, e la sua distanza dal punto di vista — Metodo proposto da Adhemar per evitare la inconvenienza delle piccole altezze prospettiche delle figure orizzontali molto distanti dal punto di vista — Applicazione di questo metodo nella prospettiva di un monumento rettangolare — Superficie prismatica sostituita al piano

orizzontale che passa per la base del quadro — Confutazioni delle obiezioni che possono farsi all'uso di questa superficie — Impiego e costruzione dei quadrati per la prospettiva delle linee curve e dei dettagli dell'oggetto — *Tav. XXI. Fig.* 107 *a* 114 — *N.* 309 *a* 322 — *Pag.* 214 *a* 225

CAPO IX. *Delle Prospettive eseguite sopra un quadro qualunque* — Problema generale da risolversi nel caso di un quadro qualunque — Mezzi di soluzione — Casi nei quali può questa rendersi più semplice — *Problema.* Prospettiva di una piramide sopra una superficie cilindrica — Teoria della prospettiva lineare del Panorama — Scelta della miglior superficie del quadro, quando essa *una* può essere piana — Confronto fra il quadro sferico e quello cilindrico — Perchè nel Panorama si preferisce il cilindrico — *Tav. XXII. Fig.* 115 *e* 116. — *N.* 323 *a* 335. — *Pag.* 226 *a* 234

CAPO X. *Delle ombre nella Prospettiva dei Corpi.* — Luce proveniente dal sole — Le ombre d'un oggetto possono trovarsi quando è data quella d'un punto — Posizione del sole rispetto all'osservatore — Ombre dell'oggetto, dato il punto di concorso dei raggi luminosi — Applicazione — Prospettiva del centro del sole — *Problema.* Trovare le ombre d'una fascia — Del caso in cui la direzione dei raggi luminosi è data per mezzo delle proiezioni — Del caso in cui il punto di concorso si trova fuori dei limiti del quadro — Metodo per determinare alcune masse d'ombre indipendentemente dal punto di concorso dei raggi luminosi, *cioè* le proiezioni delle loro direzione — Applicazione di questo metodo — Del caso in cui il quadro non è piano, o essendo piano *non* è verticale — Luce emanata da un corpo luminoso qualunque — *Tav. XXII, XXIII. Fig.* 117 *a* 127. — *N.* 336 *a* 348. — *Pag.* 234 *a* 240.

LIBRO TERZO.

PROSPETTIVA AEREA

CAPO I. *Nozioni generali.* — Definizione — Disseminazione e riflessione della luce — Analogia fra la disseminazione e la riflessione — Punti brillanti, linee ed immagini brillanti sulle superficie dei corpi — *N.* 349 *a* 355. — *Pag.* 241 *a* 244.

CAPO II. *Teorie dei punti brillanti.* Convenienza di riguardare le linee come piccole superficie sviluppi della sfera — Problema generale da risolversi per la ricerca dei punti brillanti sulle linee — *Punti brillanti della linea retta.* I. Quando il punto luminoso e il punto di vista sono a distanza finita — II. Quando il punto luminoso è all'infinito e il punto di vista a distanza finita — III. Quando il punto luminoso è a distanza finita, e il punto di vista all'infinito — IV. Quando ambedue i punti sono all'in-

finito — Osservazioni e casi particolari — *Punti brillanti delle linee curve.* I. Quando il punto luminoso e il punto di vista, o almeno uno di essi si trovano a distanza finita dalla linea data — Soluzione col metodo delle tangenti, e con quello delle normali — II. Quando la linea essendo piana, non trovasi sul suo piano o il punto luminoso, o il punto di vista, o nessuno di essi — Uso delle secante dei raggi luminosi, e di quelle dei raggi visuali — Osservazione — III Quando il punto luminoso e il punto di vista sono ambedue all'infinito — *Punti brillanti delle superficie.* I. Quando il punto luminoso e il punto di vista, o almeno uno di essi si trovano a distanza finita — Soluzione del Problema per le superficie sviluppabili, per quelle di rivoluzione, e per le anulari — II Quando il punto luminoso e quello di vista sono all'infinito — Soluzione del Problema per le superficie piane, sviluppabili, e di rivoluzione — *Tav. XXIV. Fig.* 128 *a* 135 — *N.* 356 *a* 380. — *Pag.* 244 *a* 256.

CAPO III. *Costruzione dei punti brillanti delle linee e delle superficie — Problemi.* I Punti brillanti di un circolo illuminato dal sole e veduto da una distanza finita — Osservazione — II. Punti brillanti di un arco d'Elice illuminato dal sole e veduto da una distanza infinita dal coordinato verticale — III, IV, V, VI. Punti brillanti d'un cilindro e d'un cono, della sfera, e del toro illuminati dal sole, nel caso in cui il punto di vista è ad una distanza finita o infinita — Osservazioni — V. Punti brillanti d'una vite illuminata dal sole, essendo il punto di vista ad una distanza infinita da uno dei piani coordinati — Osservazioni — *Tav. XXIV e XXV. Fig.* 136 *a* 144. — *N.* 381 *a* 398. — *Pag.* 257 *a* 272.

CAPO IV. *Dei luoghi di maggior chiarezza sulle parti illuminate delle superficie dei corpi.* Le superficie non piane sono prive di punti brillanti, ma le alcuni punti delle loro parti illuminate presentano una maggiore chiarezza che negli altri — Cause che contribuiscono a far variare il grado di chiarezza delle parti illuminate — Angolo dei raggi visuale e riflesso, e sua costruzione — Relazione fra la quantità di luce ricevuta da una faccia piana e il seno dell'angolo da questa fatto con la direzione della luce medesima — Relazione fra la intensità della luce e la distanza dei corpi che la ricevono — Come le ombre modificano la luce sulla superficie dei corpi — Principi generali che servono di base alle regole dell'acquarello relative alle parti illuminate dei corpi — Applicazione — *Tav. XXVI. Fig.* 145 *a* 149. — *N.* 399 *a* 408. — *Pag.* 273 *a* 282

CAPO V. *Della luce aerea e dei riflessi.* Utilità dei resultati che si hanno dalla Teoria delle Ombre — L'aria modifica la direzione dei raggi luminosi — Della luce aerea o atmosferica — Essa modifica le ombre dei corpi — Riflessione della luce solare prodotta dalle molecole dell'aria — Direzione del raggio riflesso di massima intensità — Alterazione della luce aerea riflessa e sue cause — Direzione del massimo di intensità di luce aerea ricevuta da un punto materiale considerato al centro d'una sfera, o situato sul piano dell'orizzonte — Osservazioni — I raggi di luce aerea ricevuti da un punto del globo terrestre presentano due mas-

simi e due minimi d'intensità — Raggio atmosferico principale — Influenza della luce aerea sulla direzione di questo raggio a seconda delle direzioni diverse che può avere il raggio solare — Il raggio atmosferico principale serve a determinare sulle parti ombrate dei corpi i punti e le linee di minore intensità d'ombra — Cause che modificano gli effetti della luce aerea sulle ombre dei corpi — Principi generali che servono di base alle regole dell'acquarello relative alle parti ombrate dei corpi — Riflessi dei corpi vicini — Direzione e cause che modificano la intensità dei raggi riflessi d'un corpo — Applicazioni — Considerazioni generali intorno agli effetti apparenti dei corpi — *Tav. XXVI. Fig.* 150 *a* 155 — *N.* 409 *a* 437 — *Pag.* 282 *a* 298.

CAPO VI. *Regole dell'acquarello.* — Dei disegni all'acquarello — Cause delle apparenze dei corpi — Effetti dei riflessi considerati nei punti e nelle linee brillanti delle superficie pulite, nei punti e nelle linee di maggior chiarezza di quelle non pulite — Cause che servono a fare apprezzare la distanza scambievole delle parti d'un corpo, o di più corpi — Effetti delle ombre sulle parti illuminate degli oggetti — Effetti della irradiazione della luce sulle medesime parti — Del contrasto e suoi effetti — Regole principali dell'acquarello a chiaro scuro — *Tav. XXVI Fig.* 156 — *N.* 438 *a* 470 — *Pag.* 298 *a* 308

LIBRO QUARTO.

TAGLIO DELLE PIETRE

CAPO I. *Nozioni generali.* Considerazioni generali sulle opere in pietra da taglio — Problemi cui dà luogo la scienza del Taglio delle pietre — Principi generali per l'apparecchio di un'opera qualunque — Definizioni — Principi generali relativi alla economia, alla posa delle pietre e alla stabilità dell'opera — *N.* 471 *a* 490 — *Pag.* 309 *a* 316

CAPO II. *Del Tracciamento delle Opere e del Taglio.* — Strumenti e modelli usati per tracciare le opere in pietra da taglio — Taglio di una faccia piana, di una faccia piana a squadra con un altra; taglio di un parallelepipedo — Taglio per squadramento, taglio per profili — Taglio dell'ottaedro regolare per squadramento — Osservazioni — Taglio dell'ottaedro regolare per profili — Osservazioni — Confronto fra i due indicati metodi di taglio — In quali casi conviene l'uso di entrambi — Superficie da cui deve cominciare il taglio di una pietra qualunque — *Tav XXVII Fig.* 157 *a* 167 — *N.* 491 *a* 507 — *Pag.* 316 *a* 325.

CAPO III. *Dei Muri.* — Definizioni — Classazione dei muri in semplici e composti — Apparecchio, forma, e taglio dei conci per

muri semplici retti a paramento piano e a paramento curvo — Apparecchio ordinario e a faccette, forma e taglio dei conci pei muri semplici a scarpa — Diverse specie di muri composti — *Problemi* I. Incontro di due muri retti facenti fra loro un angolo di 90° — II. Incontro di due muri retti facenti fra loro un angolo qualunque — III. Incontro di due muri a scarpa egualmente inclinati — IV. Incontro di due muri a scarpa d'inclinazione diversa — V. Incontro di un muro a scarpa con un muro retto — VI. Accordare due muri a scarpa con un terzo muro a paramento cilindrico — VII. Accordare due muri a scarpa con un terzo muro a paramento storto — Osservazione — Considerazioni intorno alla regolarità dell'apparecchio, e al taglio dei letti avuto riguardo alle economie e alle grandi pressioni a cui le pietre possono trovarsi sottoposte — Considerazioni e regole relative alla posa dei conci nelle diverse specie di muri — *Tav. XXVII* e *XXVIII. Fig.* 108 a 183 — *N.* 508 a 533 — *Pag.* 325 a 340.

CAPO IV. *Nozioni generali intorno alle volte in pietra da taglio.* — Definizioni — Classazione delle volte — Considerazioni intorno alla posa dei cunei — Norme per l'apparecchio dei cunei d'una volta — Osservazione intorno alla estensione delle superficie di giacitura e alla loro forma, avuto riguardo alla stabilità dell'opera — Apparecchio delle fronti, avuto riguardo alla natura del paramento del muro di cui fanno parte — Modo di valutare l'arco che è curva direttrice dell'intradosso, avuto riguardo alla spessezza delle giunture — Ordine delle operazioni per ogni volta geometricamente definita — *Tav. XXVIII. Fig.* 184 a 189 — *N.* 534 a 549 — *Pag.* 340. a 352

CAPO V. *Piattabande.* — In quali casi occorre lo impiego delle volte in piattabande — Norme per l'apparecchio di questa specie di volte — *Problemi.* I. Apparecchio, forma e taglio dei cunei per una piattabanda retta in un muro a paramento piano verticale — II. Apparecchio, forma e taglio dei cunei per una piattabanda obliqua in un muro a scarpa — III. Apparecchio, forma e taglio dei cunei per una piattabanda in un muro retto a paramenti circolari — Avvertenze relative alla posa dei cunei nelle piattabande. — *Tav. XXVIII. Fig.* 190 a 196 — *N.* 550 a 559 — *Pag.* 352 a 364.

CAPO VI. *Delle volte a intradosso cilindrico e storto.* — Il problema generale dell'apparecchio delle volte consta di due parti — Cinque specie di volte a intradosso cilindrico o a botte — *Problemi.* I. Apparecchio, forma e taglio dei cunei per una botte retta — II. Apparecchio, forma e taglio dei cunei per una botte a sbieco e a scarpa — Caso particolare — III. Apparecchio, forma e taglio dei cunei per una botte obliqua — Delle volte di grande obliquità — Primi tentativi dei Geometri per evitare la spinta a vuoto nelle volte oblique apparecchiate col metodo ordinario — Osservazioni — IV. Apparecchio, forma e taglio dei cunei per una volta obliqua a intradosso storto — Osservazioni — V. Apparecchio, forma e taglio dei cunei per una porta circolare coperta da una volta a intradosso storto — Casi particolari — *Tav. XXIX. Fig.* 197 a 205 — *N.* 560 a 577 — *Pag.* 364 a 384.

CAPO VII. *Dell' apparecchio elicoidale impiegato nella costruzione dei Ponti obliqui.* — Questo apparecchio concede lo impiego di piccoli materiali di forma parallepipeda — Linee di apparecchio e loro proiezioni — Le superficie di giacitura sono altrettante Elicoidi storte a piano direttore — Studio degli spigoli di testa provenienti dalle intersezioni delle superficie di giacitura coi piani delle fronti — Apparecchio delle fronti — Forma e taglio dei cunei — Osservazioni — Considerazioni relative alle forze generate dalle scambievoli pressioni agenti sui letti di giacitura — Impiego di cunei a giuntura piana per le fronti — Forma e taglio di questi cunei — Uso del corno di vacca — Lo intradosso a direttrice circolare non è il solo adottabile per le volte oblique — *Tav. XXX. Fig.* 206 *a* 217 — *N.* 578 *a* 595 — *Pag.* 384 *a* 404.

LIBRO QUINTO.

TAGLIO DEL LEGNAME

CAPO I. *Nozioni generali* — Definizioni — Considerazioni generali intorno alla differenza che passa fra il modo d'agire dei pezzi nelle opere in pietra da taglio e quello dei pezzi in un opera di legname — Delle connessioni praticate nei pezzi d'un opera di legname — Avvertenze relative — Ogni opera di legname ha un tipo particolare dal quale deriva, e la cui forma è determinata dall'ufficio a cui è destinata. — *N.* 596 *a* 602 — *Pag.* 405 *a* 407.

CAPO II. *Delle Intaccature* — Oggetto delle intaccature, e loro classazione — *Connessioni di due pezzi a squadra* — I. Intaccatura a dente e mortisa — Osservazioni — II. Intaccatura a mezza grossezza o a metà legno — Osservazioni — III. Intaccatura a coda di rondine — Osservazione — IV. Intaccatura a mezza coda di rondine nascosta — Forma e taglio di essa — V. Intaccatura angolare a dente e mortisa — Forma e taglio di esso — VI. Intaccatura marginale a doppia coda di rondine — VII. Intaccatura marginale a doppia coda di rondine nascosta — *Connessioni di due pezzi facenti fra loro un angolo qualunque* — I. Intaccatura a mezza grossezza con dente nascosto — Osservazioni — II. Intaccatura marginale a semplice dente cuneiforme — Osservazioni — III. Intaccatura marginale a semplice dente cuneiforme nascosto — IV. Intaccatura marginale con dente cuneiforme e doppio dente in squadro nascosti — *Connessioni di due pezzi collocati sul prolungamento l'uno dell'altro* — I. Intaccatura a doppia coda di rondine — Forma e taglio di esso — II. Intaccatura a zigzag dritto con maschio scioltо — III. Intaccatura a zigzag cuneiforme con maschio scioltо e dente nascosto — Osservazione — IV. Intaccatura capriolata — V. Intaccatura cru-

ciforme — Osservazioni — Metodi impiegati nel disegno prospettico delle intaccature — *Tav. XXXI. Fig.* 218 a 233 — *N.* 603 *a* 632 — *Pag* 408 *a* 418.

CAPO III. *Principi generali per la composizione delle Opere di legname.* — Dei membri di resistenza, di concatenazione, e completivi — Condizioni di stabilità per un sistema qualunque di legname — Collocamento dei membri — Influenza delle intaccature sulla stabilità del sistema — Uffici dei membri di concatenazione — Ascoloni — Decomposizione delle figure in triangoli — Sua importanza rispetto alla stabilità — *Comparizioni di travi* — I. Trave formata di due pezzi sovrapposti per aumentare il lato della sezione parallelo alla direzione della forza — Osservazioni — II. Trave formata di tre pezzi adiacenti per aumentare il lato della sezione perpendicolare alla direzione della forza — III. Trave formata di due pezzi laterali con puntoni nascosti — Osservazioni — *Tav. XXXII. Fig.* 234 a 239 — *N.* 633 *a* 645 — *Pag.* 418 *a* 424.

CAPO IV. *Armature dei Solai e dei Tetti.* — Definizioni — Descrizione dell' armatura d'un solaio — Casi particolari — Intaccature usate nei pezzi del sistema — Descrizione dell' armatura d'un tetto — Specie diverse dei tetti — Cavalletti e loro forma — Forze agenti sopra di essi — Composizione dei cavalletti usati nei tetti a due falde per le distanze non maggiori di 6m, 50, e per quelle compresse fra 6m 50 e 13m — Tipo dei cavalletti per distanze maggiori — Modificazioni introdotte — Composizione dei semicavalletti pei coperti ad una falda — Orditura dei tetti a padiglione sopra un' area rettangolare, e sopra un area trapezia — Studio dei tetti a quattro falde. — *Tav. XXXII e XXXIII. Fig.* 240 *a* 247 — *N.* 646 a 662 — *Pag.* 424 *a* 432.

CAPO V. *Padiglione obliquo* — Descrizione della piattaforma e sua proiezione orizzontale — Composizione dei cavalletti e semicavalletti del padiglione — Modo di costruirne le proiezioni — Processi grafici diretti a determinare la forma dei diversi pezzi dell' opera, e le linee necessarie pel taglio di essi — *Tav. XXXIII. Fig.* 248 *a* 254 — *N.* 663 a 673 — *Pag.* 432 *a* 439.

CAPO VI. *Armature delle Volte e particolarmente dei Ponti di struttura murale* — Oggetto e parti principali d'ogni armatura di volta — Centine e loro disposizione — Manto della volta — Composizione delle centine per le volte di leggera struttura, e per quelle di pesante struttura nel caso in cui la corda sia piccola — Descrizione della centina e catene per le volte di pesante struttura di gran corda, secondo il sistema di Pitot — Forma e taglio dei pezzi costituenti questa centina — Descrizione della centina a poligoni secondo il sistema di Perronet — Forma e taglio dei pezzi costituenti questa centina — Osservazioni — *Tav. XXXIV Fig.* 255 *a* 266 — *N.* 674 *a* 688 — *Pag.* 440 *a* 448.

ERRATA-CORRIGE

Pag.	Ver.		Leggi
4,	7 -	dal punto di contatto b possa condursi infinito	possa dal punto di contatto b condursi un infinito
»	23 -	$M\ N\ R$	$N\ M\ R$
6,	21 -	raggi lumionsi	raggi luminosi
7,	37 -	(A, A'); (B, B')	(A, A'), (B, B')
8,	39 -	che rimane	e che rimane
12,	6 -	orizzantale	orizzontale
14,	31 -	esatezza	esattezza
15,	29 -	dal punto (o, e');	dal punto corrispondente ad (o, e');
»	31 -	il punto o''	il punto O''
17,	14 -	i due punti a_1 e b_3	i due punti a e b_3
»	35 -	il punto γ'_1, colla	il punto γ'_1 colla
19,	21 -	alla superficie	alla superficie
20,	38 -	i punti a' e b	i punti a e b
23,	23 -	$(V\ M, V'\ M'')$	$(V\ M, V'\ M')$
24,	11 -	$(A\ A'', a'\ A'')$	$(A\ A'', a'\ A')$
»	34 -	del punto (c_1, e')	dal punto (c_1, e')
26,	24 -	$F'\ f'$	$F'\ h'$
27,	9 -	del tronco.	del tronco (N.° 25).
»	32 -	$b'^2_1\ (a^2 - x^2_1)$	$b^2_1\ (a^2 - x^2_1)$
28,	1 -	(s, s')	(S, S')
»	25 -	e determinarsi	a determinarsi
»	38 -	(α, f') del punto (s, s') colla retta $s'\ f'$	(α, s') del punto (s, s') colla retta $s'\ t'$
29,	9 -	$\alpha, \beta, \alpha, \beta_1$	$\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$

Pag	Ver.		Leggi
29,	9	- punti	punti
»	23	- z'' quella dello zoccolo z', e la	z'', quella dello zoccolo z' e le
30,	5	- A'_1 δ'	A'', δ''
31,	11	- (c s, c' t')	(c t, c' s')
32,	25	- (m'', M'')	(m'', M')
»	36	- somministreranno	somministreranno
33,	8	- orizzonatale	orizzontale
»	10	- c p_1 = v p	C p_1 = v p
»	13	- P P_1 = Q P'	P_1 P_1 = Q P'
34,	9	- (a_1 a')	(a, a')
»	13	- il punto a_1	il panto a_1
»	27	- delle linee	della linea
35,	6	- la o$_1$ o$_1$	la o, a_1
»	32	- sulla base	alla base
37,	2	- o$_1$ o'' = F F_1 . . . . . o'' G'' = F' G'	o, O'' = F F_1 . . . . . O'' G'' = F'' G'
»	6	- la o'' h'' sarà	la O'' h'' sarà
»	11	- la parte o'' m'_1 g'	la parte O' m'_1 g'
40,	34	- la posiziona	la proiezione
41,	27	- ad O' ρ'	ad O' ρ'_2
»	35	- ε' γ'_1, ε'_1 ε'_1	ε' γ'_1 ε'_1 γ'_1
42,	6	- (φ, φ'_1)	(φ_1, φ')
43,	2	- punti, con	punti; lo che produrrà
»	37	- la linea q'' o'' p''	la linea q'' o''' p''
44,	13	- ζ ζ z''	ζ ζ_1 z''
»	19	- curve τ r m o n π_1 τ_1,	curve τ γ m o n π_1 τ_1
48,	36	- la quale	che
50,	28	- (a, a'')	(a_1, a''_1)
51,	8	- la linea a'' d' e' f'	la linea a''_1 d' e' f'
»	21	- γ δ, A δ, γ, β, α, a_2 a	γ δ A δ, γ, β, α, a_2 α
52,	32	- in natura	in natura
54,	18	- (a c, a' a_1)	(a c, a' a'_1)
60,	13	- a' i' a'	b' i' a'
61,	3 e 4	- da questa retta	da queste rette
»	7	- i vertici a_1, t_1, g_1, h_1	i vertici a_1, f_1, g_1, h_1
64,	11	- e col raggio v_1 b	e col raggio v_1 b'.
»	22	- questa retta riscontra	questa retta incontra
66,	33	- parallelo massimo t', t''	parallelo massimo t' t''

Pag	Par.		Leggi
66,	36	- meriano	meridiano
67,	12	- $r' q' i'$ . . . . punto i'	$r' q' i''$ . . . . punto i''
69,	6	- $d' x' c'$	$d' x' e'$
70,	1	- semirconferenza	semicirconferenza
»	7	- $b' a'_1 m$	$b' a'_1 m'$
»	13	- linea di seperazione	linea di separazione
»	16	- $n' a_1$ contato da n_2 in n_2	$n' a'_1$ contato da n_2 in n'_2
»	25	- secanle $r' o' s'$	$r' o' r''$
71,	8	- linea $(a\ \alpha\ a_1, a'\ a'_1)$	linea $(a\ \alpha\ a_1, a'\ a'_1)$
72,	26	- di due punti e', f'	di due punti e', f''
»	38	- delle scanalatura	della scanalatura
77,	21	- di contatto m	di contatto m'
80,	10	- punto (E_1, E')	punto (E'_1, E')
82,	23	- Descittiva per	Descrittiva per
83,	19	- preceedenti	precedenti
84,	11	- tangenti $P_1 a'_1, P'_1 b'_1$	tangenti $P'_1 a'_1, P'_1 b'_1$
»	21	- ausiliarie $P'_1 a'_1, P'_1 b_1$	ausiliarie $P'_1 a'_1, P'_1 b'_1$
85,	1	- $e' b' n' d' f' c' i' a' g$	$e' b' n' d' f' c' i' a' g'$
»	13	- in (q'_1, q'_2)	in (q_1, q'_1)
86,	11	- ricuoperti	ricuoperte
90,	1	- parallelamente al piano	parallelamente al coordinato
92,	22	- $(k\ f\ l, k'\ f'\ l')(l\ g\ i_1$	$(k\ f\ l, k'\ f'\ l'), (l\ g\ i_1$
94,	13	- $n\ p$ del primo	$n\ O$ del primo
»	16	- piano $Q\ q\ d$	piano $Q\ q\ D$
»	28	- e del piano	e a quelli del piano
98,	8	- penombra	penombra
105,	27	- è intersecato, il quadro	è intersecato il quadro
107,	31	- il punto (S, S')	il punto (S_1, S'_1)
»	34	- le prospettive (D_1, D'_1)	le prospettive (D_1, d'_1)
108,	10	- la posizione B''_2, b''_2,	la proiezione B''_2, b'_2,
»	20	- costola $(A\ B, A''\ B'')$	costola $(A\ B, A''\ B'')$
110,	38	- col medsimo	col medesimo
111,	27	- dimenisone	dimensione
113,	20	- l' assegnazione dei dati	l' assegnazione di questi dati
»	34	- ciccome	siccome
114,	18	- prospettive $c'_1 d$ o $c'_1\ d'_1$	prospettive $c'\ d$ o $c'_1\ d$,
116,	35	- di nn ijunto	di un punto
119,	32	- Sia $x\ y$ la	Sia $x\ y$, (Fig. 55), la
123,	6	- vicini a P_1	vicini a P

Pag	Ver		Leggi
124,	17 -	scala di lunghezza	scala di larghezza
»	21 -	della quantità $a\ A$	della quantità $a\ A'$
125,	26 -	di $O\ H$	di $O\ H_1$
126,	10 -	su quello	su quella
»	30 -	di a_1 e d_2	di a_1 e d_1
127,	34 -	ad $X\ F$, condotte	ad $X\ F$ condotte
131,	10 -	parellela ad $o\ X''_1$	parellela ad $o'\ X'_1$
»	14 -	$s\ d'\ d''$ si troverà	$s\ d'\ d'$, il punto c'' si troverà
132,	14 -	incotrata	incontrata
134,	18 -	coi diversi	coi diversi
135,	16 -	i punti r' ed r'' con c_1	i punti r' ed r'' con c_1,
»	37 -	su quest' ultimo	su quest' ultima
136,	23 -	sulle linee	sulla linea
137,	26 -	come segue	come segue *Fig.* 63
139,	13 -	*trovare su questo*	*trovare sul piano di questo*
141,	6 -	*quest' ultimo*	*quest' ultima*
142,	25 -	simili $n\ f\ n'$, $n\ F\ P$	simili $n\ f\ n'$, $n'\ F\ P$
144,	10 e 11 -	a con P ed f con F	f con P ed a con F
147,	12 -	la retta a, e b_1	la retta a_1 e, b_1
»	20 -	del vertice c.	del vertice c_1.
153,	6 -	le rette b, P, s_1 P	le rette b_1 P, s_1 P
154,	8 -	segmenti $q'\ s_1$, s_2 e,	segmenti $q'\ s_1$, s_1 e,
156,	35 -	quadrati	quadrenti
161,	7 -	tracciarsi sul piano	tracciarsi sopra un piano parellelo al piano
»	17 -	sul piano e $g\ h$	sul piano parellelo ad e $g\ h$
163,	7 -	della quantità $X_2\ Y_2$	della quantità $X\ X_2$
»	20 -	retta $c_2\ d'_1$	retta $c_1\ d_1$
163,	22 -	verticale $d_2\ d''_2$	verticale $d'_2\ d''_1$
»	24 -	le prospettive	la prospettiva
168.	6 e 7 -	le prospettiva	la prospettiva
»	11 -	e la $E\ P$	e la $E_1\ P$
»	23 -	a $p\ q\ r\ o$	a $p\ q\ n\ o$
»	25 -	le parti D_1 r,	la parti $D_1\ r'$;
»	39 -	punti n_1, q_1	punti n'_1, q'_1
171,	12 -	al quadro	al quadro condotto per g_1
174,	33 -	raggio e f	raggio $g\ f$
175,	6 -	la figura $a_2\ c_2\ x_2\ t_2\ g_2$	la figura $a'_2\ c_2\ x_2\ t_2\ g_2$
»	19 -	di questa	di queste

Digitized by Google

Pag.	Ver.		Leggi
183,	13 e 14 -	la verticale c''_1, n''	la verticale c''_1 n''
185,	19 -	superficie avente	superficie cilindrica avente
186,	22 -	la retta P u	la retta P u_1
»	38 -	la tangente t'_1 t.	la tangente t'_1 t'.
187,	1 -	spigolo, cercato	spigolo cercato,
194,	39 -	sopra X' Y'	sopra X' Z'
200,	2 -	d h l_1 h_1	d h d_1 h_1
»	36 -	verrà acquistare	verrà ad acquistare
207,	21 -	la proiezione	la posizione
211,	33 -	fabbricati circoscritti	fabbricati vicini
215,	23 -	della figura della	della figura dalla
»	24 -	la metà di	la lunghezza
216,	3 -	alla retta X_1 Y_1	alla retta X'_1 Y'_1
»	4 -	corrispondente ad (o, o_1)	corrispondente ad (o, o')
220,	11 -	la orizzontale f_1 f'	la orizzontale f'_1 f'
»	34 -	il punto m''	il punto m''_1
239,	6 -	il punto n''	il punto n'''
»	9 -	in cui n' n''	in cui n' n'''_1
»	15 -	la e' n'''	la o' n'''
»	39 -	n''_1	n'''_1
247,	33 -	(*Fig* 129)	*Fig.* (130)
249,	12 -	tirata l v_1	tirata l_1 v
»	17 -	con a L'	con O L'
250,	33 -	dal contatto	dal contatto
255,	15 -	delle	della
264,	3 -	lunghezza o' s'	lunghezza o' s'_1
»	37 -	si tirerà t u	si tirerà t n
265,	3 -	tangente t u	tangente t n
266,	4 -	le V_1 u	la V_1 u
»	7 -	linea V_1 x y a z w	linea V_1 x y_1 z_1 w
»	22 e *seguenti*:	*leggi* e invece di C, w invece di s, r invece di p	
»	29 -	raggio visuale	raggio luminoso
»	31 -	La normale C u_1	La normale C n_1
267,	31 -	semicircolo a b e d	semicircolo b c d
»	34 -	a b o d	b c d
269,	19 -	in $(B_1 B')$, (B, B'')	in (B, B'), (B_1, B'_1)
»	24 -	Talchè B', B'',	Talchè B', B'_1,
270,	20 -	all' angolo b'_1 a' o'	all' angolo b'_1 a' o'

Pag	Ver.		Leggi
271,	29	- il punto z	il punto Z
»	32	- punto cercato z'	punto cercato z'_1
»	38	- orizzontale $d\ z\ Z$	orizzontale $d\ z\ Z'$
274,	1	- quelli	quelle
277,	11	- $x =$ sen L	$x =$ sen a
280,	36	- le rette $L\ R$	le rette $L\ r$
»	39	- verticali $L'\ R'$	verticali $L'\ r'$
284,	1	- le estremità R'	le estremità r'
295,	38	- limiti di 30 e di 160	limiti di 30° e di 160°
296,	39	- facce $b\ c$, $c\ d$, $d\ c$	facce $A\ D$, $D\ C$, $B\ C$
301,	12	- muro $A\ D$, di	muro $A\ D$ (*Fig.* 156), di
319,	9	- alla costola $a\ c$, e in seguito colle due direttrici $d\ b$	alla costola $a\ c$ sul piano $a\ g\ h\ c$, e sull'opposto $d\ e\ f\ b$ una intaccatura $b\ f$ perpendicolare a $b\ d$: in seguito colle direttrici $b\ f$
»	29	- Si tirerà la $c'\ h'$	Si tirerà la $e'\ h'$
320,	20	- ordinariamente quadrato	ordinariamente terminato da facce a squadra
322,	25	- triangolo $A\ M\ N$	triangolo $a\ m\ n$
329,	16	- retta $d\ i$	retta $f\ i$
330,	6 e 7	- rette $c\ l$, $h\ o$, $l\ n$, $i\ m$	rette $c\ c_1$, $h\ o$, $l\ n$, $i\ i_1$
»	38	- della forma $g\ o$	della forma $q\ o$
334,	17	- dalle rette $D'\ d''$, $C'\ c''$	dalle rette $D'\ d''$, $c'\ e''$
335,	31	- $F\ F_1\ p$, $F_1\ s$, e	$F\ F_1\ p$, $F_1\ s$, o
»	32	- ad $E'\ f'\ g'\ h'\ h'$	ad $E'\ f'\ g'\ h'\ h''$
336,	5	- parte nel	parte del
»	18	- in $(E,\ D')$	in $(\varepsilon_1,\ D')$
337,	22	- centro in c_1	centro in c'
»	24	- tangente in p_1	tangente in p
341,	27	- del terzo	del secondo
342,	19	- la figura $p'\ q'\ C'\ D_1$	la figura $p'\ q'\ C'\ D$
»	23	- retta $(p\ D_1,\ p'\ D')$	retta $(p\ D,\ p'\ D')$
348,	34	- delle corde	della corda
349,	38	- $o\ n$, $v\ u$,	$o\ n$, $w\ y$,
350,	33	- i cunei o, w	i cunei q, q'
351,	16	- dalle altre $u\ v$, $u'\ v'$	dalle altre $u\ t$, $v\ x$
356,	3	- ed $x\ a$	ed $x\ \alpha$
357,	7	- in a ed a_1	in a ed a_2

Pag.	Ver.		Leggi
357,	10	- in i ed i_1	in i ed i_1
»	20	- orizzontale g' a'	orizzontale m' u'
»	22	- figura a a_1 b c e g w a'	figura a a_1 b c e g w a
358,	7	- rettangolo (g w, g' g'')	rettangolo (g w, w' g'')
»	17	- modello h l p q o u	modello h l p q o u
360,	1	- le rette i i_1, b, b_1, a, a_1	le rette i i_1, b b_1, a a_1
365,	22 e 23	- ad un piano verticale perpendicolare	a due piani verticali perpendicolari
»	25	- del piano verticale suddetto	di uno dei piani verticali suddetti
»	30 e 31	- tracce del piano della sua fronte	tracce dei piani delle sue fronti
367,	34	- dei cunei	dei conci
368,	35	- dei punti α'_1, β'_1	dei punti α', β'
369,	24	- della quantità α'_1 α''_1	della quantità α_1 α''_1
»	35	- a' b' β' α'' α a'	a' b' β' α'' α' a'
370,	2	- trapezio a b b_1 f	trapezio B B_1 b_1 b
371,	30	- alle curve	alla curva
374,	29	- a'_1 d'_1 b'_1	a'_1 d'_1 b'
375,	22	- La figura m u p q	La figura m u p_1 q_1
376,	21	- (a_1 b_1, a'_1 c'_1 b'_1)	(a_1 b_1, a'_1 c'_1 b'_1), (Fig. 202)
378,	30	- A B, E F, e la	A B, E F (Fig. 204), e la
379,	16	- raggio u F''	raggio u Z''
380,	24	- verticale F D,	verticale C_1 D_1
383,	10	- e m p i g	e m p i g.
384,	10	- l'altezza Z'_1 Z''	l'altezza Z' Z''
388,	10	- h c c_1	k c c_1
389,	33	- a ; A . ..	a. A.....
390,	19	- il punto S_1	il punto s_1
391,	6	- il punto n	il punto v'
392,	23	- proiezione a_1	posizione a_1
393,	22	- la p s	la p s_2
»	23	- ad e a	ad e s_2
394,	21	- e le curve	e la curva
»	26	- Sia a b d f_1 d_1 b_1	Sia a b d f g h i
»	27	- b_1 d_1 f_1	g h i
398,	2	- la c' z' z''	la c z' z''
400,	23	- α'_2 α'', δ' δ''	α'_2 α'', δ'_2 δ''
402,	24	- α''_2 α''_3 γ'' δ'' δ''_1	α''_2 α''_3 γ'' δ''_1 δ''_2

Pag	Ver.		Leggi
408,	30	- e sì nell' uno come nel- l' altro uso	e sì nell' una come nell'altra
409,	26	- in *m*	in *m*,
411,	3	- *A A*,	*A A*
412,	16	- *e i*, *g i*	*e i*, *g i*,
413,	30	- quest' ultimo non ne deve indebolire	quest'ultimo non indebolisca
420,	39	- *b*, *b*	*b*, *b*
425,	3	- tale per modo da	tale da
427,	4	- dell' area di un	dell' area è di un
»	16	- *a b*, *a c*, *c d*	*a b*, *a c*, *c b*
429,	13	- *Fig.* 244	*Fig.* 243

M-149209

CA[illegible]O CIARDI
[illegible]
[illegible] Ospedali e Medicina

BIBLIOTECA NAZIONALE FIRENZE